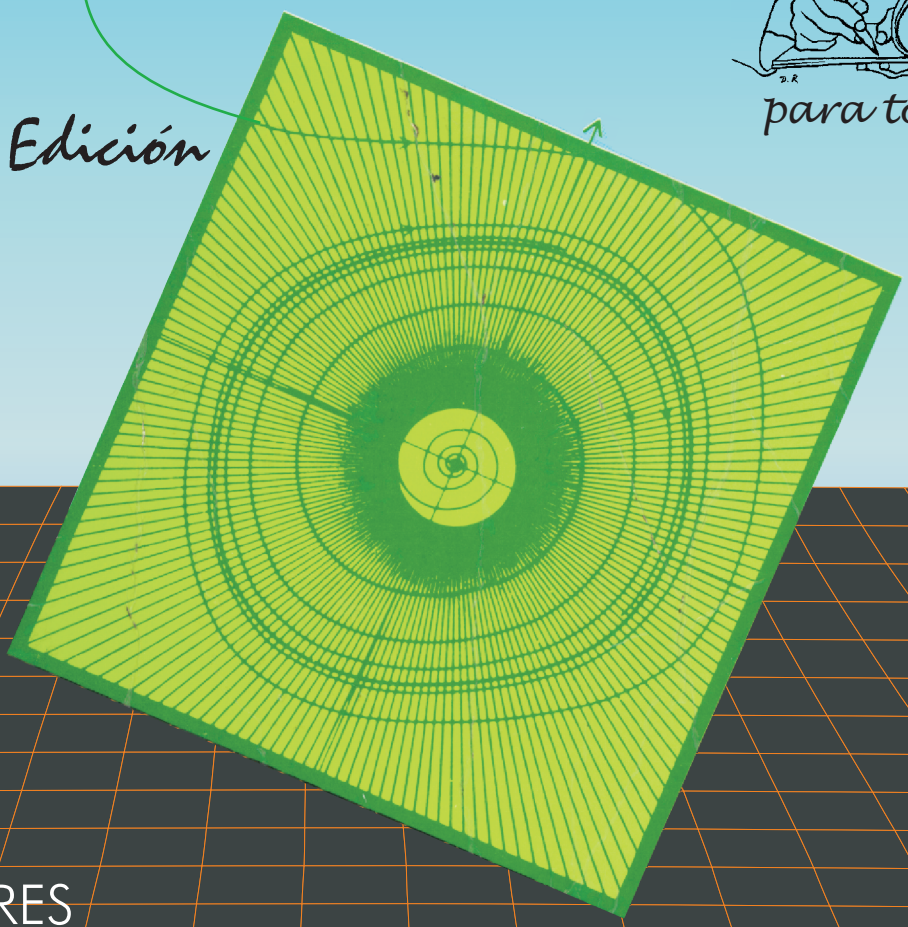
ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

Boyce • DiPrima

Edición digital:
Educación para todos

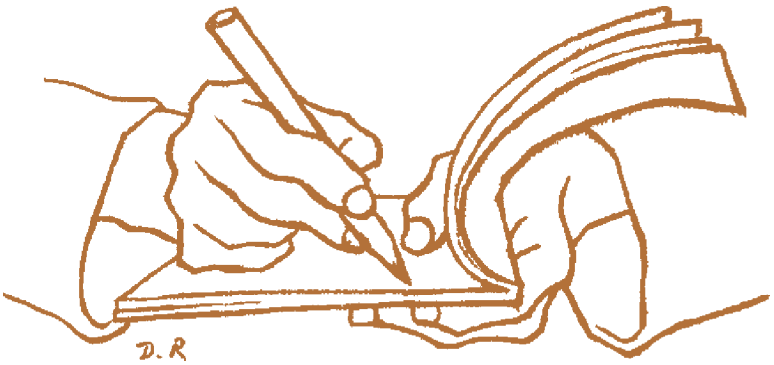
4a Edición



TALLERES ESTUDIANTILES
CIENCIAS UNAM

Edición impresa
LIMUSA-WILLEY

Educación



para todos

Educación para todos no es un proyecto lucrativo, sino un esfuerzo colectivo de estudiantes y profesores de la UNAM para facilitar el acceso a los materiales necesarios para la educación de la mayor cantidad de gente posible. Pensamos editar en formato digital libros que por su alto costo, o bien porque ya no se consiguen en bibliotecas y librerías, no son accesibles para todos.

Invitamos a todos los interesados en participar en este proyecto a sugerir títulos, a prestarnos los textos para su digitalización y a ayudarnos en toda la labor técnica que implica su reproducción. El nuestro, es un proyecto colectivo *abierto* a la participación de cualquier persona y todas las colaboraciones son bienvenidas.

Nos encuentras en los Talleres Estudiantiles de la Facultad de Ciencias y puedes ponerte en contacto con nosotros a la siguiente dirección de correo electrónico:

eduktodos@gmail.com
http://eduktodos.org.mx

Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera

Cuarta edición

William E. Boyce
Richard C. DiPrima
Rensselaer Polytechnic Institute

Versión autorizada en español de la obra publicada en inglés con el título:
ELEMENTARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS
© John Wiley & Sons, Inc.

Colaborador en la traducción:
HUGO VILLAGÓMEZ VELÁZQUEZ

Revisión:
JOSÉ HERNÁN PÉREZ CASTELLANOS
Ingeniero industrial de la Escuela Militar de Ingenieros. Profesor de matemáticas en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, México.

La presentación y disposición en conjunto de

ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 2000, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95, México, D.F.
C.P. 06040
☎ (5)521-21-05
01(800) 7-06-91-00
(5)512-29-03
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM Núm. 121

Segunda reimpresión
de la cuarta edición

Hecho en México
ISBN 968-18-4974-4

A la grata memoria de nuestros padres
Ethel y Clyde DiPrima
Marie y Edward Boyce

Prólogo

Un curso de ecuaciones diferenciales elementales es un medio excelente para que el estudiante comprenda la relación que hay entre las matemáticas y las ciencias físicas o la ingeniería. Antes de que el ingeniero o el científico pueda aplicar con confianza las ecuaciones diferenciales, debe dominar las técnicas de resolución y tener un mínimo de conocimiento de la teoría que las fundamenta. El estudiante de matemáticas recibe un gran beneficio al conocer algunas de las maneras en que el deseo de resolver problemas específicos ha estimulado el trabajo de naturaleza más abstracta.

Escribimos este libro desde el punto de vista intermedio de quien se dedica a las matemáticas aplicadas, cuyo interés en las ecuaciones diferenciales puede ser muy teórico e intensamente práctico. Buscamos combinar una exposición sólida y precisa (pero no abstracta) de la teoría elemental de las ecuaciones diferenciales, con bastante material sobre métodos de resolución, análisis y aproximación que han probado su utilidad en una amplia variedad de aplicaciones. Pusimos atención especial en aquellos métodos de mayor aplicación y que pueden extenderse a problemas fuera del alcance de nuestro libro. Se hace hincapié en que estos métodos tienen una estructura sistemática y ordenada, y que no son sólo una colección diversa de artificios matemáticos. Los métodos analizados en el libro no sólo incluyen técnicas analíticas elementales que dan soluciones exactas en ciertas clases de problemas, también incluyen aproximaciones basadas en algoritmos numéricos o en desarrollos en serie, así como métodos cualitativos o geométricos que a menudo permiten una mejor comprensión del comportamiento global de las soluciones. Estos últimos métodos se están volviendo mucho más accesibles a los estudiantes, como resultado del uso común de computadoras personales o calculadoras de bolsillo poderosas.

De hecho, con la amplia disponibilidad del enorme poder de cómputo, incluyendo los flexibles paquetes de cómputo simbólico, es razonable preguntarse si los métodos analíticos elementales para resolver ecuaciones diferenciales siguen siendo un tema de estudio que valga la pena. Creemos que sí, al menos por dos razones. Primera, resolver un proble-

ma difícil de ecuaciones diferenciales a menudo exige el empleo de diversas herramientas, tanto analíticas como numéricas. Poner en práctica un procedimiento numérico eficiente requiere de un considerable análisis preliminar: determinar las características cualitativas de la solución como guía para el cálculo, investigar los casos límite o especiales, o descubrir qué intervalos de las variables o parámetros requieren o ameritan atención especial. Segunda, comprender en cierta medida un proceso natural complicado a menudo se logra al combinar o partir de modelos más sencillos y más básicos. Estos últimos suelen describirse mediante ecuaciones diferenciales de un tipo elemental. Por tanto, el paso inicial e indispensable hacia la resolución de problemas más complejos es un conocimiento completo de estas ecuaciones, sus soluciones y los modelos que representan.

Una de las metas de esta revisión es alentar a los estudiantes y maestros a explotar el poder de cómputo con el que ahora cuentan para que los estudiantes logren una comprensión más profunda de las ecuaciones diferenciales y una apreciación más precisa de la manera en que pueden aplicarse al estudio de problemas importantes de las ciencias naturales o la ingeniería. En esta edición se incluyen muchas gráficas nuevas generadas por computadora que ayudan a declarar el comportamiento cualitativo de las a menudo complicadas fórmulas que producen los métodos analíticos de resolución. Al mismo tiempo, en el texto se hace un análisis más amplio de las propiedades geométricas o asintóticas de las soluciones. Se presentan aproximadamente 275 problemas nuevos, en muchos de los cuales se requiere que el estudiante ejecute algún cálculo numérico, construya (con ayuda de algún paquete idóneo para trazar gráficas) la gráfica de una solución y, con frecuencia, llegue a conclusiones adecuadas a partir de esas acciones. Por último, se agregan dos nuevas secciones: una sobre ecuaciones en diferencias de primer orden en la que se destaca la ecuación logística, y otra sobre las ecuaciones de Lorenz. En estas secciones se presentan algunas de las ideas básicas asociadas con bifurcaciones, caos y atractores extraños. Además de ser fascinante por sí mismo, este material puede usarse para terminar con la creencia de que las matemáticas son una disciplina ya agotada, y no una en constante crecimiento y renovación.

Escribimos este libro principalmente para estudiantes que ya tienen conocimientos de cálculo obtenidos en un curso normal de dos o tres semestres; el material de la mayor parte del libro es accesible a estos estudiantes. En el capítulo 7 se resume en dos secciones la información necesaria acerca de las matrices. Las secciones señaladas con un asterisco probablemente requieren mayor elaboración matemática (aunque, en términos escritos, no más conocimientos) que el resto del libro. Algunos problemas también están señalados con un asterisco, lo cual indica que son más difíciles que la mayoría y que, en algunos casos, rebasan el alcance del material presentado en el propio libro.

Consideramos que este libro ofrece una flexibilidad mayor que el promedio para adaptarse a las necesidades de un curso. A partir del capítulo 4, los capítulos son en esencia independientes entre sí, aunque el capítulo 11 sigue lógicamente al capítulo 10 y el capítulo 9 contiene citas del capítulo 7. De este modo, una vez que se completan las partes necesarias de los tres primeros capítulos (en términos generales, las secciones 1.1, 2.1, a 2.4 y 3.1 a 3.7), la selección de los temas adicionales, así como el orden y profundidad con los cuales se traten, quedan al criterio del profesor. Por ejemplo, aunque hay bastante material sobre aplicaciones de varios tipos, especialmente en los capítulos 2, 3, 9 y 10, la mayor parte de este material se presenta en secciones separadas, de modo que un profesor puede elegir con facilidad las aplicaciones que desee incluir y las que quiera omitir. Otra posibilidad es combinar la presentación de las ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior

mediante el estudio concurrente de los capítulos 3 y 4. Todavía otra posibilidad es empezar la presentación del material sobre métodos numéricos del capítulo 8 inmediatamente después, o incluso al mismo tiempo, que el material sobre problemas con valor inicial de primer orden del capítulo 2. Por último, aunque en esta revisión se supone que el estudiante dispone de una computadora o calculadora, es posible que algún profesor que no desee destacar este aspecto del tema lo logre, si selecciona con un poco más de atención los problemas asignados.

Al final de cada sección del texto hay un conjunto de problemas para el estudiante. Estos problemas van desde los comunes hasta los que representan un reto; en algunos de estos últimos se amplían aspectos de la teoría o se introducen áreas de aplicación que no se trataron en el texto principal. Como ya se mencionó, en otros problemas es necesaria una investigación, con ayuda de computadora, de una ecuación diferencial mediante la aplicación de técnicas numéricas o gráficas. Al final del libro se dan las respuestas de casi todos los problemas. También, hay un manual de soluciones, compilado por Charles W. Haines del Rochester Institute of Technology, que contiene soluciones detalladas de muchos problemas.

Las secciones del libro están numeradas en forma decimal y, en cada sección, los teoremas y las figuras lo están consecutivamente. Así, el teorema 3.2.4 es el cuarto teorema de la sección 3.2. Al término de cada capítulo se proporciona una bibliografía general y, algunas veces, las más específicas aparecen como notas de pie de página.

El alcance del libro puede juzgarse a partir del contenido, y los lectores que conocen la edición anterior encontrarán que ésta sigue el mismo patrón general. Sin embargo, esta revisión contiene muchos cambios menores y los más importantes se dan en seguida, algunos de los cuales ya se mencionaron:

1. En correspondencia con la tendencia de crecimiento de la materia así como con la creación de paquetes amigables para construir gráficas por computadora, en esta edición se hace mayor hincapié en las propiedades geométricas de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones. En comparación con las ediciones anteriores, hay más gráficas, más análisis de las propiedades y métodos geométricos y más problemas en los que el estudiante debe hacer gráficas u obtener conclusiones a partir de ellas.
2. En el texto se destaca más la obtención de conclusiones a partir de una solución, y no sólo la deducción de la solución en sí, y también se proponen más problemas en este sentido. Lo anterior refleja el hecho de que a menudo la motivación para resolver una ecuación diferencial particular es la necesidad de comprender algún proceso o fenómeno natural descrito por la ecuación.
3. Se han agregado secciones nuevas sobre ecuaciones en diferencias de primer orden y sobre las ecuaciones de Lorenz, introduciendo los conceptos de bifurcaciones, caos y atractores extraños.
4. El material básico acerca de las ecuaciones lineales de segundo orden del capítulo 3 se volvió a escribir para hacer más directa la presentación y, en especial, para analizar la solución de algunos problemas simples antes de abordar la teoría general.
5. Se intercambiaron los capítulos 4 (ecuaciones lineales de orden superior) y 5 (soluciones en series de potencias) para facilitar la labor de los profesores que deseen combinar el tratamiento de las ecuaciones lineales de segundo orden y las de orden superior.
6. Al capítulo 8 se le agregó un análisis más completo de los métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones. También se proponen aproximadamente 30 problemas nuevos en este capítulo.

7. El capítulo 9, sobre análisis de estabilidad y del plano fase, fue ampliado de manera considerable. Además de la nueva sección sobre las ecuaciones de Lorenz, ahora hay dos secciones en vez de una sobre la interacción de dos poblaciones, así como una sección nueva sobre ciclos límite en la que se hace resaltar la ecuación de van der Pol.

A medida que el tema de estudio de las ecuaciones diferenciales continúe creciendo, que nuevas tecnologías se vuelvan lugar común, que se amplíen los antiguos campos de aplicación y que surjan nuevos campos en este aspecto, así tendrán que evolucionar el contenido y los puntos de vista de los cursos y sus libros de texto. Esta fue la idea que pretendimos expresar en este libro.

William E. Boyce
Troy, Nueva York

Agradecimientos

Durante la preparación de esta revisión recibimos la valiosa ayuda de varias personas. Es un placer expresar ahora nuestro agradecimiento sincero a todos y cada uno de ellos por su tiempo y dedicación.

Mientras revisaba el manual de soluciones, Charles W. Haines leyó el texto y comprobó las respuestas de muchos de los problemas. Gracias a su capacidad de observación se eliminaron numerosos errores e incoherencias.

Richard Bagby, Bruce Berndt, Paul Davis y Thomas Otway revisaron todo el manuscrito e hicieron muchas sugerencias pertinentes; como resultado, el libro es considerablemente mejor de lo que hubiera sido sin su ayuda.

A partir de la publicación de la edición precedente recibimos valiosos comentarios de varios usuarios. De ellos, merecen mención especial R. B. Burckel, Leah Edelstein-Keshet y Melvin Lax por lo detallado y amplio de sus sugerencias.

Cathy Caldwell leyó la mayor parte del manuscrito, verificando los ejemplos y las respuestas dadas a los problemas nuevos. También fue de gran ayuda en la corrección de las pruebas.

En esta edición se presentan figuras nuevas generadas por computadora. Algunas de éstas se trazaron originalmente con la aplicación del PHASER de Hüseyin Koçak, mientras que otras se prepararon con ayuda del PHASE PORTRAITS de Herman Gollwitzer.

Por último, y lo más importante de todo, agradezco a mi esposa Elsa no sólo su ayuda en actividades como la lectura de pruebas y la comprobación de cálculos, en especial por su apoyo moral, aliento y paciencia infatigables a lo largo de todo el proyecto.

W. E. B.

Contenido

Capítulo 1. Introducción 17

1.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales 17
1.2 Notas históricas 27

Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden 31

2.1 Ecuaciones lineales 31
2.2 Otras consideraciones acerca de las ecuaciones lineales 40
2.3 Ecuaciones separables 47
2.4 Diferencias entre las ecuaciones lineales y las no lineales 54
2.5 Aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer orden 60
2.6 Dinámica de las poblaciones y algunos problemas relacionados 71
2.7 Algunos problemas de mecánica 87
2.8 Ecuaciones exactas y factores integrantes 95
2.9 Ecuaciones homogéneas 103
2.10 Problemas diversos y aplicaciones 107
*2.11 Teorema de existencia y unicidad 111
2.12 Ecuaciones en diferencias de primer orden 121

Capítulo 3. Ecuaciones lineales de segundo orden 135

3.1 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes 135
3.2 Soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas 144
3.3 Independencia lineal y el wronskiano 154
3.4 Raíces complejas de la ecuación característica 160
3.5 Raíces repetidas; reducción de orden 168
3.6 Ecuaciones no homogéneas; método de los coeficientes indeterminados 177
3.7 Variación de parámetros 189

3.8 Vibraciones mecánicas y eléctricas 197
3.9 Vibraciones forzadas 210

Capítulo 4. Ecuaciones lineales de orden superior 219
4.1 Teoría general de las ecuaciones lineales de n-ésimo orden 219
4.2 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes 225
4.3 Método de los coeficientes indeterminados 232
4.4 Método de variación de parámetros 236

Capítulo 5. Soluciones en serie de las ecuaciones lineales de segundo orden 241
5.1 Repaso de series de potencias 241
5.2 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte I 248
5.3 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte II 259
5.4 Puntos singulares regulares 266
5.5 Ecuaciones de Euler 271
5.6 Soluciones en serie cerca de un punto singular regular, parte I 280
5.7 Soluciones en serie cerca de un punto singular regular, parte II 286
*5.8 Soluciones en serie cerca de un punto singular regular; $r_1 = r_2$ y $r_1 - r_2 = N$ 292
*5.9 Ecuación de Bessel 295

Capítulo 6. La transformada de Laplace 309
6.1 Definición de la transformada de Laplace 309
6.2 Solución de problemas con valor inicial 316
6.3 Funciones escalón 327
6.4 Ecuaciones diferenciales con funciones de fuerza discontinuas 335
6.5 Funciones impulso 339
6.6 Integral de convolución 344

Capítulo 7. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden 353
7.1 Introducción 353
7.2 Repaso de matrices 361
7.3 Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales; independencia lineal, eigenvalores, eigenvectores 371
7.4 Teoría básica de los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden 383
7.5 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes 388
7.6 Eigenvalores complejos 398
7.7 Eigenvalores repetidos 405
7.8 Matrices fundamentales 413
7.9 Sistemas lineales no homogéneos 420

Capítulo 8. Métodos numéricos 429
8.1 Método de Euler o de la recta tangente 429
8.2 Errores en los procedimientos numéricos 436
8.3 Mejoras en el método de Euler 444
8.4 Método de Runge-Kutta 450
8.5 Algunas dificultades con los métodos numéricos 454

8.6 Un método de pasos múltiples 460
8.7 Sistemas de ecuaciones de primer orden 467

Capítulo 9. Ecuaciones diferenciales no lineales y estabilidad 473

9.1 Plano fase: sistemas lineales 473
9.2 Sistemas autónomos y estabilidad 486
9.3 Sistemas casi lineales 495
9.4 Especies competidoras 508
9.5 Ecuaciones del depredador-presa 521
9.6 Segundo método de Liapunov 531
9.7 Soluciones periódicas y ciclos límite 541
9.8 Caos y atractores extraños: ecuaciones de Lorenz 552

Capítulo 10. Ecuaciones diferenciales parciales y series de Fourier 563

10.1 Separación de variables; conducción del calor 563
10.2 Series de Fourier 572
10.3 Teorema de Fourier 582
10.4 Funciones pares e impares 588
10.5 Solución de otros problemas de conducción del calor 597
10.6 Ecuación de onda: vibraciones de una cuerda elástica 608
10.7 Ecuación de Laplace 620
Apéndice A. Deducción de la ecuación de conducción del calor 629
Apéndice B. Deducción de la ecuación de onda 634

Capítulo 11. Problemas con valores en la frontera y teoría de Sturm-Liouville 639

11.1 Ocurrencia de problemas con valores en la frontera en dos puntos 639
11.2 Problemas lineales homogéneos con valores en la frontera: eigenvalores y eigenfunciones 643
11.3 Problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera 652
11.4 Problemas no homogéneos con valores en la frontera 665
*11.5 Problemas singulares de Sturm-Liouville 681
*11.6 Otras consideraciones sobre el método de separación de variables: un desarrollo en serie de Bessel 689
*11.7 Series de funciones ortogonales: convergencia en la media 695

Respuestas a los problemas 705

Índice 751

Capítulo 1 Introducción

En este breve capítulo se proporciona una perspectiva del estudio de las ecuaciones diferenciales. Primero, se indican varias maneras de clasificar las ecuaciones, a fin de contar con una estructura organizada para el resto del libro. Luego, se presentan algunas de las figuras y tendencias más importantes en el desarrollo histórico de la materia. El estudio de las ecuaciones diferenciales ha llamado la atención de muchos de los matemáticos más grandes del mundo a lo largo de los tres últimos siglos. Sin embargo, sigue siendo un campo dinámico de la investigación actual, con muchas preguntas interesantes abiertas.

1.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Cuando se plantean en términos matemáticos muchos problemas importantes y significativos de la ingeniería, las ciencias físicas y las ciencias sociales, se requiere determinar una función que satisfaga una ecuación que contiene una o más derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales**. Quizá el ejemplo más conocido es la ley de Newton

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right] \tag{1}$$

para la posición $u(t)$ de una partícula sobre la cual actúa una fuerza F, que puede ser una función del tiempo t, de la posición $u(t)$ y de la velocidad $du(t)/dt$. Para determinar el movimiento de una partícula sobre la que actúa una fuerza F es necesario hallar una función u que satisfaga la ecuación (1).

El objetivo primordial de este libro es analizar algunas propiedades de las soluciones de las ecuaciones diferenciales y describir algunos de los métodos que han probado su eficacia para hallar las soluciones o, en algunos casos, dar aproximaciones de las mismas. A fin de

contar con un marco de referencia para la presentación, en principio se mencionarán varias maneras útiles de clasificar las ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Una de las clasificaciones más evidentes se basa en el hecho de si la función desconocida depende de una sola variable independiente o de varias variables independientes. En el primer caso en la ecuación diferencial sólo aparecen derivadas ordinarias, por lo que se dice que es una **ecuación ordinaria**; En el segundo las derivadas son derivadas parciales, por lo que la ecuación se denomina **ecuación diferencial parcial.**

Además de la ecuación (1), dos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \tag{2}$$

para la carga $Q(t)$ en un condensador en un circuito con capacitancia C, resistencia R, inductancia L y voltaje aplicado $E(t)$, y la ecuación que rige el decaimiento con el tiempo de una cantidad $R(t)$ de una sustancia radiactiva, como el radio,

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t), \tag{3}$$

en donde k es una constante conocida. Ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales parciales son la ecuación del potencial

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

la ecuación de la difusión o conducción del calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \tag{5}$$

y la ecuación de onda

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \tag{6}$$

en donde α^2 y a^2 son ciertas constantes. La ecuación del potencial, de difusión y de onda surgen de diversos problemas en los campos de la electricidad y del magnetismo, elasticidad y mecánica de fluidos. Cada una de ellas es típica de fenómenos físicos distintos (observe los nombres) y cada una es representativa de una gran clase de ecuaciones diferenciales parciales.

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Otra clasificación de las ecuaciones diferenciales depende del número de funciones desconocidas que intervienen. Si hay que determinar una sola función, entonces basta una ecuación. Sin embargo, si existen dos o más funciones desconocidas, entonces se requiere un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, las ecuaciones de Lotka-Volterra, o del depredador-presa, son importantes en la creación de modelos ecológicos; estas ecuaciones tienen la forma

$$\begin{aligned} dH/dt &= aH - \alpha HP, \\ dP/dt &= -cP + \gamma HP, \end{aligned} \tag{7}$$

en donde $H(t)$ y $P(t)$ son las poblaciones respectivas de las especies presa y depredadora. Las constantes a, α, c y γ se basan en observaciones empíricas y dependen de las especies en estudio. En los capítulos 7 y 9 se estudian los sistemas de ecuaciones; en particular, en la sección 9.5, se examinan las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Orden. El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en ella. así, las ecuaciones (1) y (2) son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y la (3) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. (4), (5) y (6) son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. De manera más general, la ecuación

$$F[x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)] = 0 \tag{8}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden. La ecuación (8) representa una relación entre la variable independiente x y los valores de la función u y sus n primeras derivadas $u', u'', \ldots, u^{(n)}$. En las ecuaciones diferenciales es conveniente y se acostumbra escribir y en vez de $u(x)$, así como $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ en vez de $u'(x), u''(x), \ldots, u^{(n)}(x)$; por tanto, la ecuación (8) se escribe como

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{9}$$

Por ejemplo,

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4 \tag{10}$$

es una ecuación diferencial de tercer orden para $y = u(x)$. En ocasiones se usan otras letras en lugar de y; el resultado resulta evidente a partir del contexto.

Se supone que siempre es posible despejar la derivada de orden más alto en una ecuación diferencial ordinaria dada y obtener

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{11}$$

Sólo se estudiarán las ecuaciones de la forma (11). Lo anterior se hace principalmente para evitar la ambigüedad que pudiera surgir debido a que una sola ecuación de la forma (9) puede corresponder a varias ecuaciones de la forma (11). Por ejemplo, la ecuación

$$y'^2 + xy' + 4y = 0$$

da las dos ecuaciones

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 16y}}{2} \quad \text{o} \quad y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 16y}}{2}.$$

Solución. Una **solución** de la ecuación diferencial ordinaria (11) sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$ es una función ϕ tal que existen $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ y se satisface

$$\phi^{(n)}(x) = f[x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)] \tag{12}$$

para toda x en $\alpha < x < \beta$. A menos de que se diga otra cosa, se supone que la función f de la ecuación (11) es una función de valores reales, y se tiene interés en obtener las soluciones $y = \phi(x)$ de valores reales.

Es fácil comprobar por sustitución directa que la ecuación de primer orden (3)

$$dR/dt = -kR$$

tiene la solución

$$R = \phi(t) = ce^{-kt}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{13}$$

en donde c es una constante arbitraria. De manera semejante, las funciones $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ son soluciones de

$$y'' + y = 0 \tag{14}$$

para toda x. Como un ejemplo un poco más complicado, se comprueba que $\phi_1(x) = x^2 \ln x$ es una solución de

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \qquad x > 0. \tag{15}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= x^2 \ln x,\\
\phi_1'(x) &= x^2(1/x) + 2x \ln x = x + 2x \ln x,\\
\phi_1''(x) &= 1 + 2x(1/x) + 2 \ln x = 3 + 2 \ln x.
\end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial (15) se obtiene

$$\begin{aligned}
x^2(3 + 2 \ln x) - 3x(x + 2x \ln x) + 4(x^2 \ln x)\\
= 3x^2 - 3x^2 + (2 - 6 + 4)x^2 \ln x = 0,
\end{aligned}$$

con lo cual se comprueba que $\phi_1(x) = x^2 \ln x$ es una solución de la (15). También es posible demostrar que $\phi_2(x) = x^2$ es una solución de la ecuación (15); se deja esto último como ejercicio.

Aunque para las ecuaciones (3), (14) y (15) es posible verificar que ciertas funciones sencillas son soluciones, en general no se tienen con facilidad esas soluciones. Por tanto, una pregunta fundamental es: dada una ecuación de la forma (11), ¿cómo es posible decir si tiene una solución? Esta es la cuestión de *existencia* de una solución. El hecho de que se haya escrito una ecuación de la forma (11) no necesariamente significa que exista una función $y = \phi(x)$ que la satisfaga. De hecho, no todas las ecuaciones diferenciales tienen soluciones, ni su existencia es un asunto puramente matemático. Si un problema físico que tenga sentido, se plantea matemáticamente de manera correcta como una ecuación diferencial, entonces el problema matemático debe tener una solución. En este sentido, un ingeniero o un científico cuenta con un medio para comprobar la validez del planteamiento matemático.

En segundo lugar, suponiendo que una ecuación dada tiene una solución, ¿tendrá otras soluciones? En caso afirmativo, ¿qué tipo de condiciones adicionales es necesario especificar para singularizar una solución específica? Esta es la cuestión de *unicidad*. Obsérvese que para la ecuación de primer orden (3) existen una infinidad de soluciones, que corresponden a la infinidad de posibilidades de elección de la constante c de la ecuación (13). Si se especifica R en algún instante t, esta condición determinará un valor de c; sin embargo, aún así no se sabe todavía si la ecuación (3) no tiene otras soluciones que también tengan el valor prescrito de R en el instante predeterminado t. Las cuestiones de existencia

y unicidad son difíciles de responder; a medida que se avance se analizarán estas dudas y otras relacionadas.

Una tercera pregunta, más práctica, es: dada una ecuación diferencial de la ecuación (11), ¿cómo se determina realmente una solución? Observe que si se encuentra una solución de la ecuación dada, al mismo tiempo se responde la pregunta de la existencia de una solución. Por otra parte, sin conocer la teoría de la existencia posible, por ejemplo, usar una computadora para hallar una aproximación numérica a una "solución" que no existe. Aunque fuese posible saber que existe una solución, puede ser que ésta no sea expresable en términos de las funciones elementales usuales: funciones polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas. No obstante, esto es lo que sucede para la mayor parte de las ecuaciones diferenciales. Por tanto, al mismo tiempo que se analizan los métodos elementales que pueden aplicarse para obtener soluciones de ciertos problemas relativamente sencillos, también es importante considerar los métodos de naturaleza más general que puedan aplicarse a problemas más difíciles.

Ecuaciones lineales y no lineales. Otra clasificación decisiva de las ecuaciones diferenciales es si éstas son lineales o no lineales. Se dice que la ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

es **lineal** si F es una función lineal de las variables $y, y', \ldots, y^{(n)}$; se aplica una definición semejante para las ecuaciones diferenciales parciales. Por tanto, la ecuación diferencial ordinaria lineal general de orden n es

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x). \tag{16}$$

Las ecuaciones (2) a (6), (14) y (15) son lineales. Una ecuación que no es de la forma (16) es **no lineal**. La (10) es no lineal debido al término yy'. Un problema físico sencillo que da origen a una ecuación diferencial no lineal es el péndulo oscilante. El ángulo θ formado por un péndulo oscilante de longitud l, con respecto a la vertical (ver la figura 1.1.1) satisface la ecuación no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{17}$$

La teoría matemática y las técnicas para resolver ecuaciones lineales están bastante desarrolladas. Por el contrario, para las ecuaciones no lineales la situación no es tan satisfacto-

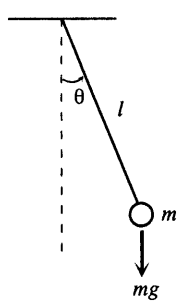


FIGURA 1.1.1 Péndulo oscilante.

ria. Faltan en gran parte técnicas generales para resolver las ecuaciones no lineales y la teoría no asociada con ellas también es más complicada que la correspondiente de las ecuaciones lineales. En vista de lo anterior, resulta conveniente que muchos problemas importantes originen ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o, por lo menos en una primera aproximación, ecuaciones lineales. Por ejemplo, para el problema del péndulo, si el ángulo θ es pequeño, entonces sen $\theta \cong \theta$ y la ecuación (17) puede sustituirse por la ecuación lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{18}$$

Por otra parte, existen fenómenos físicos importantes, como los problemas ecológicos de las secciones 9.4 y 9.5, en los que no es posible dar una aproximación de las ecuaciones diferenciales no lineales rectoras por medio de lineales: la no linealidad es decisiva.

En un texto elemental es natural hacer hincapié en el análisis de las ecuaciones lineales. Por consiguiente, la mayor parte de este libro está dedicada a las ecuaciones lineales y a diversos métodos para resolverlas. Sin embargo, los capítulos 8 y 9, así como una gran parte del capítulo 2, tratan de ecuaciones no lineales. A lo largo de todo el texto se intenta mostrar por qué las ecuaciones no lineales son, en general, más difíciles y por qué muchas de las técnicas útiles para resolver ecuaciones lineales no pueden aplicarse a las no lineales.

Campos direccionales. A partir del próximo capítulo se analizarán con detalle muchos métodos para resolver varias clases de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, antes de proceder a ese análisis, vale la pena hacer algunos comentarios acerca de la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones. Un punto de vista geométrico es particularmente útil para las ecuaciones de primer orden, es decir, ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{19}$$

Dado que una solución de la ecuación (19) es una función $y = \phi(x)$, la representación geométrica de una solución es la gráfica de una función. Geométricamente, en la ecuación (19) se afirma que, en cualquier punto (x, y) la pendiente dy/dx de la solución en ese punto está dada por $f(x, y)$. Esto pude indicarse si se traza un pequeño segmento rectilíneo que pase por el punto (x, y) con la pendiente $f(x, y)$. La colección de todos esos segmentos rectilíneos se llama **campo direccional** de la ecuación diferencial (19). El campo direccional puede observarse si se trazan pequeños segmentos rectilíneos en algún conjunto representativo de puntos en el plano xy. Aunque hacer esto manualmente es tedioso, resulta una tarea sencilla para una computadora, ya que sólo se requiere la evaluación repetida de $f(x, y)$ para valores diferentes de x y y. Por lo general se elige alguna rejilla rectangular de puntos. Una vez que se obtiene un esquema del campo direccional, a menudo es posible ver de inmediato el comportamiento cualitativo de las soluciones, o quizá observar regiones del plano que tienen algún interés especial.

Por ejemplo, en la figura 1.1.2 se tiene el campo direccional de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - y}{2} \tag{20}$$

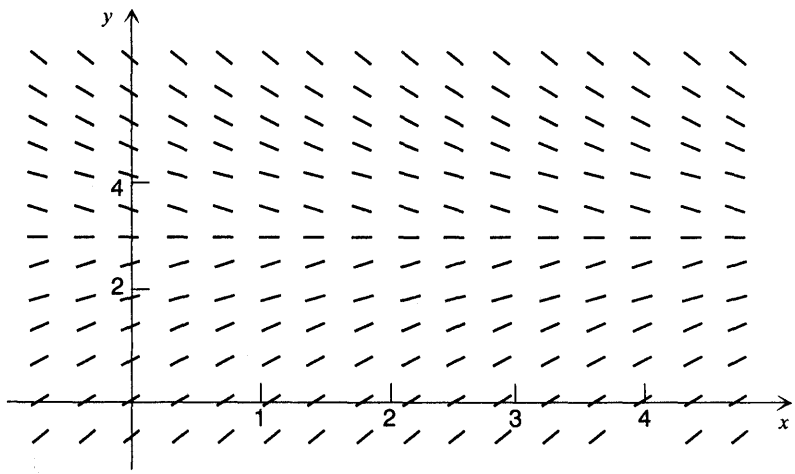


FIGURA 1.1.2 Campo direccional de $y' = (3 - y)/2$.

Para esta ecuación, $f(x, y)$ sólo depende de y, de modo que los segmentos rectilíneos tienen la misma pendiente en todos los puntos sobre cualquier recta paralela al eje x. Por ejemplo, sobre la recta $y = 2$ la pendiente de cada segmento rectilíneo es 1/2. Cualquier solución de la (20) tiene la propiedad de que, en todo punto, su gráfica es tangente al elemento del campo direccional en ese punto. Por tanto, como puede observarse a partir de esta figura, el campo direccional proporciona una información cualitativa acerca de las soluciones. Por ejemplo, con base en la figura 1.1.2 parece evidente que las soluciones son funciones decrecientes cuando $y > 3$, que son crecientes cuando $y < 3$, y que, aparentemente, todas las soluciones tienden al valor 3 cuando $x \to \infty$.

En la sección 2.1 se estudia con mayor detalle esta ecuación; allí se encontrarán sus soluciones y se confirmarán estas conclusiones tentativas.

Como otro ejemplo, considere la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - 2y. \tag{21}$$

Ahora la función $f(x, y) = e^{-x} - 2y$ depende tanto de x como de y, de modo que es una ecuación más complicada que la (20). En la figura 1.1.3 se muestra el campo direccional de la ecuación (21). Una vez más, el patrón general de las curvas solución resulta evidente con base en esta figura y parece que todas las soluciones tienden a cero cuando $x \to \infty$.

Empleo de las computadoras en las ecuaciones diferenciales. Una computadora puede ser una herramienta bastante valiosa para el estudio de las ecuaciones diferenciales. Durante muchos años se han utilizado las computadoras para ejecutar algoritmos numéricos, como los que se describen en el capítulo 8, a fin de construir aproximaciones numéricas para las soluciones de ecuaciones diferenciales. En la actualidad, estos algoritmos se han refinado hasta un nivel extremadamente superior de generalidad y eficiencia. Para resolver numéricamente una amplia variedad de ecuaciones diferenciales bastan unas cuantas líneas de código de computadora, escritas en un lenguaje de alto nivel, como FORTRAN, BASIC

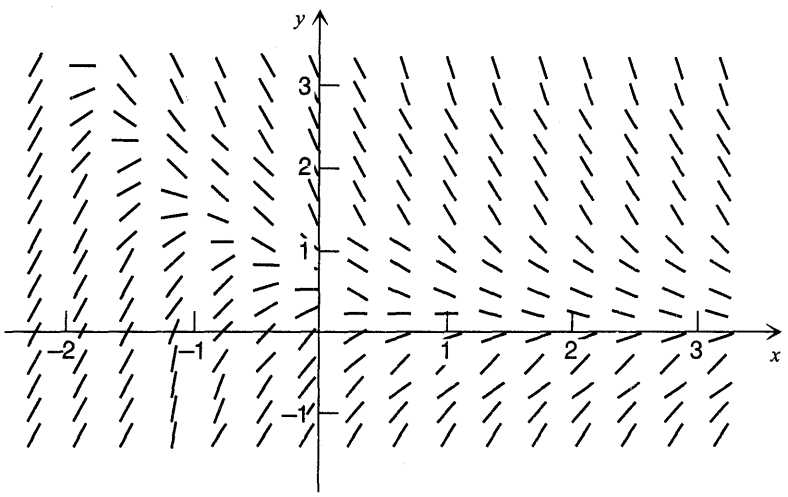


FIGURA 1.1.3 Campo direccional de $y' = e^{-x} - 2y$.

o Pascal, y que se ejecuten (a menudo en unos cuantos segundos) en una computadora relativamente poco costosa. En la mayoría de los centros de cómputo se cuenta con las rutinas más complicadas. Estas rutinas combinan la capacidad de manejar sistemas muy grandes y complejos, con numerosas características de diagnóstico que alertan al usuario respecto a posibles problemas a medida que se presentan. La salida usual de un algoritmo numérico es una tabla de números en la que se listan valores seleccionados de la variable independiente y los valores correspondientes de la variable dependiente. Con medios idóneos para trazar gráficas con computadoras, también es fácil presentar gráficamente la solución de una ecuación diferencial, sin importar que la solución se haya obtenido numéricamente o como resultado de un procedimiento analítico de algún tipo. Esta presentación gráfica suele ser mucho más ilustrativa y útil, para comprender e interpretar la solución de una ecuación diferencial, que una tabla de números o una fórmula analítica complicada. Por ejemplo, muchas de las figuras en este libro se generaron por medio de una computadora, aunque hayan sido vueltas a trazar por un artista. Por supuesto, ahora la amplia disponibilidad de microcomputadoras poderosas ha puesto este tipo de capacidad de cómputo y gráfica al alcance de los estudiantes, quienes poseen sus propias computadoras personales o tienen acceso a laboratorios públicos de microcomputadoras. Un estudiante interesado en las ecuaciones diferenciales debe considerar, a la luz de sus propias circunstancias, la mejor manera de aprovechar los recursos de cómputo de que disponga. En el mercado existen varios paquetes de software bien diseñados para la investigación gráfica de las ecuaciones diferenciales y seguramente en el futuro aparecerán más. Al final de este capítulo, en la bibliografía, se listan algunos de los paquetes disponibles.

Otro aspecto muy pertinente del uso de las computadoras para el estudio de ecuaciones diferenciales es la existencia de paquetes de *software* extremadamente poderosos y generales para efectuar cálculos simbólicos y numéricos. Entre éstos se encuentran *Derive*, *Macsyma*, *Maple*, *Mathematica*, y *MathScribe*, cada uno de los cuales puede utilizarse en

varios tipos de computadoras personales o estaciones de trabajo. Entre otras funciones, estos paquetes pueden efectuar las operaciones analíticas que intervienen en la resolución de muchas ecuaciones diferenciales, a menudo en respuesta a una sola instrucción. El empleo de manipuladores simbólicos o del álgebra por computadora aún es incipiente, pero quienquiera que pretenda abordar las ecuaciones diferenciales de forma no superficial debe familiarizarse por lo menos con un paquete de manipulación simbólica e investigar las maneras en que es posible aplicarlo.

Para el estudiante, estos recursos diversos de cómputo tienen un efecto sobre la manera en que debe estudiar las ecuaciones diferenciales. Sigue siendo esencial comprender cómo se aplican los diversos métodos de resolución, y esta comprensión se logra en parte al trabajar con detalle un número suficiente de empleos. Sin embargo, llegará el momento en que deba delegar tanto como sea posible los detalles sistemáticos (a menudo repetitivos) a una computadora para concentrar más la atención en el planteamiento adecuado del problema y en la interpretación de la solución. En especial, el estudiante debe esforzarse por combinar los métodos numéricos, gráficos y analíticos a fin de comprender mejor el comportamiento de la solución y del proceso subyacente modelado por el problema. Nuestro punto de vista es que siempre debe tratar de usar las mejores herramientas disponibles para cada tarea. Algunas veces pueden ser lápiz y papel; otras, una computadora o una calculadora. A menudo lo mejor es una combinación atinada.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, determine el orden de la ecuación diferencial dada; diga también si la ecuación es lineal o no lineal

1. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \operatorname{sen} x$
2. $(1 + y^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$
3. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 1$
4. $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = 0$
5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x$
6. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} + (\cos^2 x)\, y = x^3$

En cada uno de los problemas 7 a 14, verifique que la función o funciones que se dan son una solución de la ecuación diferencial.

7. $y'' - y = 0; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \cosh x$
8. $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = e^x$
9. $xy' - y = x^2; \quad y = 3x + x^2$
10. $y'''' + 4y''' + 3y = x; \quad y_1(x) = x/3, \quad y_2(x) = e^{-x} + x/3$
11. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{1/2}, \quad y_2(x) = x^{-1}$
12. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-2}, \quad y_2(x) = x^{-2} \ln x$
13. $y'' + y = \sec x, \quad 0 < x < \pi/2; \quad y = (\cos x) \ln \cos x + x \operatorname{sen} x$
14. $y' - 2xy = 1; \quad y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt + e^{x^2}$

En cada uno de los problemas 15 a 18, determine los valores de r para los que la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma $y = e^{rx}$.

15. $y' + 2y = 0$
16. $y'' - y = 0$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

En cada uno de los problemas 19 y 20, determine los valores de r para los que la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma $y = x^r$, para $x > 0$.

19. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
20. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

En cada uno de los problemas 21 a 26, determine el orden de la ecuación diferencial parcial dada; diga también si la ecuación es lineal o no lineal. Las derivadas parciales se denotan por medio de subíndices.

21. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
22. $\alpha^2 u_{xx} = u_t$
23. $a^2 u_{xx} = u_{tt}$
24. $u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0$
25. $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$
26. $u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$

En cada uno de los problemas 27 a 32, verifique que la función o funciones dadas son una solución de la ecuación diferencial parcial correspondiente.

27. $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $u_1(x, y) = \cos x \cosh y$, $u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
28. $\alpha^2 u_{xx} = u_t$; $u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \operatorname{sen} x$, $u_2(x, t) = e^{-\alpha^2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x$, λ es una constante real
29. $a^2 u_{xx} = u_{tt}$; $u_1(x, t) = \operatorname{sen} \lambda x \operatorname{sen} \lambda at$, $u_2(x, t) = \operatorname{sen}(x - at)$, λ es una constante real
30. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$; $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$
31. $\alpha^2 u_{xx} = u_t$; $u = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}$, $t > 0$
32. $a^2 u_{xx} = u_{tt}$; $u = f(x - at) + g(x + at)$,
en donde f y g son funciones doblemente diferenciables

En cada uno de los problemas 33 a 40 use una computadora, de ser posible, para hacer un esquema del campo direccional de la ecuación diferencial dada. Con base en el campo direccional, determine el comportamiento de y cuando $x \to \infty$.

33. $y' = -1 - 2y$
34. $y' = y + 2$
35. $y' = -2 + x - y$
36. $y' = xe^{-2x} - 2y$
37. $y' = e^{-x} + y$
38. $y' = x + 2y$
39. $y' = y(4 - y)$
40. $y' = -y(5 - y)$

Isóclinas. Si es necesario trazar manualmente el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, es útil observar que la pendiente y' de la solución tiene el valor constante c en todos los puntos de la curva $f(x, y) = c$. Estas curvas se denominan isóclinas. Para ecuaciones relativamente simples es posible trazar el campo direccional dibujando unas cuantas isóclinas y luego insertar los segmentos rectilíneos tangentes a la solución en varios puntos de cada una. Por ejemplo, las isóclinas de la ecuación (20) son rectas paralelas al eje x y las isóclinas de la (21) son las gráficas de la ecuación $y = (e^{-x} - c)/2$ para varios valores de c. En cada uno de los problemas del 41 al 46, determine las isóclinas y después úselas para trazar el campo direccional. Compruebe su dibujo usando una computadora, si es posible.

41. $y' = 3 - 2y$
42. $y' = -y(1 + y^2)$
43. $y' = (1 - y)(2 - y)$
44. $y' = 2x - 3y$
45. $y' = x^2 + y^2$
46. $y' = 1 - xy$

1.2 Notas históricas

Si no se tienen algunos conocimientos acerca de las ecuaciones diferenciales y los métodos para resolverlas, es difícil apreciar la historia de esta importante rama de las matemáticas. Además, el desarrollo de las ecuaciones diferenciales está estrechamente relacionado con el desarrollo general de las matemáticas, por lo que no es posible separarlo de éste. Sin embargo, para proporcionar una perspectiva histórica, se indican algunas de las tendencias más importantes en la historia de la materia y se identifican los primeros contribuidores más sobresalientes. En los pies de página dispersos en todo el libro y en la bibliografía que se encuentra al final de este capítulo se proporciona información histórica adicional.

El estudio de las ecuaciones diferenciales se originó en los albores del cálculo con Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), en el siglo XVII. Newton creció en la campiña inglesa, estudió en el Trinity College de Cambridge y trabajó ahí como profesor de matemáticas a partir de 1669. Sus memorables descubrimientos del cálculo y las leyes fundamentales de la mecánica datan de 1665. Estos circularon en forma privada entre sus amigos, pues Newton era extremadamente sensible a la crítica y no comenzó a publicar sus resultados hasta 1687 con la aparición de su libro más famoso, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Aunque Newton trabajó relativamente poco en las ecuaciones diferenciales *per se*, su desarrollo del cálculo y su aclaración de los principios fundamentales de la mecánica proporcionaron una base para la aplicación de aquéllas en el siglo XVIII, de modo más notable por Euler. Newton clasificó las ecuaciones diferenciales de primer orden según las formas $dy\,dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ y $dy/dx = f(x, y)$. Para la última ecuación desarrolló un método de resolución, aplicando series infinitas, cuando $f(x, y)$ es un polinomio en x y y. La larga carrera de investigación activa de Newton, terminó a principios de la década de 1690, salvo por la resolución de problemas ocasionales que constituían un desafío. En 1695 fue designado guardián de la Casa de Moneda británica y algunos años después, renunció a su cátedra. Fue nombrado caballero en 1705 y al fallecer sus restos fueron depositados en la Abadía de Westminster.

Leibniz nació en Leipzig y terminó su doctorado en filosofía a la edad de 20 años en la Universidad de Altdorf. Durante toda su vida se entregó a trabajos eruditos en varios campos. En matemáticas fue esencialmente autodidacta, ya que su interés en la materia se inició cuando tenía un poco más de 20 años. Leibniz llegó a los resultados fundamentales del cálculo de manera independiente, aunque un poco más tarde que Newton, pero los publicó primero, en 1684. Leibniz tenía plena conciencia del poder de una buena notación matemática, y la notación actual para la derivada (dy/dx) y el símbolo de la integral se deben a él. Descubrió el método de la separación de variables (sección 2.3) en 1691, la reducción de ecuaciones homogéneas a ecuaciones separables (sección 2.9) en 1691, y el procedimiento para resolver ecuaciones lineales de primer orden (secciones 2.1 y 2.2), en 1694. Fue embajador y consejero de varias familias de la realeza alemana, lo que le permitió viajar mucho y mantener una amplia correspondencia con otros matemáticos, en espe-

cial con los hermanos Bernoulli. En el curso de esta correspondencia se resolvieron muchos problemas de ecuaciones diferenciales durante la última parte del siglo XVII.

Los hermanos Jakob (1654-1705) y Johann (1667-1748) Bernoulli de Basilea hicieron mucho por llegar a métodos para resolver ecuaciones diferenciales y ampliar el alcance de sus aplicaciones: Jakob empezó a trabajar como profesor de matemáticas en Basilea en 1687, y Johann obtuvo la misma cátedra al morir su hermano en 1705. Fueron pendencieros, celosos y frecuentemente se enredaban en disputas, especialmente entre ellos. Sin embargo, los dos hicieron contribuciones importantes en varias áreas de las matemáticas. Con la ayuda del cálculo plantearon y resolvieron varios problemas de la mecánica como ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, Jakob Bernoulli resolvió la ecuación diferencial $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ en 1690 y en el mismo artículo aplicó el término "integral" en el sentido moderno. En 1694, Johann Bernoulli pudo resolver la ecuación $dy/dx = y/ax$, aun cuando todavía no se sabía que $d(\ln x) = dx/x$. Uno de los problemas a cuya solución colaboraron los dos hermanos, y que provocó bastantes fricciones entre ellos, fue el de la *braquistócrona* (la determinación de la curva de descenso más rápido). En el problema 17 de la sección 2.7 se verá que este problema da origen a la ecuación no lineal de primer orden

$$y[1 + (y')^2] = c,$$

en donde c es una constante. El problema de la braquistócrona también fue resuelto por Leibniz y Newton, además de los hermanos Bernoulli. Se dice, aunque quizá no sea cierto, que Newton supo del problema al final de una tarde de un fatigoso día en la Casa de Moneda y que lo resolvió esa noche, después de la cena. Publicó la solución de manera anónima, pero Johann Bernoulli, al verla, exclamó: "¡Ah!, conozco al león por su zarpa."

Daniel Bernoulli (1700-1782), hijo de Johann, emigró en su juventud a San Petersburgo para ingresar a la recientemente creada Academia de San Petersburgo, pero en 1733 volvió a Basilea como profesor de botánica y, ,más tarde, de física. El tema que más le atrajo fue esencialmente el de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Por ejemplo, su nombre es el que se asocia a la famosa ecuación de Bernoulli de la mecánica de fluidos. También fue el primero en descubrir las funciones que un siglo más tarde se conocieron como funciones de Bessel.

El matemático más grande del siglo XVIII, Leonhard Euler (1707-1783), creció cerca de Basilea y fue alumno de Johann Bernoulli. En 1727 siguió a su amigo Daniel Bernoulli a San Petersburgo. Durante el resto de su vida estuvo relacionado con la Academia de San Petersburgo (1727-1741 y 1766-1783) y con la Academia de Berlín (1741-1766). Euler fue el matemático más prolífico de todos los tiempos; sus trabajos reunidos llenan más de 70 grandes volúmenes. Su interés se extendió a todas las áreas de las matemáticas y muchos campos de aplicación. Aun cuando quedó ciego durante los últimos 17 años de su vida, su ritmo de trabajo no disminuyó hasta el mismo día de su fallecimiento. De interés particular para estas notas es su planteamiento de problemas de mecánica en lenguaje matemático y su desarrollo de métodos para resolver estos problemas matemáticos. Refiriéndose al trabajo de Euler en mecánica, Lagranje dijo que era "el primer gran trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento". Entre otras cosas, Euler identificó las condiciones para la exactitud de las ecuaciones diferenciales de primer orden (sección 2.8) en 1734-1735, desarrolló la teoría de los factores integrales (sección 2.8), en el mismo documento, y dio la solución general de las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes (secciones 3.1, 3.4, 3.5 y 4.2), en 1743. De 1750 a 1751 extendió estos últimos resulta-

dos a las ecuaciones no homogéneas. Comenzando alrededor de 1750, Euler aplicó con bastante frecuencia las series de potencias (capítulo 5) para resolver ecuaciones diferenciales. De 1786 a 1769 también propuso un procedimiento numérico (sección 8.1), hizo importantes contribuciones a las ecuaciones diferenciales parciales y dio el primer tratamiento sistemático del cálculo de variaciones.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) se convirtió en profesor de matemáticas en su Turín natal a los 19 años. En 1776 ocupó la cátedra de matemáticas dejada por Euler en la Academia de Berlín y en 1787 se desplazó a la Academia de París. Es más famoso por su monumental trabajo *Mécanique analytique*, publicado en 1788; un tratado elegante y extenso de la mecánica newtoniana. Con respecto a las ecuaciones diferenciales elementales, Lagrange demostró en 1762-1765 que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden es una combinación lineal de n soluciones independientes (secciones 3.2, 3.3 y 4.1). Más tarde, entre 1774 y 1775, dio un desarrollo completo del método de variación de parámetros (secciones 3.7 y 4.4). Lagrange también es conocido por su trabajo fundamental en ecuaciones diferenciales parciales y el cálculo de variaciones.

El nombre de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) a menudo se asocia con el de Lagrange, aunque la naturaleza de su trabajo matemático fue bastante diferente. Laplace utilizó las matemáticas como un medio para comprender la naturaleza, mientras que Lagrange se dedicó a las matemáticas por sí mismas. Laplace vivió su juventud en Normandía, aunque en 1768 se mudó a París, donde en poco tiempo dejo su sello en los círculos científicos, siendo elegido como miembro de la Academia de Ciencias en 1773. Destacó en el campo de la mecánica celeste; su obra más importante, *Traité de mécanique céleste*, fue publicada en cinco volúmenes entre 1799 y 1825. La ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

en donde los subíndices denotan derivadas parciales, se conoce como ecuación de Laplace o como ecuación del potencial. Es fundamental en muchas ramas de la física-matemática y Laplace la estudió ampliamente en relación con la atracción gravitacional. La transformada de Laplace (capítulo 6) también recibió ese nombre en honor a él, aunque su utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales no se reconoció hasta mucho después.

Alrededor de fines del siglo XVIII se habían descubierto muchos métodos elementales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. En el siglo XIX el interés se dirigió más hacia la investigación de cuestiones teóricas de existencia y unicidad, así como al desarrollo de métodos menos elementales, como los que se basan en métodos de series de potencias (ver el capítulo 5). También se empezaron a estudiar con intensidad las ecuaciones diferenciales parciales, en la medida en que se aclaraba su papel primordial en la física-matemática.

Las numerosas ecuaciones diferenciales que no podían ser resueltas por métodos analíticos originaron la investigación de métodos de aproximaciones numéricas (ver el capítulo 8). Ya por 1900 se habían ideado métodos de integración numérica bastante efectivos, aunque su aplicación estaba muy restringida por la necesidad de ejecutar los cálculos a mano o con equipo de cómputo bastante primitivo. Durante los últimos 50 años el desarrollo de computadoras cada vez más poderosas y versátiles ha ampliado mucho la variedad de problemas que es posible investigar con eficacia por medio de métodos numéricos. Durante el mismo periodo se han creado integradores numéricos en extremo refinados y poderosos disponibles en casi todos los centros científicos de cómputo. Las versiones adecuadas para

computadoras personales han puesto al alcance de los estudiantes la capacidad de resolución para un gran número de problemas significativos.

Otra característica de las ecuaciones diferenciales en el siglo XX ha sido la creación de métodos geométricos o topológicos, específicamente para resolver ecuaciones no lineales. El objetivo en este caso es comprender por lo menos el comportamiento cualitativo de las soluciones desde un punto de vista geométrico, en vez de analítico. En el capítulo 9 se presenta una introducción a estos métodos.

Durante los últimos quince o veinte años se han unificado estas dos tendencias. Las computadoras, y en especial las gráficas por computadora, han dado un nuevo impulso al estudio de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales. Se han descubierto fenómenos inesperados (sección 9.8), a los que se les ha dado el nombre de atractores extraños, caos, y fractales, los cuales se están estudiando intensamente y están dando origen a nuevas concepciones en diversas aplicaciones. Aunque las ecuaciones diferenciales constituyen un tema antiguo acerca del cual se sabe mucho, a fines del siglo XX siguen siendo una fuente de problemas fascinantes e importantes que no se han resuelto.

BIBLIOGRAFÍA

Tres paquetes de software muy adaptables para presentar gráficamente las soluciones de ecuaciones diferenciales son:

Koçak, H., *Differential and Difference Equations Through Computer Experiments* (2a. ed.) (New York/ Berlín: Springer-Verlag, 1989). Este es un amplio manual de disquetes incluidos que contiene el programa PHASER, que puede ejecutarse en varias máquinas IBM y compatibles.

Gollwitzer, H., *Phase Portraits* (Philadelphia: Drexel University, 1988). Este programa se corre en computadoras Macintosh y en la actualidad lo distribuye Intellimation Inc., Santa Barbara, California.

Newman, D., Carosso, K., y Freed, N., *Mathlib* (Claremont Cal.: Innosoft International, Inc.). Este software se ejecuta en máquinas VAX en las que se use VMS.

Para más información acerca de la historia de las matemáticas pueden consultarse libros como los que se listan a continuación. De los cuatro que se mencionan, el más amplio es el de Kline.

Bell, E. T., *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster).

Boyer, C. B. y U. C. Merzbach, *A History of Mathematics* (2a. ed.) (New York: Wiley).

Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics* (5a. ed.) (Troy, Missouri: Saunders).

Kline, M., *Mathematical Throught from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press).

En la siguiente obra también aparece un índice histórico útil:

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover).

En el mercado se encuentran varias antologías que incluyen material de fuentes originales, así como comentarios explicativos e históricos; por ejemplo:

Calinger, R., ed., *Classics of Mathematics* (Oak Park, Illinois: Moore Publishing Company

Newman, J. R., ed., *The World of Mathematics* (4 vols.)(New York: Simon & Schuster).

Por último, una fuente enciclopédica de información sobre la vida y obra de matemáticos del pasado es

Gillespie, C. C., ed., *Dictionary of Scientific Biography* (15 vols.) (New York: Scribner's).

Capítulo 2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

En este capítulo se estudian ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Sin embargo, para una función arbitraria f, no existe un método general para resolver esta ecuación en términos de funciones elementales. En lugar de ello, se describen varios métodos, cada uno de los cuales es aplicable a cierta subclase de ecuaciones. En otras secciones de este capítulo se abordan algunas de las aplicaciones importantes de las ecuaciones diferenciales de primer orden y algunas cuestiones teóricas relacionadas con la existencia y la unicidad de las soluciones.

2.1 Ecuaciones lineales

Se empieza con las ecuaciones de la forma

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

en donde f es una función dada de dos variables. Cualquier función diferencial $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación (1) para toda x en algún intervalo se llama solución, y el objetivo es determinar si existen funciones de este tipo y, en caso afirmativo, desarrollar métodos para encontrarlas.

En esta sección y en la siguiente se supondrá que la función $f(x, y)$ depende linealmente de la variable dependiente y. En este caso, la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{2}$$

y se denomina **ecuación lineal de primer orden**. Se supondrá que p y g son funciones dadas y que son continuas en algún intervalo $\alpha < x < \beta$. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \tag{3}$$

es una ecuación lineal particularmente simple en la que las funciones $p(x) = 1/2$ y $g(x) = 3/2$ son constantes. Recuerde que en la figura 1.1.2 del capítulo anterior se dio el campo direccional de la ecuación (3).

Ejemplo 1

Resolver la ecuación (3) y determinar el comportamiento de las soluciones para valores grandes de x. También, determinar la solución cuya gráfica contiene el punto (0, 2).

Para resolver la ecuación (3) se observa que si $y \neq 3$, entonces esa ecuación puede escribirse de nuevo como

$$\frac{dy/dx}{y-3} = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Como el primer miembro de la ecuación (4) es la derivada de $\ln|y-3|$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\ln|y-3| = -\frac{1}{2}.$$

Entonces, se concluye que

$$\ln|y-3| = -\frac{x}{2} + C,$$

en donde C es una constante arbitraria de integración. Por consiguiente, al tomar la exponencial de ambos miembros, se obtiene

$$|y-3| = e^C e^{-x/2},$$

o bien,

$$y - 3 = \pm e^C e^{-x/2},$$

y, por último,

$$y = 3 + ce^{-x/2}, \tag{5}$$

en donde $c = \pm e^C$ también es una constante arbitraria (diferente de cero). Observe que la solución constante $y = 3$ también está contenida en la expresión (5), si se permite que c tome el valor cero. En la figura 2.1.1 se muestran las gráficas de la ecuación (5) para varios valores de c. Nótese que poseen el carácter inferido con base en el campo direccional de la figura 1.1.2; por ejemplo, a partir de la ecuación (5) resulta evidente que $y \to 3$ cuando $x \to \infty$. Para un valor particular de c la gráfica correspondiente contiene el punto (0, 2). Para hallar este valor de c, en la ecuación (5) se sustituye $x = 0$ y $y = 2$ y se encuentra que $c = -1$. Por tanto,

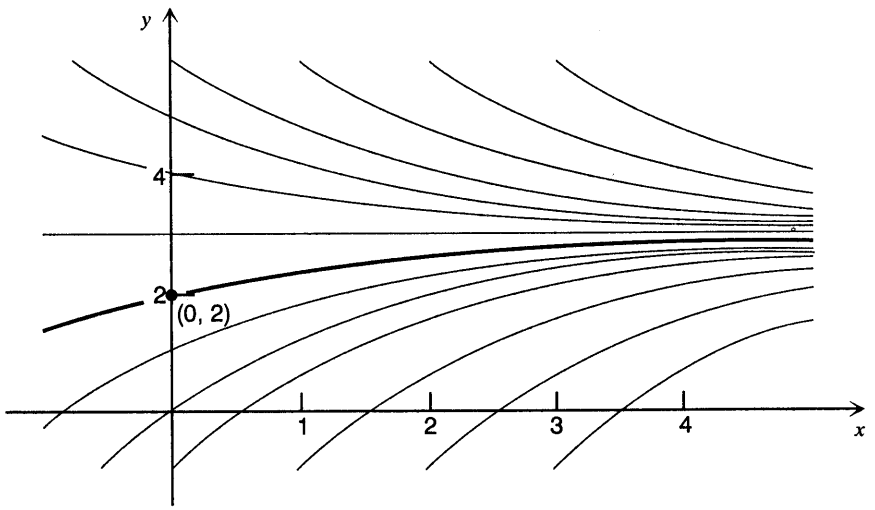


FIGURA 2.1.1. Soluciones de $y' + (1/2)y = 3/2$.

$$y = 3 - e^{-x/2} \tag{6}$$

es la solución cuya gráfica contiene al punto dado (0, 2). Esto se ilustra con la curva de trazo grueso en la figura 2.1.1.

Factores integrantes. Al volver a examinar la solución de la ecuación diferencial del ejemplo 1, es posible encontrar un indicio que conduzca a un método para resolver ecuaciones lineales de primer orden más generales. En primer lugar, la ecuación (5) se escribe en la forma

$$ye^{x/2} = 3e^{x/2} + c; \tag{7}$$

y luego, al derivar ambos miembros con respecto a x se obtiene

$$(y' + \tfrac{1}{2}y)e^{x/2} = \tfrac{3}{2}e^{x/2}, \tag{8}$$

lo que es equivalente a la ecuación original (3). Observe ahora que la ecuación (3) puede resolverse si se invierten los pasos precedentes. Es decir, si se multiplica primero la ecuación (3) por $e^{x/2}$, con lo que se obtiene la ecuación (8). Luego, note que el primer miembro de la ecuación (8) es la derivada de $ye^{x/2}$, de modo que la ecuación queda

$$(ye^{x/2})' = \tfrac{3}{2}e^{x/2}. \tag{9}$$

Por último, al integrar ambos miembros de la ecuación (9) se obtiene la ecuación (7) y, por tanto, la solución de la ecuación (5). En otras palabras, una manera de resolver la ecuación (3) es multiplicarla primero por la función $e^{x/2}$. Como esta multiplicación reduce la ecuación a una forma que es integrable de manera inmediata, la función $e^{x/2}$ se denomina **factor**

integrante (o de integración) de la ecuación (3). Por supuesto, para que este método sea eficaz debe ser posible calcular el factor integrante directamente a partir de la ecuación diferencial. A continuación, se aborda esta cuestión en el contexto de la ecuación más general (2).

El análisis anterior sugiere que una manera posible de resolver la ecuación lineal general de primer orden (2),

$$y' + p(x)y = g(x),$$

es multiplicar por un factor integrante adecuado y llevarla en consecuencia a una forma integrable. Para encontrar ese factor integrante primero se multiplica la ecuación (2) por una función $\mu(x)$, que por el momento no está determinada. Entonces, se tiene

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x). \tag{10}$$

El objetivo es elegir $\mu(x)$ de modo que el primer miembro de la ecuación (10) sea la derivada de alguna función. El término $\mu(x)y'$ sugiere que la función deseada podría ser el producto $\mu(x)y$. A fin de obtener la combinación $[\mu(x)y]' = \mu'(x)y + \mu(x)y'$ es necesario sumar y restar el término $\mu'(x)y$ en el primer miembro de la ecuación (10); al hacerlo y agrupar los términos de manera conveniente, se obtiene

$$[\mu'(x)y + \mu(x)y'] - [\mu'(x) - p(x)\mu(x)]y = \mu(x)g(x). \tag{11}$$

Ahora, si el segundo término del primer miembro de la ecuación (11) fuese cero, entonces esta ecuación tendrá la forma

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x), \tag{12}$$

y el primer miembro (por lo menos) sería fácilmente integrable. A fin de lograr lo anterior, debe elegirse μ de modo que

$$\mu'(x) - p(x)\mu(x) = 0. \tag{13}$$

Si, por el momento, se supone que μ es positiva, entonces la ecuación (13) puede escribirse como

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x),$$

o bien,

$$\frac{d}{dx} \ln \mu(x) = p(x). \tag{14}$$

Por tanto,

$$\ln \mu(x) = \int p(x)\, dx + k. \tag{15}$$

Al elegir la constante k como cero se obtiene la función más simple posible para μ, a saber

$$\mu(x) = \exp \int p(x)\, dx. \tag{16}$$

Observe que $\mu(x)$ es positiva para toda x, como se supuso.

Una vez que se ha encontrado la función μ, se regresa a la ecuación (2) y se multiplica por $\mu(x)$, obteniéndose así la ecuación (12). Al integrar ambos miembros de la ecuación (12) se obtiene

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)\,dx + c,$$

o bien,

$$y = \frac{\int \mu(x)g(x)\,dx + c}{\mu(x)}. \tag{17}$$

Como y representa cualquier solución de la ecuación (2), se concluye que *toda* solución de la ecuación (2) está incluida en la expresión del segundo miembro de la ecuación (17). Por consiguiente, esta expresión se conoce como **solución general** de la ecuación (2). Observe que para encontrar la solución dada por la ecuación (17) se requieren dos integraciones: una para obtener $\mu(x)$ a partir de la ecuación (16) y otra para determinar y a partir de la ecuación (17).

También, observe que antes de calcular el factor integrante $\mu(x)$ a partir de la ecuación (16), es necesario asegurarse de que la ecuación diferencial esté exactamente en la forma (2); específicamente, el coeficiente de y' debe ser uno. En caso contrario, la $p(x)$ usada para calcular μ será incorrecta. En segundo lugar, después de encontrar $\mu(x)$ y multiplicar la ecuación (2) por ella, es necesario tener la certeza de que los términos en los que aparecen y y y' son, en efecto la derivada $\mu(x)y$, como debe ser. Con lo anterior se obtiene una comprobación del cálculo de μ. Por supuesto, una vez que se ha encontrado la solución y, también puede verificarse sustituyéndola en la ecuación diferencial.

La interpretación geométrica de la ecuación (17) es una familia infinita de curvas, una para cada valor de c, de la misma manera en que las gráficas de la figura 2.1.1 representan las soluciones (5) de la ecuación (3). A menudo, a estas curvas se les da el nombre de **curvas integrales**. Algunas veces es importante elegir un elemento específico de la familia de curvas integrales. Lo anterior se lleva a cabo al identificar un punto particular (x_0, y_0) por el que se requiera que pase la gráfica de la solución. Este requisito suele expresarse como

$$y(x_0) = y_0, \tag{18}$$

y se denomina **condición inicial**. Una ecuación diferencial de primer orden, como la (1) o (2), junto con una condición inicial, como la (18), constituyen un **problema con valor inicial**.

Ejemplo 2 Determinar la solución del problema con valor inicial

$$y' + 2y = e^{-x}, \tag{19}$$

$$y(0) = 0.75. \tag{20}$$

En la figura 1.1.3 se muestra el campo direccional de la ecuación (19), de donde es posible deducir el perfil general de las curvas integrales. Para resolver la ecuación (19), observe que ésta es de la forma de la ecuación (2), con $p(x) = 2$ y $g(x) = e^{-x}$. Por tanto, el factor integrante es

$$\mu(x) = \exp \int 2\,dx = e^{2x},$$

y al multiplicar la ecuación (19) por esta cantidad, se obtiene

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{x}. \tag{21}$$

El primer miembro de la ecuación (21) es la derivada de $e^{2x}y$, de modo que esta ecuación puede escribirse como

$$(e^{2x}y)' = e^{x},$$

y por integración se concluye que

$$e^{2x}y = e^{x} + c,$$

en donde c es una constante arbitraria. Por lo tanto,

$$y = e^{-x} + ce^{-2x} \tag{22}$$

es la solución general de la ecuación (19). En la figura 2.1.2 se muestran algunas curvas integrales de la ecuación (19); observe que siguen el patrón que resulta evidente basándose en el campo direccional de la figura 1.1.3. Con más precisión, para x grande el segundo término del segundo miembro de la ecuación (22) es despreciable en comparación con el primer término; por tanto, las gráficas de todas las soluciones tienden a la gráfica de $y = \exp(-x)$ cuando $x \to \infty$.

Para satisfacer la condición inicial (20), se sustituyen $x = 0$ y $y = 0.75$ en la ecuación (22); esto da $c = -0.25$, de modo que la solución del problema con valor inicial dado es

$$y = e^{-x} - 0.25e^{-2x}. \tag{23}$$

En la figura 2.1.2 se muestra la gráfica de esta solución, por medio de la curva de trazo grueso.

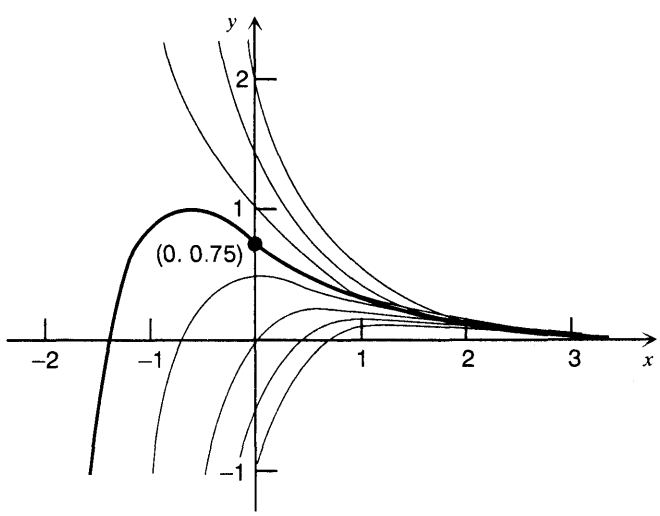


FIGURA 2.1.2 Curvas integrales de $y' + 2y = e^{-x}$.

Ejemplo 3 Determinar la solución del problema con valor inicial

$$y' - 2xy = x, \qquad y(0) = 0. \tag{24}$$

En la figura 2.1.3 se observa el campo direccional de esta ecuación diferencial. Para resolver la ecuación en primer lugar se encuentra el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(-\int 2x\,dx\right) = e^{-x^2}.$$

Luego, al multiplicar por $\mu(x)$, se obtiene

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2},$$

o bien,

$$(ye^{-x^2})' = xe^{-x^2}.$$

Por consiguiente,

$$ye^{-x^2} = \int xe^{-x^2}\,dx + c = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

y se concluye que

$$y = -\tfrac{1}{2} + ce^{x^2} \tag{25}$$

es la solución general de la ecuación diferencial dada. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 0$ es necesario elegir $c = 1/2$. De donde,

$$y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{x^2} \tag{26}$$

es la solución del problema con valor inicial (24). En la figura 2.1.4 se muestran algunas curvas integrales y la solución particular que pasa por el origen.

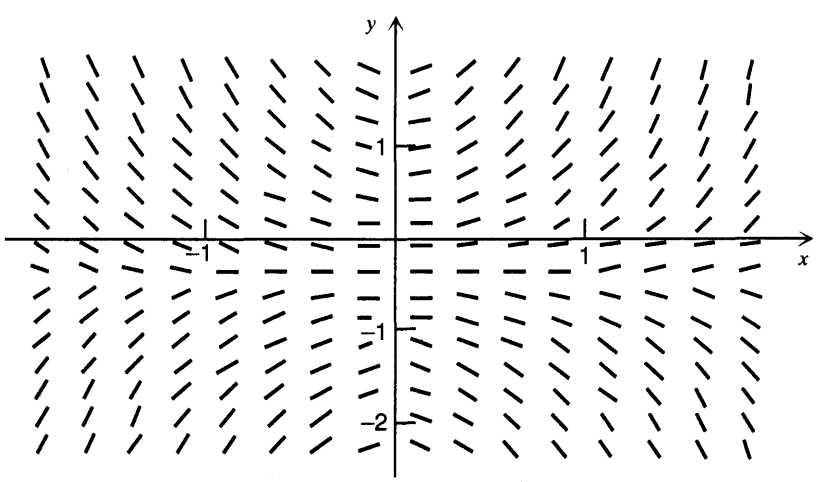


FIGURA 2.1.3 Campo direccional de $y' - 2xy = x$.

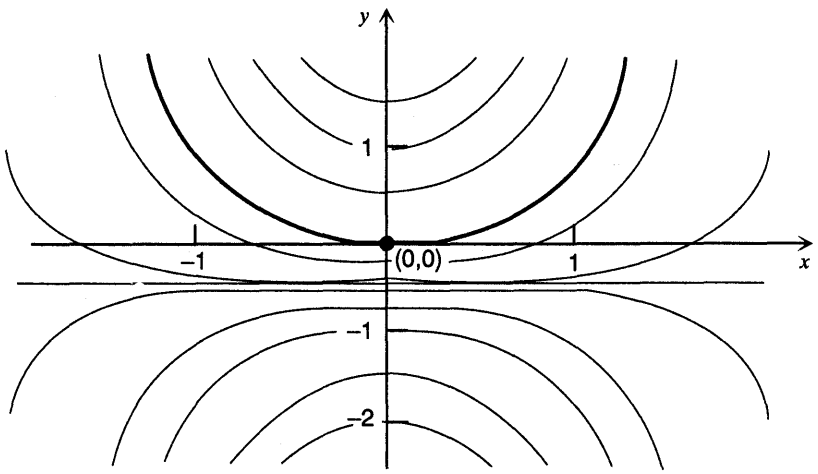


FIGURA 2.1.4 Curvas integrales de $y' - 2xy = x$.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y' + 3y = x + e^{-2x}$
2. $y' - 2y = x^2e^{2x}$
3. $y' + y = xe^{-x} + 1$
4. $y' + (1/x)y = 3\cos 2x, \quad x > 0$
5. $y' - y = 2e^x$
6. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad x > 0$
7. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
8. $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$

En cada uno de los problemas 9 a 16, encuentre la solución del problema con valor inicial dado.

9. $y' - y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1$
10. $y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(1) = 0$
11. $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad x > 0$
12. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0$
13. $y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 2$
14. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad y(\pi/2) = 1$
15. $x^3y' + 4x^2y = e^{-x}, \quad y(-1) = 0$
16. $xy' + (x + 1)y = x, \quad y(\ln 2) = 1$

En cada uno de los problemas 17 a 20, use una computadora para graficar el campo direccional. Obtenga una conclusión acerca del comportamiento de las soluciones cuando $x \to \infty$. Para comprobar la conclusión a la que llegó, resuelva la ecuación diferencial y después tome el límite cuando $x \to \infty$.

17. $y' + 3y = x + e^{-2x}$ (Problema 1)
18. $y' + y = xe^{-x} + 1$ (Problema 3)

19. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$ (Problema 6)
20. $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$ (Problema 8)
21. Encuentre la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}, \qquad y(1) = 0.$$

Sugerencia: Considere x como variable independiente, en vez de y.

22. a) Demuestre que $\phi(x) = e^{2x}$ es una solución de $y' - 2y = 0$ y que $y = c\phi(x)$ también es una solución de esta ecuación para cualquier valor de la constante c.
b) Demuestre que $\phi(x) = 1/x$ es una solución de $y' + y^2 = 0$, para $x > 0$, pero que $y = c\phi(x)$ no es una solución de esta ecuación, a menos de que $c = 0$ o $c = 1$. Observe que la ecuación del inciso b) es no lineal, mientras que la del inciso a) es lineal.
23. Demuestre que si $y = \phi(x)$ es una solución de $y' + p(x)y = 0$, entonces $y = c\phi(x)$ también es una solución para cualquier valor de la constante c.
24. Sea $y = y_1(x)$ una solución de

$$y' + p(x)y = 0, \tag{i}$$

y sea $y = y_2(x)$ una solución de

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{ii}$$

Demuestre que $y = y_1(x) + y_2(x)$ también es una solución de la ecuación (ii).

*25 **Variación de parámetros**. Considere el siguiente método para resolver la ecuación lineal general de primer orden:

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{i}$$

a) si $g(x)$ es idénticamente cero, demuestre que la solución es

$$y = A \exp\left[-\int p(x)\,dx\right], \tag{ii}$$

en donde A es una constante.
b) Si $g(x)$ no es idénticamente cero, suponga que la solución es de la forma

$$y = A(x) \exp\left[-\int p(x)\,dx\right], \tag{iii}$$

en donde ahora A es una función de x. Por sustitución de y en la ecuación diferencial dada, demuestre que $A(x)$ debe satisfacer la condición.

$$A'(x) = g(x) \exp\left[\int p(x)\,dx\right]. \tag{iv}$$

c) Determine $A(x)$ a partir de la ecuación (iv); luego sustituya $A(x)$ en la ecuación (iii) y determine y. Compruebe que la solución obtenida de esta manera concuerda con la de la ecuación (17) del texto. Esta técnica se conoce como método de **variación de parámetros** y se analiza con detalle en la sección 3.7 en relación con las ecuaciones lineales de segundo orden.

En cada uno de los problemas 26 y 27, aplique el método del problema 25 para resolver la ecuación diferencial dada.

*26. $y' - 2y = x^2e^{2x}$

*27. $y' + (1/x)y = 3\cos 2x, \quad x > 0$

2.2 Otras consideraciones acerca de las ecuaciones lineales

En la sección 2.1 se mostró cómo construir soluciones de problemas con valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante el uso de un factor integrante para cambiar la ecuación diferencial por una forma integrable. A continuación se abordarán algunas cuestiones de carácter más general, a saber,

1. ¿Un problema con valor inicial de este tipo siempre tiene una solución?
2. ¿Es posible que tenga más de una solución?
3. ¿Es válida la solución para toda x o sólo para algún intervalo restringido alrededor del punto inicial?

El siguiente teorema fundamental da respuesta a las preguntas anteriores.

Teorema 2.2.1 Si las funciones p y g son continuas en un intervalo abierto I: $\alpha < x < \beta$ que contenga el punto $x = x_0$, entonces existe una única función $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{1}$$

para toda x en I, y que también satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

en donde y_0 es un valor inicial arbitrario prescrito.

Observe que el teorema 2.2.1 establece que el problema con valor inicial dado *tiene* una solución y también que el problema tiene *sólo una* solución. En otras palabras, el teorema asegura la *existencia* y la *unicidad* de la solución del problema con valor inicial (1), (2). Además establece que la solución existe en toda la extensión de cualquier intervalo I que contenga al punto inicial x_0 en el que los coeficientes p y g sean continuos. Es decir, la solución puede ser discontinua o no existir sólo en los puntos en los que por lo menos una de p y g sea discontinua. A menudo estos puntos se identifican a primera vista.

La demostración de este teorema está parcialmente contenida en el análisis de la sección anterior que llevó a la fórmula

$$y = \frac{\int \mu(x)g(x)\,dx + c}{\mu(x)}, \tag{3}$$

en donde

$$\mu(x) = \exp \int p(x)\, dx. \tag{4}$$

En la sección 2.1 se demostró que si la ecuación (1) tiene una solución, entonces ésta debe estar dada por la ecuación (3). Al observar con más cuidado esa deducción, también puede concluir que, en efecto, la ecuación diferencial (1) debe tener una solución. Dado que p es continua para $\alpha < x < \beta$, se concluye que está definida en este intervalo y que es una función diferenciable diferente de cero. Al multiplicar la ecuación (1) por $\mu(x)$ se obtiene

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x). \tag{5}$$

En virtud de que μ y g son continuas, la función μg es integrable, y la ecuación (3) se deduce de la (5). Además, la integral de μg es diferenciable, de modo que y, dada por la ecuación (3), existe y es diferenciable en todo el intervalo $\alpha < x < \beta$. Al sustituir la expresión dada para y por la ecuación (3), en (1) o en (5), es fácil verificar que esta expresión satisface la ecuación diferencial en todo el intervalo $\alpha < x < \beta$. Por último, la condición inicial (2) determina de manera única la constante c, de modo que existe sólo una solución del problema con valor inicial, con lo que se completa la demostración. Dado que la ecuación (3) contiene todas la soluciones de la ecuación (1), esta expresión se llama solución general de la ecuación (1).

La ecuación (4) determina el factor de integración $\mu(x)$ solo hasta un factor multiplicativo que depende del límite inferior de integración. Si se elige este límite inferior como x_0, entonces

$$\mu(x) = \exp \int_{x_0}^{x} p(t)\, dt, \tag{6}$$

y se concluye que $\mu(x_0) = 1$. Al utilizar el factor integrante dado por la ecuación (6) y elegir el límite inferior de integración de la ecuación (3) también igual a x_0, se obtiene la solución general de la ecuación (1) en la forma

$$y = \frac{\int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)\, ds + c}{\mu(x)}.$$

Para satisfacer la condición inicial (2) debe elegirse $c = y_0$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial (1), (2) es

$$y = \frac{\int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)\, ds + y_0}{\mu(x)}, \tag{7}$$

en donde $\mu(x)$ está dada por la ecuación (6).

Ejemplo 1

Resolver el problema con valor inicial

$$xy' + 2y = 4x^2, \tag{8}$$

$$y(1) = 2, \tag{9}$$

y determinar el intervalo en el que la solución es válida.

Si se procede como en la sección 2.1, la ecuación (8) se reescribe como

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x \tag{10}$$

y se busca una solución en un intervalo que contenga a $x = 1$. Dado que los coeficientes en (10) son continuos excepto en $x = 0$, por el teorema 2.2.1 se concluye que el problema con valor inicial dado tiene una solución válida por lo menos en el intervalo $0 < x < \beta$. Para encontrar esta solución en primer lugar se calcula $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right) = e^{2\ln x} = x^2. \tag{11}$$

Al multiplicar la ecuación (10) por $\mu(x) = x^2$, se obtiene

$$x^2y' + 2xy = (x^2y)' = 4x^3.$$

y, por consiguiente,

$$x^2y = x^4 + c,$$

en donde c es una constante arbitraria. Se concluye que

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2} \tag{12}$$

es la solución general de la ecuación (8). En la figura 2.2.1 se tiene un esquema de las curvas integrales de (8) para varios valores de c. Para satisfacer la condición inicial (9) es necesario elegir $c = 1$; por tanto,

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}, \qquad x > 0 \tag{13}$$

es la solución del problema con valor inicial (8), (9). Esta solución se muestra en la figura 2.2.1 por medio de la curva de trazo grueso. Observe que la función $y = x^2 + (1/x^2)$, para $x < 0$, no forma parte de la solución de este problema con valor inicial.

La solución (13) se hace no acotada cuando $x \to 0$. Este hecho no es sorprendente, ya que $x = 0$ es un punto de discontinuidad del coeficiente de y en la ecuación diferencial (10). Sin embargo, si se cambia la condición inicial (9) por

$$y(1) = 1, \tag{14}$$

entonces por la ecuación (12) se concluye que $c = 0$. De donde, la solución del problema con valor inicial (8), (14) es

$$y = x^2, \tag{15}$$

que es acotada y continua incluso en la vecindad de $x = 0$. Lo anterior demuestra que el teorema 2.2.1 *no* asegura que la solución de un problema con valor inicial debe volverse discontinua siempre que p o g se hagan discontinuas: en lugar de ello, establece que la solución no puede hacerse discontinua en otros puntos.

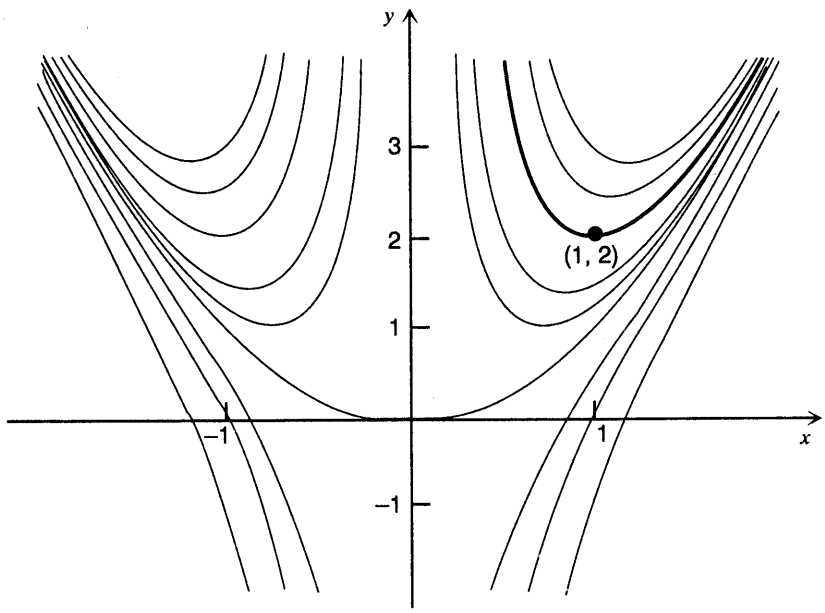


FIGURA 2.2.1 Curvas integrales de $xy' + 2y = 4x^2$.

El comportamiento posible de las soluciones de problemas con valor inicial de ecuaciones lineales de primer orden en la vecindad de un punto en el que p o g es discontinua es más variado que lo que puede sugerir el análisis anterior. Las posibilidades se examinan en cierta medida en los problemas del 13 al 16 y en el problema 16; en el capítulo 5 se presenta un tratamiento más detallado en relación con las ecuaciones lineales de segundo orden.

Ejemplo 2

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y' - 2xy = 1, \qquad y(0) = -0.5 \tag{16}$$

Para resolver la ecuación diferencial, se observa que $\mu(x) = e^{-x^2}$; por consiguiente,

$$e^{-x^2}(y' - 2xy) = e^{-x^2}$$

y

$$ye^{-x^2} = \int e^{-x^2}\,dx + c. \tag{17}$$

Para evaluar c es conveniente tomar el límite inferior de integración como el punto inicial $x = 0$. Luego, al resolver para y la ecuación (17), se obtiene

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + ce^{x^2}, \tag{18}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = -0.5$, debe elegirse $c = -0.5$; de donde,

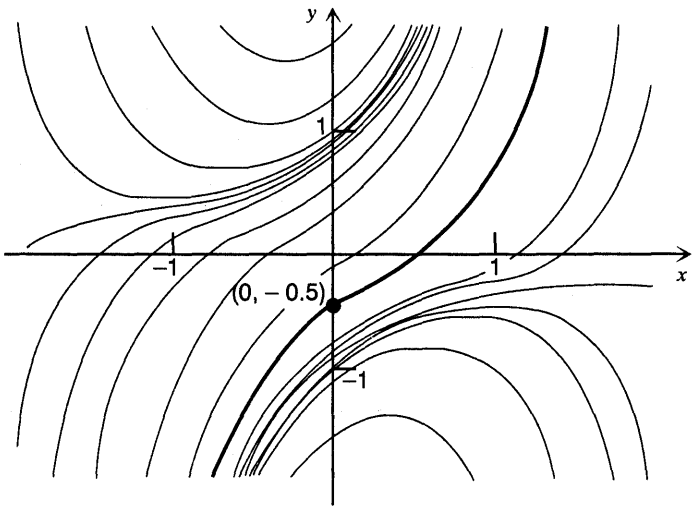


FIGURA 2.2.2 Curvas integrales de $y' - 2xy = 1$.

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt - 0.5e^{x^2} \tag{19}$$

es la solución del problema con valor inicial dado. En la figura 2.2.2 se muestran algunas de las curvas integrales y la solución particular que pasa por $(0, -0.5)$.

En la solución del ejemplo 2, la integral de $\exp(-x^2)$ no es expresable como una función elemental. Esto ilustra el hecho de que puede ser necesario dejar en forma de integral incluso la solución de un problema muy sencillo. Sin embargo, una expresión integral como la ecuación (19) puede ser un punto de partida para el cálculo numérico de la solución de un problema con valor inicial. Para un valor fijo de x, la integral de (19) es una *integral definida*, y su valor puede obtenerse en forma muy aproximada por la regla de Simpson o algún otro método de integración numérica. Al repetir la integración numérica para valores diferentes de x, es posible elaborar una tabla de valores, o construir una gráfica, de la solución y. También existen otros procedimientos numéricos en los que se utiliza la ecuación diferencial directamente para calcular valores aproximados de la solución, para un conjunto dado de valores de x; en el capítulo 8 se estudian algunos de estos métodos.

En el caso de la ecuación (19), también sucede que la función

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \tag{20}$$

llamada **función de error,** ya se ha tabulado con amplitud y a menudo se considera como una función conocida. Por tanto, en vez de la ecuación (19) es posible escribir

$$y = e^{x^2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) - 0.5\right]. \tag{21}$$

A fin de evaluar el segundo miembro de la ecuación (21) para un valor dado de x es posible consultar una tabla de valores de la función de error, o bien, apoyarse en un procedimiento numérico como se sugirió antes. En principio, trabajar con la función de error no es más difícil que trabajar con la función $\exp(x^2)$. La diferencia más importante es que muchas calculadoras tienen rutinas integradas para evaluar la función exponencial, mientras que no cuentan con rutinas semejantes para evaluar la función de error u otras funciones integrales que pudieran presentarse en la resolución de una ecuación diferencial.

Esta sección termina con un resumen de algunas de las propiedades más importantes de las ecuaciones lineales de primer orden y sus soluciones.

1. Existe una solución general, que contiene una constante arbitraria, que incluye todas las soluciones de la ecuación diferencial. Al elegir el valor adecuado para la constante arbitraria es posible seleccionar una solución particular que satisfaga una condición inicial dada.
2. Existe una fórmula para la solución; a saber, la ecuación (3) o la (7). Además, aunque comprende dos integraciones, la fórmula es explícita para la solución $y = \phi(x)$, en vez de ser una ecuación que defina ϕ.
3. Los puntos posibles de discontinuidad, o singularidades, de la solución pueden identificarse (sin resolver el problema) simplemente al hallar los puntos de discontinuidad de los coeficientes. Por tanto, si los coeficientes son continuos para toda x, entonces la solución también existe y es continua para toda x.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, halle la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y' + (1/x)y = \operatorname{sen} x, \qquad x > 0$
2. $x^2y' + 3xy = (\operatorname{sen} x)/x, \qquad x < 0$
3. $y' + (\tan x)y = x \operatorname{sen} 2x, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$
4. $xy' + 2y = e^x, \qquad x > 0$

En cada uno de los problemas del 5 al 12, determine la solución del problema con valor inicial dado. Escriba el intervalo en que la solución es válida.

5. $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \qquad y(1) = \frac{1}{2}$
6. $xy' + y = e^x, \qquad y(1) = 1$
7. $y' + (\cot x)y = 2 \csc x, \qquad y(\pi/2) = 1$
8. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \qquad y(\pi) = 1/\pi$
9. $y' + (\cot x)y = 4 \operatorname{sen} x, \qquad y(-\pi/2) = 0$
10. $x(2 + x)y' + 2(1 + x)y = 1 + 3x^2, \qquad y(-1) = 1$
11. $y' + y = 1/(1 + x^2), \qquad y(0) = 0$
12. $(1 - x^2)y' - xy = x(1 - x^2), \qquad y(0) = 2$

Cada una de las ecuaciones de los problemas del 13 al 16 tiene por lo menos un coeficiente discontinuo en $x = 0$. Resuelva cada ecuación para $x > 0$ y describa el comportamiento de la solución cuando $x \to 0$, para varios valores de la constante de integración. Trace varios miembros de la familia de curvas integrales.

13. $y' + (2/x)y = 1/x^2$
14. $y' - (1/x)y = x$
15. $y' - (1/x)y = x^{1/2}$
16. $y' + (1/x)y = (\cos x)/x$

En cada uno de los problemas 17 a 20, determine (sin resolver el problema) un intervalo en el que se tenga la certeza de que la solución del problema con valor inicial dado no existe.

17. $(x - 3)y' + (\ln x)y = 2x, \quad y(1) = 2$
18. $y' + (\tan x)y = \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$
19. $(4 - x^2)y' + 2xy = 3x^2, \quad y(-3) = 1$
20. $(\ln x)y' + y = \cot x, \quad y(2) = 3$

21. Para el problema con valor inicial $y' - y = 2, y(0) = y_0$, determine de qué manera el valor límite de y cuando $x \to \infty$ depende de y_0.
22. Aplique la regla de Simpson (o cualquier otro procedimiento de integración numérica que el lector conozca) para evaluar y a partir de la ecuación (19) para $x = 1$. Asegúrese de que la respuesta es correcta por lo menos hasta tres cifras decimales.
23. a) Demuestre que la solución de $y' - 2xy = 1, y(0) = y_0$ (ver el ejemplo 2) puede escribirse en la forma

$$y = e^{x^2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x) + y_0\right].$$

b) Con base en la figura 2.2.2 parece que cuando $x \to \infty$ la solución crece sin límite en la dirección positiva para algunos valores de y_0, y en la dirección negativa para otros valores de y_0. También se sabe que $\operatorname{erf}(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$. Aplique este hecho para hallar el valor crítico de y_0 que separa las soluciones que crecen positivamente de aquellas que lo hacen negativamente.

24. a) Demuestre que la solución (3) de la ecuación lineal general (1) puede escribirse en la forma

$$y = cy_1(x) + y_2(x), \tag{i}$$

en donde c es una constante arbitraria. Identificar las funciones y_1 y y_2.

b) Demuestre que y_1 es una solución de la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = 0, \tag{ii}$$

correspondiente a $g(x) = 0$.

c) Demuestre que y_2 es una solución de la ecuación lineal completa (1). Después se verá (por ejemplo, en la sección 3.6) que las soluciones de las ecuaciones lineales de orden superior tienen un patrón semejante al de la ecuación (i).

25. Demuestre que si a y λ son constantes positivas y b es cualquier número real, entonces toda solución de la ecuación

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

tiene la propiedad de que $y \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Sugerencia: Considere por separado los casos $a = \lambda$ y $a \neq \lambda$.

26. **Coeficientes discontinuos**. Algunas veces se presentan ecuaciones diferenciales lineales en las que una o las dos funciones p y g tienen discontinuidades por salto. Si x_0 es uno de esos puntos de discontinuidad, entonces es necesario resolver la ecuación por separado para $x < x_0$ y para $x > x_0$. Después, las dos soluciones se acoplan de modo que y sea continua en x_0; esto se logra al hacer una elección adecuada de las constantes arbitrarias. Esta situación se ilustra mediante los dos ejemplos siguientes. Observe en cada caso que también es imposible hacer continua y' en x_0.

a) Resuelva el problema con valor inicial

$$y' + 2y = g(x), \qquad y(0) = 0$$

en donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

b) Resuelva el problema con valor inicial

$$y' + p(x)y = 0, \qquad y(0) = 1$$

en donde

$$p(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

***Ecuaciones de Bernoulli.** Algunas veces es posible resolver una ecuación no lineal al realizar un cambio de la variable dependiente que la convierta en una ecuación lineal. La clase más importante de estas ecuaciones es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de Bernoulli, en honor de Jakob Bernoulli. Los problemas 27 a 31 tratan de las ecuaciones de este tipo.

27. a) Resuelva la ecuación de Bernoulli cuando $n = 0$; cuando $n = 1$.
    b) Demuestre que si $n \neq 0$, entonces la sustitución $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal. Este método de resolución fue descubierto por Leibniz en 1696.

En cada uno de los problemas 28 a 31, la ecuación dada es una de Bernoulli. En cada caso, resuélvala aplicando la sustitución mencionada en el problema 27 b).

28. $x^2y' + 2xy - y^3 = 0, \qquad x > 0$
29. $y' = ry - ky^2$, $r > 0$ y $k > 0$. Esta ecuación es importante en la dinámica de las poblaciones y se analiza con detalle en la sección 2.6.
30. $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$. Esta ecuación se presenta en el estudio de la estabilidad del flujo de fluidos.
31. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y - y^3$, en donde Γ y T son constantes. Esta ecuación también se presenta en el estudio de la estabilidad del flujo de fluidos.

2.3 Ecuaciones separables

En este estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

a continuación se tratan las ecuaciones que pueden ser no lineales, es decir, ecuaciones en las que f depende de una manera no lineal de la variable dependiente y. A menudo es conveniente reescribir la ecuación (1) en la forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Siempre es posible hacer lo anterior estableciendo que $M(x, y) = -f(x, y)$ y $N(x, y) = 1$, pero pueden existir otras maneras. En caso de que M sea una función sólo de x y N sea una función sólo de y, entonces (2) queda

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Se dice que una ecuación de ese tipo es **separable**, porque si se escribe en la forma diferencial

$$M(x)\,dx = -N(y)\,dy, \tag{4}$$

entonces cada miembro de la ecuación depende solamente de una de las variables.

Ejemplo 1 Demostrar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \tag{5}$$

es separable y, a continuación, encontrar una ecuación para sus curvas integrales.

Si la ecuación (5) se escribe como

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{6}$$

entonces tiene la forma (3) y, por consiguiente, es separable. En seguida, observe que el primer término de la ecuación (6) es la derivada de $-x^3/3$ y que el segundo término, por medio de la regla de la cadena, es la derivada con respecto a x de $y - y^3/3$. Por tanto, la ecuación (6) puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

o bien,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, \tag{7}$$

en donde c es una constante arbitraria, es una ecuación para las curvas integrales de la ecuación (5). En la figura 2.3.1 se muestran el campo direccional y varias curvas integrales. Es posible hallar una ecuación de la curva integral que pasa por un punto particular (x_0, y_0) al sustituir x y y por x_0 y y_0, respectivamente, en la ecuación (7) y determinar el valor correspondiente de c. Cualquier función diferenciable $y = \phi(x)$ que satisfaga la ecuación (7) es una solución de la ecuación (5).

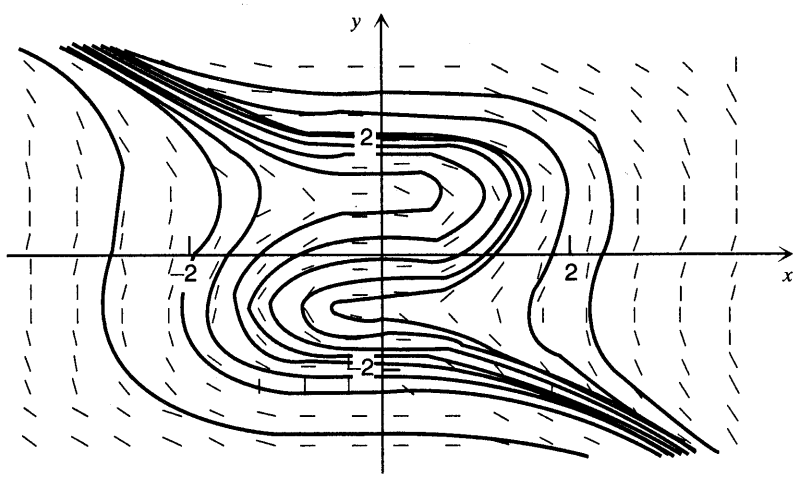


FIGURA 2.3.1 Campo direccional y curvas integrales de $y' = x^2/(1 - y^2)$.

Para cualquier ecuación separable es posible seguir en esencia el mismo procedimiento. Si se regresa a la ecuación (3), sea H_1 y H_2 funciones cualesquiera tales que

$$H_1'(x) = M(x), \qquad H_2'(y) = N(y); \tag{8}$$

entonces (3) queda

$$H_1'(x) + H_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{9}$$

Según la regla de la cadena,

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2(y). \tag{10}$$

Por consiguiente, (9) se transforma en

$$H_1'(x) + \frac{d}{dx}H_2(y) = 0,$$

o bien,

$$\frac{d}{dx}[H_1(x) + H_2(y)] = 0. \tag{11}$$

Al integrar la ecuación (11) se obtiene

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{12}$$

en donde c es una constante arbitraria. Cualquier función diferenciable $y = \phi(x)$ que satisfaga la ecuación (12) es una solución de la ecuación (3); en otras palabras, (12) define la

solución implícita, en vez de explícitamente. Las funciones H_1 y H_2 son antiderivadas de M y N, respectivamente. En la práctica, la ecuación (12) se obtiene casi siempre a partir de (4) al integrar el primer miembro con respecto a x y el segundo con respecto a y.

Si, además de la ecuación diferencial, se prescribe una condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{13}$$

entonces la solución de (3) que satisface esta condición se obtiene al hacer $x = x_0$ y $y = y_0$ en la (12). Con lo anterior se obtiene

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \tag{14}$$

Al sustituir este valor de c en (12) y al observar que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(t)\,dt, \qquad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(t)\,dt,$$

se obtiene

$$\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(t)\,dt = 0. \tag{15}$$

La ecuación (15) es una representación implícita de la solución de la ecuación diferencial (3) que también satisface la condición inicial (13). Es necesario tener presente que la determinación de una fórmula explícita para la solución requiere que en (15) se despeje y como una función de x; esto puede presentar enormes dificultades.

Ejemplo 2 Resolver el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \qquad y(0) = -1. \tag{16}$$

La ecuación diferencial puede escribirse como

$$2(y - 1)\,dy = (3x^2 + 4x + 2)\,dx.$$

Al integrar el primer miembro con respecto a y y el segundo con respecto a x da

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + x, \tag{17}$$

en donde c es una constante arbitraria. Para determinar la solución que satisface la condición inicial prescrita, en la ecuación (17) se sustituyen $x = 0$ y $y = -1$, con lo que se obtiene $c = 3$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial está dada implícitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \tag{18}$$

A fin de obtener la solución de manera explícita, es necesario despejar y en la ecuación (18), en términos de x. En este caso, es fácil, ya que la ecuación (18) es cuadrática en y, por lo que se obtiene

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \tag{19}$$

La ecuación (19) da dos soluciones de la ecuación diferencia, sin embargo, sólo una de ellas satisface la condición inicial dada. Ésta es la solución correspondiente al signo negativo en (19), de modo que por último se obtiene

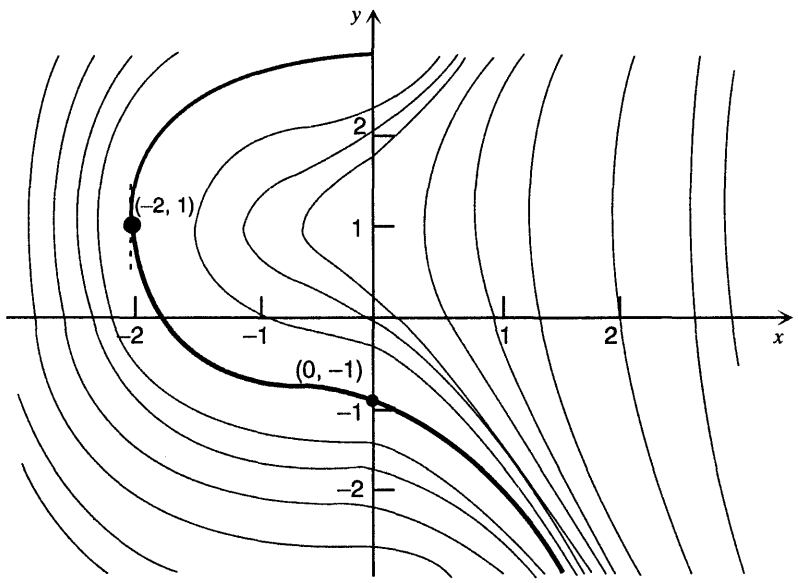


FIGURA 2.3.2 Curvas integrales de $y' = (3x^2 + 4x + 2)/2(y - 1)$.

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \tag{20}$$

como la solución del problema con valor inicial (16). Observe que si por error se elige el signo positivo en (19), entonces se obtiene la solución de la misma ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(0) = 3$. Finalmente, para determinar el intervalo en que la solución (20) es válida, debe hallarse el intervalo en el que el radicando es positivo. El único cero real de esta expresión es $x = -2$, por lo que el intervalo deseado es $x > -2$. En la figura 2.3.2 se muestran la solución del problema con valor inicial y algunas otras curvas integrales de la ecuación diferencial. Observe que la frontera del intervalo de validez de la solución (20) está determinada por el punto (–2, 1), en el que la recta tangente es vertical.

Ejemplo 3

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}, \qquad y(0) = 1. \tag{21}$$

Primero se escribe la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{1 + 2y^2}{y}\, dy = \cos x\, dx. \tag{22}$$

Luego, al integrar el primer miembro con respecto a y y el segundo con respecto a x, se obtiene

$$\ln |y| + y^2 = \operatorname{sen} x + c. \tag{23}$$

Para satisfacer la condición inicial se sustituyen $x = 0$ y $y = 1$ en la ecuación (23); así se obtiene $c = 1$. De donde, la solución del problema con valor inicial (21) queda dada implícitamente por

$$\ln |y| + y^2 = \operatorname{sen} x + 1. \tag{24}$$

Ya que en la (24) no se despeja con facilidad y como función de x, el análisis ulterior de este problema se vuelve más delicado. Un hecho bastante evidente es que ninguna solución corta el eje x. Para ver esto, observe que el primer miembro de la ecuación (22) se vuelve infinito si $y = 0$; sin embargo, el segundo miembro jamás es no acotado, de modo que ningún punto del eje x satisface la ecuación (24). Por tanto, se concluye que para la solución de las ecuaciones (21) siempre $y > 0$. Por consiguiente, para este problema pueden eliminarse las barras de valor absoluto en la ecuación (24). También es posible demostrar que el intervalo de definición de la solución del problema con valor inicial (21) es todo el eje x. En el problema 23 se indica cómo hacerlo. En la figura 2.3.3 se muestran algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, incluyendo la solución del problema con valor inicial (21).

En el ejemplo 2 no fue difícil despejar y explícitamente como función de x y determinar el intervalo exacto en que la solución existe. Sin embargo, esta situación es excepcional, y a menudo será necesario dejar la solución en forma implícita, como en los ejemplos 1 y 3. Por tanto, en los problemas de esta y de otras secciones en los que aparezcan ecuaciones no lineales, la expresión "resolver la siguiente ecuación diferencial" significa hallar la solución explícitamente, en caso de ser conveniente, de lo contrario, hallar una fórmula implícita para la solución.

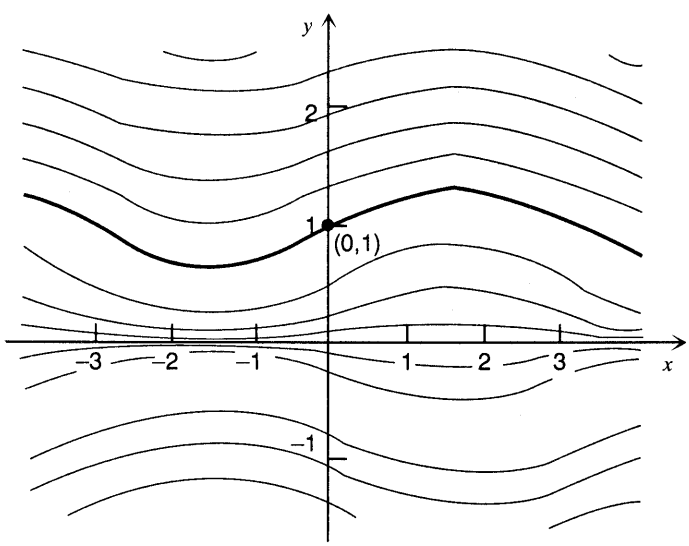


FIGURA 2.3.3 Curvas integrales de $y' = (y \cos x)/(1 + 2y^2)$.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1 + x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

Para cada uno de los problemas 9 a 16, encuentre la solución del problema con valor inicial dado en forma explícita y determine (por lo menos aproximadamente) el intervalo en que está definida.

9. $x\,dx + ye^{-x}\,dy = 0, \quad y(0) = 1$
10. $dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$
11. $y' = 2x/(y + x^2y), \quad y(0) = -2$
12. $y' = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$
13. $y' = 2x/(1 + 2y), \quad y(2) = 0$
14. $y' = x(x^2 + 1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$
15. $\operatorname{sen} 2x\,dx + \cos 3y\,dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$
16. $y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \quad y(0) = 0$

17. Resuelva el problema con valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \qquad y(0) = 1$$

y determinar el intervalo en que la solución es válida.
Sugerencia: Para encontrar el intervalo de definición, busque los puntos en los que $dx/dy = 0$.

18. Resuelva el problema con valor inicial

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \qquad y(1) = 0$$

y determine el intervalo en que la solución es válida.
Sugerencia: Para encontrar el intervalo de definición, busque los puntos en los que $dx/dy = 0$.

19. Resuelva la ecuación

$$y^2 = (1 - x^2)^{1/2}\,dy = \operatorname{arcsen} x\,dx$$

en el intervalo $-1 < x < 1$.

20. Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + b}{cx + d},$$

en donde a, b, c y d son constantes.

21. Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

en donde a, b, c y d son constantes.

*22 Demuestre que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}$$

no es separable pero que, si se reemplaza la variable y por una nueva variable v definida por $v = y/x$, entonces la ecuación es separable en x y v. Encuentre de esta manera la solución de la ecuación dada. Ver la sección 2.9 para un análisis más detallado de este método.

*23 Considere de nuevo el problema con valor inicial (21) del texto. Denote mediante $f(x, y)$ el segundo miembro de la ecuación diferencial y observe que

$$|f(x, y)| = \left|\frac{y}{1 + 2y^2}\right| |\cos x|.$$

a) Mediante la determinación de los valores máximo y mínimo de $y/(1 + 2y^2)$, demuestre que

$$\left|\frac{y}{1 + 2y^2}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

para toda y y, por tanto, que $|f(x, y)| \leq 1/2\sqrt{2}$ para toda x y y.
b) Si $y = \phi(x)$ es la solución del problema con valor inicial (21), aplique el resultado del inciso a) para demostrar que $|\phi(x) - 1| \leq |x|/2\sqrt{2}$ para toda x. De donde, se concluye que el intervalo de definición de la solución ϕ es $-\infty < x < \infty$.

2.4 Diferencias entre las ecuaciones lineales y las no lineales

Al estudiar el problema con valor inicial

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

las cuestiones fundamentales a considerar son si existe una solución, si ésta es única, sobre qué intervalo está definida y cómo obtener una fórmula útil para esa solución. Si la ecuación diferencial (1) es lineal, entonces existe una fórmula general para la solución y, con base en ella, en las secciones 2.1 y 2.2 se dio respuesta, con relativa facilidad, a las cuestiones antes indicadas. Además, para las ecuaciones lineales existe una solución general (que contiene una constante arbitraria) que incluye todas las soluciones y los puntos posibles de discontinuidad de la solución pueden identificarse mediante la simple localización de los puntos de discontinuidad de los coeficientes. Sin embargo, para las ecuaciones no lineales no existe fórmula correspondiente, de modo que es más difícil establecer propiedades generales semejantes de las soluciones. En esta sección se investigan algunas de las diferencias entre las ecuaciones lineales y las no lineales.

Existencia y unicidad. El siguiente teorema de existencia y unicidad es análogo al teorema 2.2.1 para las ecuaciones lineales. Sin embargo, su demostración es bastante más complicada y se pospone hasta la sección 2.11.

Teorema 2.4.1 Sean las funciones f y $\partial f/\partial y$ continuas en algún rectángulo $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ que contiene el punto (x_0, y_0). Entonces, en algún intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ contenido en $\alpha < x < \beta$, existe una solución única $y = \phi(x)$ del problema con valor inicial (1), (2)

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Las condiciones que se dan en el teorema 2.4.1 son suficientes para garantizar la existencia de una solución única del problema con valor inicial (1), (2) en algún intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$. Sin embargo, la determinación de un valor h puede ser difícil. Incluso si f no satisface las hipótesis del teorema, todavía es posible que pueda existir una solución única. De hecho, la conclusión del teorema sigue siendo válida si se reemplaza la hipótesis acerca de la continuidad de $\partial f/\partial y$ por ciertas condiciones más débiles. Además, puede establecerse la existencia de una solución (pero no su unicidad) sólo con base en la continuidad de f. A pesar de lo anterior, la forma de teorema que acaba de darse es satisfactoria para casi todos los propósitos.

Mediante ejemplos es posible hacer ver que para obtener el resultado que se enuncia en el teorema algunas condiciones sobre f son esenciales. De este modo, en el siguiente ejemplo se hace ver que el problema con valor inicial (1), (2) podría tener más de una solución en caso de que se violen las hipótesis del teorema 2.4.1.

Ejemplo 1

Resolver el problema con valor inicial

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{3}$$

para $x \geq 0$.

Este problema se resuelve con facilidad ya que la ecuación diferencial es separable. Por tanto, se tiene

$$y^{-1/3}dy = dx,$$

de modo que

$$\tfrac{3}{2}y^{2/3} = x + c$$

y

$$y = [\tfrac{2}{3}(x + c)]^{3/2}.$$

La condición inicial se satisface si $c = 0$, por lo que

$$y = \phi_1(x) = (\tfrac{2}{3}x)^{3/2}, \qquad x \geq 0 \tag{4}$$

satisface ambas ecuaciones (3). Por otra parte, la función

$$y = \phi_2(x) = -(\tfrac{2}{3}x)^{3/2}, \qquad x \geq 0 \tag{5}$$

también es una solución del problema con valor inicial dado. Es más, la función

$$y = \psi(x) = 0, \qquad x \geq 0 \tag{6}$$

todavía es otra solución. De hecho, no es difícil demostrar que, para un positivo x_0 arbitrario, las funciones

$$y = \chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq x < x_0 \\ \pm[\tfrac{2}{3}(x - x_0)]^{3/2}, & \text{if } x \geq x_0 \end{cases} \tag{7}$$

son continuas, diferenciables (en particular en $x = x_0$) y soluciones del problema con valor inicial (3). Por tanto, este problema tiene una familia infinita de soluciones: ver la figura 2.4.1, en donde se muestran unas cuantas de estas soluciones.

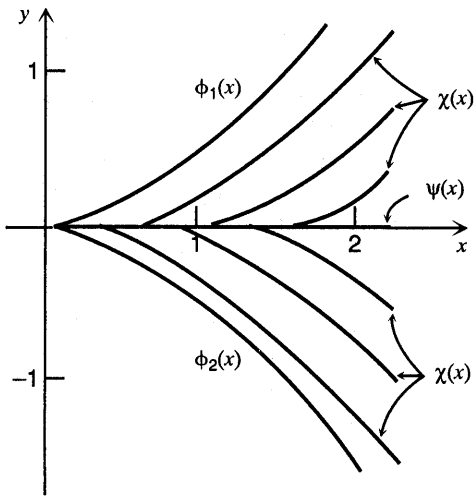


FIGURA 2.4.1 Varias soluciones del problema con valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$.

La no unicidad de las soluciones del problema (3) no contradice al teorema de existencia y unicidad, ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^{1/3}) = \frac{1}{3} y^{-2/3},$$

y esta función no es continua, incluso ni está definida, en cualquier punto en donde $y = 0$. De donde, el teorema no es aplicable en cualquier región que contenga parte del eje x. Sin embargo, si (x_0, y_0) es cualquier punto que no sea del eje x, entonces existe una solución única de la ecuación diferencial $y' = y^{1/3}$ que pasa por (x_0, y_0).

Intervalo de definición. La solución de la ecuación lineal

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{8}$$

sujeta a la condición inicial (2) existe a lo largo de cualquier intervalo alrededor de $x = x_0$ en el que las funciones p y g sean continuas. Por otra parte, para un problema no lineal con valor inicial puede ser difícil determinar el intervalo en el que existe una solución. Este hecho se ilustra con algunos de los ejemplos de la sección 2.3. En realidad, la solución $y = \phi(x)$ existe siempre que el punto $[x, \phi(x)]$ permanezca dentro de la región en la que se cumplen las hipótesis del teorema 2.4.1; sin embargo, como $\phi(x)$ en general no se conoce, puede ser imposible localizar el punto $[x, \phi(x)]$ con respecto a esta región. En todo caso, el intervalo en el que existe una solución puede no estar relacionado en forma sencilla con la función f de la ecuación (1). Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Resolver el problema con valor inicial

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1, \tag{9}$$

y determinar el intervalo en el que existe la solución.

El teorema 2.4.1 garantiza que este problema tiene una solución única, ya que $f(x, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en todo punto. Para encontrar la solución, primero se escribe la ecuación diferencial en la forma

$$y^{-2}\,dy = dx \tag{10}$$

Luego

$$-y^{-1} = x + c$$

y

$$y = -\frac{1}{x + c}. \tag{11}$$

Para satisfacer la condición inicial debe elegirse $c = -1$, de modo que

$$y = \frac{1}{1 - x} \tag{12}$$

es la solución del problema con valor inicial dado. Es evidente que la solución se vuelve no acotada cuando $x \to 1$; por consiguiente, la solución existe sólo en el intervalo $-\infty < x < 1$. Sin embargo, la ecuación diferencial por sí sola no indica que el punto $x = 1$ sea de alguna manera notable. Es más, si se reemplaza la condición inicial por

$$y(0) = y_0, \tag{13}$$

la constante c de la (11) debe elegirse como $c = -1/y_0$, y se concluye que

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 x} \tag{14}$$

es la solución del problema con valor inicial con la condición inicial (13). Obsérvese que la solución (14) se vuelve no acotada cuando $x \to 1/y_0$, de modo que el intervalo de existencia de la solución es $-\infty < x < 1/y_0$ si $y_0 > 0$, y es $1/y_0 < x < \infty$ si $y_0 < 0$. Este ejemplo ilustra una característica que provoca dificultades de los problemas con valor inicial para ecuaciones no lineales; a saber, las singularidades de la solución pueden depender de manera esencial de las condiciones iniciales, así como de la ecuación diferencial.

Solución general. Otra manera en la que difieren las ecuaciones lineales y las no lineales es con respecto al concepto de solución general. Para una ecuación lineal de primer orden es posible obtener una solución que contenga una constante arbitraria, a partir de la cual se obtengan todas las soluciones posibles al especificar valores para esta constante. Para las ecuaciones no lineales éste puede no ser el caso; aun cuando pueda hallarse una solución que contenga una constante arbitraria, es posible que no puedan obtenerse otras soluciones al dar valores a esta constante. Por ejemplo, para la ecuación diferencial $y' = y^2$ del ejemplo 2, la expresión de la (11) contiene una constante arbitraria, pero no incluye todas las soluciones de la ecuación diferencial. Para hacer ver lo anterior, obsérvese que, evidentemente la función $y = 0$ para toda x es una solución de la ecuación diferencial, pero no puede obtenerse de la (11) al asignar un valor a c. En este ejemplo será factible anticipar que algo como esto podría ocurrir debido a que para reescribir la ecuación diferencial original en la

forma (10) debe requerirse que y sea diferente de cero. Sin embargo, la existencia de soluciones "adicionales" no es extraña para las ecuaciones no lineales; en el problema 14 se da un ejemplo menos obvio. Por tanto, se usará la expresión "solución general" solamente al analizar las ecuaciones lineales.

Soluciones implícitas. Recuérdese una vez más que para una ecuación lineal de primer orden existe una fórmula explícita [ecuación (17) de la sección 2.1] para la solución de $y = \phi(x)$. En la medida en que es posible encontrar las antiderivadas necesarias, puede determinarse el valor de la solución en cualquier punto simplemente al sustituir el valor adecuado de x en la fórmula. La situación para las ecuaciones no lineales es mucho menos satisfactoria. Por lo general, lo mejor que puede esperarse es hallar una ecuación

$$F(x, y) = 0 \tag{15}$$

en la que intervengan x y y que sea satisfecha por la solución $y = \phi(x)$. Incluso sólo se puede hacer esto para ecuaciones diferenciales de ciertos tipos particulares, de las cuales las más importantes son las ecuaciones separables. La ecuación (15) se conoce como integral, o primera integral, de la ecuación diferencial y (como ya se hizo notar) su gráfica es una curva integral, o quizá una familia de curvas integrales. La ecuación (15), en caso de que pueda hallarse, define la solución implícitamente; es decir, para cada valor de x es necesario resolver la (15) para hallar el valor correspondiente de y. Si la (15) es suficientemente sencilla, puede que sea posible despejar y por medios analíticos y, en consecuencia, obtener una fórmula explícita para la solución. Sin embargo, con mayor frecuencia esto no es posible y habrá que apoyarse en un cálculo numérico para determinar el valor de y, para un valor dado de x. Entonces, el cálculo tendrá que repetirse para cada valor diferente de x. Una vez que se han calculado varias parejas de valores de x y y, a menudo es de utilidad situarlas en un plano coordenado y, a continuación, trazar un esquema de la curva integral que pasa por ellas. En caso de ser posible, el estudiante debiera usar una computadora para que realice ese trabajo.

Los ejemplos de esta sección y el ejemplo 2 de la sección 2.3 son problemas no lineales en los que es posible resolverlos con el fin de hallar una fórmula explícita para la solución $y = \phi(x)$. Por otra parte, los ejemplos 1 y 3 de la sección 2.3 son casos en los que es mejor dejar la solución en forma implícita y aplicar medios numéricos para evaluarla, para valores particulares de la variable independiente. Esta última situación es más común; a menos que la relación implícita sea cuadrática en y o que tenga alguna otra forma especialmente simple, es improbable que pueda resolverse de manera exacta por medios analíticos. De hecho, incluso con bastante frecuencia es imposible encontrar una expresión implícita para la solución de una ecuación no lineal de primer orden.

Construcción gráfica o numérica de curvas integrales. Debido a la dificultad de obtener soluciones analíticas exactas de ecuaciones diferenciales no lineales, los métodos que producen soluciones aproximadas u otra información cualitativa sobre las soluciones tienen de manera correspondiente, una mayor importancia. En la sección 1.1 ya se describió la manera en que puede construirse el campo direccional de una ecuación diferencial. El campo direccional a menudo puede mostrar la forma cualitativa de las soluciones y también puede ser útil para identificar regiones del plano xy en donde las soluciones exhiben carac-

terísticas interesantes que ameritan una investigación analítica o numérica más detallada. En la sección 2.6 se analizan con más detalle los métodos gráficos para las ecuaciones de primer orden. En el capítulo 8 se presenta un análisis sistemático de los métodos numéricos. Si el estudiante desea obtener un panorama equilibrado de los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden, en especial de las no lineales, entonces en este momento es posible que desee leer por lo menos unas cuantas de las primeras secciones del capítulo 8.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, dé la región del plano xy en la que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.4.1; por tanto, existe una solución única que pasa por cada punto inicial dado en esta región.

1. $y' = \dfrac{x - y}{2x + 5y}$
2. $y' = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$
3. $y' = 2xy/(1 + y^2)$
4. $y' = 3(x + y)^{-2}$
5. $y' = \dfrac{\ln|xy|}{1 - x^2 + y^2}$
6. $y' = (x^2 + y^2)^{3/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + x^2}{3y - y^2}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\cot x)y}{1 + y}$

En cada uno de los problemas 9 a 12, resuelva el problema con valor inicial dado y determine de qué manera el intervalo en el que la solución existe depende del valor inicial y_0.

9. $y' = -4x/y, \quad y(0) = y_0$
10. $y' = 2xy^2, \quad y(0) = y_0$
11. $y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0$
12. $y' = x^2/y(1 + x^3), \quad y(0) = y_0$

13. Considere el problema con valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ que se analizó en el ejemplo 1 del texto.
    a) ¿Existe una solución que pase por el punto (1, 1)? En caso afirmativo, halle esa solución.
    b) ¿Existe una solución que pase por el punto (2, 1)? En caso afirmativo, halle esa solución.
    c) Considere todas las soluciones posibles del problema con valor inicial dado. Determine le conjunto de valores que tienen estas soluciones en $x = 2$.

14. a) Verifique que $y_1(x) = 1 = -x$ y $y_2(x) = -x^2/4$ son soluciones del problema con valor inicial

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \qquad y(2) = -1.$$

    ¿En dónde son válidas estas soluciones?
    b) Dé una explicación de por qué la existencia de dos soluciones del problema dado no contradice la parte de unicidad del teorema 2.4.1.
    c) Demuestre que $y = cx + c^2$, en donde c es una constante arbitraria, satisface la ecuación diferencial del inciso a) para $x \geq -2c$. Si $c = -1$, también se satisface la condición

inicial y se obtiene la solución $y = y_1(x)$. Demuestre que no existe c que dé la segunda solución $y = y_2(x)$.

2.5 Aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales son interesantes para los no matemáticos principalmente debido a la posibilidad de utilizarlas para investigar una amplia variedad de problemas de las ciencias físicas, biológicas y sociales. En este proceso se presentan tres pasos identificables, sin importar cuál sea el campo específico de aplicación.

En primer lugar, es necesario traducir la situación física en términos matemáticos. Suele llevarse a cabo esto al establecer hipótesis acerca de lo que está sucediendo que parezcan ser coherentes con los fenómenos observados. Por ejemplo, se ha observado que los materiales radiactivos decaen con una rapidez proporcional a la cantidad de material presente, que el calor pasa de un cuerpo caliente hacia uno más frío con una rapidez proporcional a la diferencia de temperaturas, que los objetos se mueven según con las leyes de Newton del movimiento y que las poblaciones aisladas de insectos crecen con una rapidez proporcional a la población existente. Cada una de estas proposiciones comprende una razón de cambio (derivada) y, en consecuencia, al expresarse matemáticamente, toma la forma de una ecuación diferencial.

Es importante tener en cuenta que las ecuaciones matemáticas casi siempre son sólo una descripción aproximada del proceso real, porque se basan en observaciones que por sí mismas son aproximaciones. Por ejemplo, los cuerpos que se mueven a velocidades comparables a la de la luz no cumplen con las leyes de Newton, las poblaciones de insectos no crecen indefinidamente como se afirmó, debido a posibles limitaciones en el abastecimiento de alimento, y la transferencia de calor es afectada por otros factores distintos a la diferencia en las temperaturas. Es más, el proceso de plantear matemáticamente un problema físico suele comprender el reemplazo conceptual de un proceso discreto por uno continuo. Por ejemplo, el número de miembros en una población de insectos cambia en cantidades discretas; sin embargo, si la población es grande, parece razonable considerarla como una variable continua e incluso hablar de su derivada. De manera alternativa, puede adoptarse el punto de vista de que las ecuaciones matemáticas describen con exactitud la operación de un modelo simplificado que se ha construido (o concebido) de modo que comprenda las características más importantes del proceso real.

En todo caso, una vez que el problema se ha formulado matemáticamente, a menudo debe encararse el problema de resolver una o más ecuaciones diferenciales o, si falta el procedimiento, averiguar tanto como sea posible acerca de las propiedades de la solución. Puede suceder que este problema matemático sea bastante difícil y, de ser así, en esta etapa pueden indicarse aproximaciones adicionales que hagan el problema matemáticamente tratable. Por ejemplo, una ecuación no lineal puede aproximarse con una lineal, o una función que varíe con lentitud puede reemplazarse por su valor promedio. Por supuesto, cualquier de esas aproximaciones también debe analizarse desde el punto de vista físico a fin de tener la certeza de que el problema matemático simplificado sigue reflejando las características esenciales del proceso físico en estudio. Al mismo tiempo, un conocimiento profundo de la física del problema puede sugerir aproximaciones matemáticas razonables que hagan el

problema matemático más tratable en el análisis. Esta interacción entre la comprensión de los fenómenos físicos y el conocimiento de las técnicas matemáticas y sus limitaciones es característica de la esencia de las matemáticas aplicadas, y es indispensable para construir con éxito modelos matemáticos de procesos físicos intrincados.

Por último, una vez que se ha obtenido la solución (o al menos alguna información acerca de ella), debe interpretarse en términos del contexto en el que surgió el problema. En particular siempre debe comprobarse si la solución matemática parece físicamente razonable. Esto exige, por lo menos, que la solución exista, sea única y dependa en forma continua de los datos del problema. Esta última consideración es importante porque los coeficientes de la ecuación diferencial y de las condiciones iniciales suelen obtenerse como resultado de mediciones de alguna cantidad física y, por consiguiente, son susceptibles de experimentar pequeños errores. Si estos pequeños errores conducen a cambios grandes (o discontinuos) en la solución del problema matemático correspondiente, que no se observan físicamente, entonces debe reconsiderarse si el modelo matemático es el adecuado para el problema físico. Por supuesto, el hecho de que la solución matemática parezca razonable no garantiza que sea correcta; sin embargo, si es seriamente incoherente con observaciones cuidadosas del sistema físico que pretende describir, sugiere que se han cometido errores al resolver el problema matemático o que el propio modelo matemático es demasiado rudimentario.

Los ejemplos de esta sección son aplicaciones típicas en las que surgen ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Ejemplo 1

Decaimiento radiactivo. El isótopo radiactivo torio 234 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente del mismo. Si 100 mg de este material se reducen a 82.04 mg en una semana, encontrar una expresión para la cantidad presente en cualquier instante. También, hallar el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que la masa decaiga hasta la mitad de su valor original.

Sea $Q(t)$ la cantidad de torio 234 presente en cualquier instante t, en donde Q se mide en miligramos y t, en días. La observación física de que el torio 234 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente significa que la razón de cambio con el tiempo dQ/dt es proporcional a Q; por tanto, Q satisface la ecuación diferencial.

$$dQ/dt = -rQ, \tag{1}$$

en donde la constante $r > 0$ se conoce como razón de decaimiento. Se busca la solución de la (1) que también satisfaga la condición inicial

$$Q(0) = 100 \tag{2}$$

así como la condición

$$Q(7) = 82.04 \tag{3}$$

La ecuación (1) es lineal y también separable; su solución general es

$$Q(t) = 100e^{-rt}, \tag{4}$$

en donde c es una constante arbitraria. La condición inicial (2) requiere que $c = 100$ y, por lo tanto,

$$Q(t) = 100e^{-rt}. \tag{5}$$

A fin de satisfacer la (3), se hace $t = 7$ y $Q = 82.04$ en la (5); esto da

$$82.04 = 100e^{-7r}$$

entonces,

$$r = -\frac{\ln 0.8204}{7} = 0.02828 \text{ días}^{-1}. \tag{6}$$

Por tanto, se ha determinado la razón de decaimiento r. Si se usa este valor de r en la (5), se obtiene

$$Q(t) = 100e^{-0.02828t} \text{ mg}. \tag{7}$$

con lo que se obtiene el valor de $Q(t)$ en cualquier instante.

El lapso durante el que la masa se reduce a la mitad de su valor original se denomina **vida media** del material. Sea τ el tiempo en que $Q(t)$ es igual a 50 mg. Entonces, por la (5),

$$50 = 100\, e^{-r\tau},$$

o bien,

$$r\tau = \ln 2. \tag{8}$$

La relación (8) entre la razón de decaimiento y la vida media es válida no sólo para el torio 234, sino para cualquier material que obedezca la ecuación diferencial (1); al usar el valor de r dado por la ecuación (6), se encuentra que, para el torio 234,

$$\tau = \frac{\ln 2}{0.02828} \cong 24.5 \text{ días}. \tag{9}$$

Ejemplo 2

Interés compuesto Supóngase que, en un banco, se deposita una cantidad de dinero o fondo, que paga interés a una tasa anual r. El valor $S(t)$ de la inversión en cualquier instante t depende de la frecuencia con la que se componga el interés, así como de la tasa de éste. Las instituciones financieras tienen varias políticas sobre la composición: en algunas se compone mensualmente; en otras, semanalmente, y en otras, incluso diariamente. Si se supone que la composición se lleva a cabo *continuamente*, entonces es posible plantear un problema sencillo con valor inicial que describa el crecimiento de la inversión.

La razón de cambio del valor de la inversión es dS/dt, y esta cantidad es igual a la rapidez con la que se acumula el interés, que es la tasa de interés r multiplicada por el valor actual de la inversión $S(t)$. Por tanto,

$$dS/dt = rS \tag{10}$$

es la ecuación diferencial que rige el proceso. Supóngase que también se conoce el valor de la inversión en algún instante particular, por ejemplo,

$$S(0) = S_0. \tag{11}$$

Entonces, la solución del problema con valor inicial (10), (11), da el balance $S(t)$ de la cuenta en cualquier instante t. Este problema con valor inicial se resuelve con facilidad. De hecho, es el mismo, salvo por el signo de la constante de proporcionalidad, que el problema con valor inicial del ejemplo 1, que describe el decaimiento radiactivo. Como consecuencia, al resolver las ecuaciones (10) y (11) se encuentra que

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \tag{12}$$

Por tanto, una cuenta bancaria con interés compuesto en forma continua crece exponencialmente. Compárense ahora los resultados del modelo continuo que acaba de describirse con la situación en la que la composición ocurre a intervalos de tiempo finitos. Si el interés se compone una vez al año, entonces al cabo de t años,

$$S(t) = S_0(1 + r)^t.$$

Si el interés se compone dos veces al año, entonces al término de seis meses el valor de la inversión es $S_0[1 + (r/2)]$, y al cabo de un año es $S_0[1 + (r/2)]^2$. Entonces, después de t años se tiene

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

En general, si el interés se compone m veces al año, entonces

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \tag{13}$$

La relación entre las fórmulas (12) y (13) se aclara si se recuerda de lo visto en cálculo que

$$\lim_{m\to\infty} S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 e^{rt}.$$

En la tabla 2.5.1 se muestra el efecto de cambiar la frecuencia de composición para una tasa de interés r del 8%. La segunda y tercera columnas se calcularon con base en la ecuación (13) para una composición trimestral y diaria, respectivamente, y la cuarta se calculó con base en la (12) para una composición continua. Los resultados muestran que, en la mayor parte de los casos, la frecuencia de composición no tiene una importancia particular. Por ejemplo, durante un periodo de 10 años la diferencia entre la composición trimestral y la continua es de \$17.50 por cada \$1 000 invertidos, o sea, menos de \$2 anuales. La diferencia sería un tanto mayor para tasas de interés más elevadas y sería menor para tasas más bajas.

TABLA 2.5.1 Crecimiento del capital a una tasa de interés de $r = 8\%$, para varios modos de composición

	$S(t)/S(t_0)$ de la ec. (13)		$S(t)/S(t_0)$	$S(t)/S(t_0)$
Años	$m = 4$	$m = 365$	de la ec. (12)	de la ec. (14)
1	1.0824	1.0833	1.0833	1.0845
2	1.1716	1.1735	1.1735	1.1761
5	1.4859	1.4918	1.4918	1.5001
10	2.2080	2.2253	2.2255	2.2502
20	4.8754	4.9522	4.9530	5.0634
30	10.7652	11.0202	11.0232	11.3937
40	23.7699	24.5238	24.5325	25.6382

Con base en el primer renglón de la tabla se ve que, para la tasa de interés $r = 8\%$, el rendimiento anual para una composición trimestral es de 8.24% y para una composición diaria o continua es de 8.33%. Algunos bancos anuncian un rendimiento anual incluso más alto que el que se obtiene con composición continua. Esto se logra al calcular una tasa de interés diaria con el uso de un año nominal de 360 días y luego al componer esta tasa a lo largo del año natural real. Al aplicar este método para una tasa de interés r, e ignorar los años bisiestos, se encuentra que

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{360}\right)^{365t} \tag{14}$$

En la última columna de la tabla 2.5.1 se dan los resultados de la ecuación (14), para una tasa de interés del 8%. Obsérvese que el rendimiento anual efectivo es del 8.45%.

Si se vuelve ahora al caso de la composición continua, supóngase que además de la acumulación de interés pueden hacerse depósitos o retiros. Si se supone que los depósitos o retiros se efectúan con una cuota constante k, entonces la (10) se sustituye por

$$dS/dt = rS + k, \tag{15}$$

en donde k es positiva para los depósitos y negativa para los retiros.
La solución general de la (15) es

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

en donde c es una constante arbitraria. Para satisfacer la condición inicial (11) debe elegirse $c = S_0 + (k/r)$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial (15), (11) es

$$S(t) = S_0e^{rt} + (k/r)(e^{rt} - 1). \tag{16}$$

El primer término de la expresión (16) es la parte de $S(t)$ debida al interés pagado sobre la cantidad inicial S_0, mientras que el segundo es la parte debida a la cuota de depósito o retiro k.

Lo atractivo de plantear el problema de esta manera general, sin valores específicos de S_0, r o k, reside en la generalidad de la fórmula resultante (16) para $S(t)$. Con esta fórmula es fácil comparar los resultados de diferentes programas de inversión o tasas de interés.

Por ejemplo, supóngase que se abre una cuenta individual de retiro (CIR) a la edad de 25 años, con una inversión inicial de \$2 000 y que, a partir de ese momento se efectúan depósitos anuales de \$2 000, de manera continua. Si se supone una tasa de interés del 8%, ¿cuál será el balance de la CIR a la edad de 65 años? Se tiene $S_0 = \$2\,000$, $r = 0.08$ y $k = \$2\,000$, y se desea determinar $S(40)$. Con base en la ecuación (16), se tiene

$$\begin{aligned} S(40) &= (2000)e^{3.2} + (25\,000)(e^{3.2} - 1) \\ &= \$49\,065 + \$588\,313 = \$637\,378. \end{aligned}$$

Es interesante observar que la cantidad total invertida es de \$ 82 000, de modo que la cantidad restante de \$555 378 resulta del interés acumulado.

Examínense ahora las hipótesis establecidas en el modelo. En primer lugar, se ha supuesto que el interés se compone continuamente y que el capital adicional se invierte continuamente. En una situación financiera real ninguna de estas hipótesis es verdadera, aunque las discrepancias no suelen ser significativas. Lo más importante es que se ha supuesto que la tasa de interés r es constante durante todo el periodo considerado, mientras que, de hecho, las tasas de interés fluctúan de manera considerable. Aunque es imposible predecir de modo confiable las tasas futuras de interés, puede aplicarse la expresión (16) para determinar el efecto aproximado de las proyecciones de diferentes de esas tasas. También es posible considerar que r y k de la (15)

son funciones de t, en vez de constantes; por supuesto, en ese caso la solución puede ser mucho más complicada que la ecuación (16).

Asimismo, vale la pena hacer notar que el problema con valor inicial (15), (11) y la solución (16) también pueden aplicarse para analizar otras diversas situaciones financieras, incluyendo anualidades, hipotecas y préstamos para adquirir automóviles, entre otras.

Ejemplo 3

Mezclas En el instante $t = 0$, un tanque contiene Q_0 lb de sal disueltas en 100 gal de agua; ver la figura 2.5.1. Supóngase que al tanque está entrando agua que contiene $\frac{1}{4}$ lb de sal por galón, a razón de 3 gal/min, y que la solución bien revuelta está saliendo del tanque con la misma rapidez. Encontrar una expresión para la cantidad de sal $Q(t)$ que hay en el tanque en el instante t.

La razón de cambio de la sal en el tanque, en el instante t, $Q'(t)$, debe ser igual a la razón a la que la sal entra al tanque menos la razón a la que sale. La razón a la que la sal entra es $\frac{1}{4}$ lb/gal multiplicado por 3 gal/min. La razón a la que la sal sale es $(Q(t)/100)$ lb/gal multiplicado por 3 gal/min; por tanto,

$$Q'(t) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{100}Q(t) \tag{17}$$

es la ecuación diferencial que rige este proceso. La ecuación (17) es lineal y su solución general es

$$Q(t) = 25 + ce^{-0.03t}, \tag{18}$$

en donde c es arbitraria. A fin de satisfacer la condición inicial

$$Q(0) = Q_0 \tag{19}$$

debe tomarse $c = Q_0 - 25$; de donde,

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.03t}) + Q_0e^{-0.02t}, \tag{20}$$

El segundo término del segundo miembro de (20) representa la porción de la sal original que resta en el tanque en el instante t. Este término se hace muy pequeño con el transcurso del tiempo, a medida que la solución original se extrae del tanque. El primer término del segundo

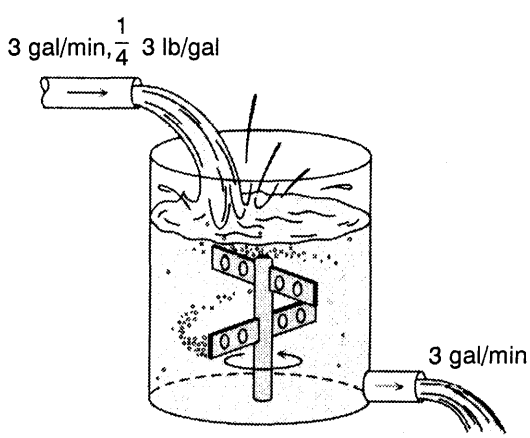


FIGURA 2.5.1 Tanque de agua del ejemplo 3.

miembro de (20) da la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t debido a la acción de los procesos de flujo. A medida que t crece, este término tiende al valor constante de 25 (libras). Físicamente, también es obvio que este debe ser el valor límite de Q, a medida que la solución original en el tanque se reemplaza cada vez más completamente por la que entra con una concentración de $\frac{1}{4}$ lb/gal.

Ejemplo 4

Determinación del momento de la muerte[1] En la investigación de un homicidio o una muerte accidental, a menudo es importante estimar el momento de la muerte. A continuación se describe un método matemático para enfocar este problema.

A partir de observaciones experimentales se sabe que, con una exactitud satisfactoria en muchas circunstancias, la temperatura superficial de un objeto cambia con una razón proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la de su entorno (temperatura ambiente). Esto se conoce como ley de Newton del enfriamiento. Por tanto, si $\theta(t)$ es la temperatura del objeto en el instante t y T es la temperatura ambiente constante, entonces θ debe satisfacer la ecuación diferencial lineal

$$d\theta/dt = -k(\theta - T), \tag{21}$$

en donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. El signo negativo de la ecuación (21) se debe al hecho de que si el objeto está más caliente que su entorno ($\theta > T$), entonces se enfriará con el tiempo. De donde, $d\theta/dt < 0$ cuando $\theta - T > 0$.

Supóngase ahora que en el instante $t = 0$ se descubre un cadáver y que su temperatura es θ_0. Se supone que en el instante del fallecimiento t_d la temperatura del cuerpo θ_d tenía el valor normal de 98.6°F, o sea 37°C. Si se supone que la ecuación (21) es válida en esta situación, entonces la tarea es determinar t_d.

La solución de la ecuación (21) sujeta a la condición inicial $\theta(0) = \theta_0$ es

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{-kt} \tag{22}$$

Sin embargo, la razón de enfriamiento k que aparece en esta expresión hasta ahora desconocida. Es posible determinar k al hacer una segunda medición de la temperatura del cuerpo en algún instante posterior t_1; supóngase que $\theta = \theta_1$ cuanto $t = t_1$. Al sustituir estos valores en (22) se encuentra que

$$\theta_1 - T = (\theta_0 - T)e^{-kt1},$$

por lo cual

$$k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}, \tag{23}$$

en donde θ_0, θ_1, T y t_1 son cantidades conocidas.

Por último, para determinar t_d se sustituye $t = t_d$ y $\theta = \theta_d$ en la ecuación (22) y luego se despeja t_d; se obtiene

$$t_d = -\frac{1}{k} \ln \frac{\theta_d - T}{\theta_0 - T}, \tag{24}$$

en donde k está dada por la ecuación (23).

[1] Consúltese la obra de J. F. Hurley, "An Application of Newton's Law of Cooling", *Mathematics Teacher 67* (1974), pp. 141-142 y la de David A. Smith, "The Homicide Problem Revisited", *The Two Year College Mathematics Journal 9* (1978), pp. 141-145.

Por ejemplo, supóngase que la temperatura del cadáver es de 85°F cuando es descubierto, que dos hora más tarde su temperatura es de 74°F y que la temperatura ambiente es de 68°F, entonces, por la ecuación (23),

$$k = -\frac{1}{2}\ln\frac{74-68}{85-68} \simeq 0.5207 \text{ h}$$

y por la (24),

$$t_d = -\frac{1}{0.5207}\ln\frac{98.6-68}{85-68} \simeq -1.129 \text{ h}$$

De donde se concluye que el cuerpo se descubrió aproximadamente 1 hr. 8 min. después del fallecimiento.

Problemas

1. El isótopo radiactivo plutonio 241 decae de forma que se satisface la ecuación diferencial

$$dQ/dt = -0.0525Q$$

en donde Q se mide en miligramos y t en años.
a) Determine la vida media τ del plutonio 241.
b) Si en este momento se cuenta con 50 mg de plutonio, ¿cuánto quedará en 10 años?

2. El einstenio 253 decae con una rapidez proporcional a la cantidad que se tenga. Determine la vida media τ si este material pierde un tercio de su masa en 11.7 días.
3. El radio 226 tiene una vida media de 1 620 años. Encuéntrese el periodo en el que un cuerpo de este material se reduce a tres cuartas partes de su tamaño original.
4. Suponga que inicialmente se encuentran 100 mg de torio 234 en un recipiente cerrado y que a éste se le agrega torio 234 con una rapidez constante de 1 mg/día.
a) Halle la cantidad $Q(t)$ de torio 234 que hay en el recipiente en cualquier instante. Recuerde que, en el ejemplo 1, se encontró la razón de decaimiento para el torio 234.
b) Halle la cantidad límite Q_1 de torio 234 que existiría en el recipiente cuando $t \to \infty$.
c) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que la cantidad de torio 234 en el recipiente disminuya hasta ser 0.5 mg como máximo más del valor límite Q_1?
d) Si al recipiente se le agrega torio 234 con una rapidez de k mg/día, encuentre el valor de k que se requiere a fin de mantener un nivel constante de 100 mg de torio 234.
5. **Determinación de fechas por radiocarbono.** Un instrumento importante en la investigación arqueológica es la determinación de fechas por radiocarbono, que es un medio para determinar la antigüedad de ciertos restos de madera y plantas y, por tanto, de huesos humanos o de animales o artefactos encontrados a la misma profundidad. El procedimiento fue desarrollado por el químico estadounidense Willard Libby (1908-1980) a principios de la década de 1950, por lo que fue galardonado con el Premio Nobel de Química en 1960. La determinación de fechas por radiocarbono se basa en el hecho de que algunos restos de madera o plantas, siguen conteniendo cantidades residuales de carbono 14, un isótopo radiactivo del carbono. Este isótopo se acumula durante la vida de la planta y comienza a decaer a la muerte de ésta. Como la vida media del carbono 14

es larga (aproximadamente de 5 568 años[2]), después de muchos miles de años permanecen cantidades mensurables de carbono 14. Libby demostró que si incluso está presente una diminuta fracción de la cantidad original de carbono 14, entonces por medio de mediciones adecuadas de laboratorio puede determinarse con exactitud la *proporción* de la cantidad original de carbono 14 que resta. En otras palabras, si $Q(t)$ es la cantidad de carbono 14 en el instante t y Q_0 es la cantidad original, entonces puede determinarse la razón $Q(t)/Q_0$, por lo menos si esta cantidad no es demasiado pequeña. Las técnicas de medición actuales permiten la aplicación de este método para periodos de hasta alrededor de 100 000 años, después de los cuales la cantidad de carbono 14 restante es de sólo poco más o menos 4×10^{-6} de la cantidad original.

a) Si supone que Q satisface la ecuación diferencial $Q' = -rQ$, determinar la constante de decaimiento r para el carbono 14.

b) Halle una expresión para $Q(t)$ en cualquier instante t, si $Q(0) = Q_0$.

c) Suponga que se descubren ciertos restos en los que la cantidad residual presente de carbono 14 es el 20% de la cantidad original. Determine la antigüedad de estos restos.

6. Suponga que se deposita una suma S_0 en un banco que paga interés a una tasa anual r, compuesto continuamente.

   a) Halle el tiempo T necesario para duplicar el valor de la suma original, como una función de la tasa de interés r.

   b) Determine T si $r = 7\%$.

   c) Encuentre la tasa de interés que debe pagarse si la inversión inicial tiene que duplicarse en ocho años.

7. Una persona joven sin capital inicial invierte k dólares anuales a una tasa de interés anual r. Suponga que las inversiones se hacen continuamente y que el interés también se compone de manera continua.

   a) Determine la suma $S(t)$ acumulada en cualquier instante t.

   b) Si $r = 7.5\%$, determine k de modo que se disponga para su retiro de un millón de dólares en 40 años.

   c) Si $k = \$2\,000$ anuales, determine la tasa de interés r que debe obtenerse a fin de contar con un millón de dólares disponibles en 40 años.

   Sugerencia: Aplique el método de Newton o algún otro procedimiento numérico apropiado en el inciso c).

8. El efecto de un pequeño cambio en la tasa de interés puede ser sustancial para un plazo largo de inversión. Confirme lo anterior al calcular el resultado del programa de inversión CIR del ejemplo 2 si a) $r = 7.5\%$; b) $r = 9\%$.

9. Una persona solicita un préstamo de \$8 000 para comprar un automóvil. El prestamista carga el interés a una tasa anual del 10%. Si se supone que el interés se compone de manera continua y que el deudor efectúa pagos continuamente con una cuota anual constante k, determine la cuota de pago k necesaria para cubrir el adeudo en tres años. Determine también cuánto interés se paga durante el periodo de tres años.

10. El comprador de una casa no puede pagar más de \$800 mensuales por la hipoteca. Suponga que la tasa de interés es de 9% y que el término de la hipoteca es de 20 años. Suponga que el interés se compone continuamente y que también los pagos se hacen en la misma forma.

    a) Determine la cantidad máxima que este comprador puede solicitar en préstamo.

    b) Determine el interés total que se paga durante el término de la hipoteca.

[2] La vida media internacionalmente aceptada del carbono 14 es 5568± 30 años, según se indica en la *McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology* (5a ed.) (New York: McGraw-Hill, 1982), Vol. 11, pp. 328-335.

11. ¿Cómo varían las respuestas del problema 10 si el término de la hipoteca es de 30 años?
12. Un jubilado tiene invertida una suma $S(t)$ de modo que obtenga interés a una tasa anual r, compuesto continuamente. Los retiros para sus gastos se hacen a razón de k dólares anuales; suponga que los retiros se hacen continuamente.
    a) Si el valor inicial de la inversión es S_0, determínese $S(t)$ en cualquier momento.
    b) Si se supone que S_0 y r son fijos, determine la cuota de retiro k_0 a la que $S(t)$ permanecerá constante.
    c) Si k sobrepasa el valor k_0 hallado en el inciso b), entonces $S(t)$ disminuirá y, finalmente, será cero. Encuentre el tiempo T en el que $S(t) = 0$.
    d) Determine T si $r = 8\%$ y $k = 2\,k_0$.
    e) Suponga que una persona que se jubila con un capital S_0 desea retirar fondos a una cuota anual k por no más de T años. Determine la cuota máxima posible de retiro.
    f) ¿De cuánto debe ser una inversión inicial para permitir un retiro anual de \$12 000 durante 20 años, si se supone una tasa de interés del 8%?
13. Suponga que la población de la Tierra cambia con una rapidez proporcional a la población actual. (En la sección 2.6 se considera una hipótesis más exacta referente al crecimiento de la población.) Además, se estima que en el instante $t = 0$ (1650 de nuestra era), la población de la Tierra era de 600 millones (6.0×10^8); en el instante $t = 300$ (1950 D.C.), la población era de 2.8 miles de millones (2.8×10^9). Encuentre una expresión que dé la población de la Tierra en cualquier instante. Si se supone que la población máxima que la Tierra puede sostener es de 25 miles de millones (2.5×10^{10}), ¿cuándo se alcanzará este límite?
14. Suponga que la temperatura de una taza de café obedece la ley de Newton del enfriamiento. Si el café tiene una temperatura de 200°F cuando acaba de servirse y un minuto después se ha enfriado hasta 190°F en un recinto cuya temperatura es de 70°F, determine cuándo el café alcanza una temperatura de 150°F.
15. Encuentre el intervalo entre el momento de la muerte y el instante en que se descubre un cadáver, si las circunstancias son las mismas que las del ejemplo 4, excepto que la temperatura ambiente es de 32°F.
16. Suponga que, a medianoche, se descubre un cuerpo con una temperatura de 85°F, y que la temperatura ambiente es constante de 70°F. El cuerpo se envía rápidamente (suponga que instantáneamente) a la morgue, en donde la temperatura ambiente se mantiene a 40°F. Al cabo de una hora se encuentra que la temperatura del cuerpo es de 60°F. Estime el momento de la muerte.
17. Suponga que una gota de lluvia esférica se evapora con una rapidez proporcional a su área superficial. Si originalmente su radio mide 3 mm y media hora después se ha reducido hasta 2 mm, encuentre una expresión para calcular el radio de la gota de lluvia en cualquier instante.
18. Inicialmente un tanque contiene 120 litros de agua pura. Al tanque entra a razón de 2 litros/min, una mezcla que contiene una concentración de γg/litro de sal y la mezcla bien revuelta sale del tanque a la misma razón. Encuentre una expresión en términos de γ para la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t. Halle también la cantidad límite de sal en el tanque $t \to \infty$.
19. Considere un tanque usado en ciertos experimentos de hidrodinámica. Después de realizar un experimento, el tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 g/litro. A fin de preparar el siguiente experimento, el tanque debe lavarse con agua limpia que fluye a razón de 2 litros/min y la solución bien revuelta sale a la misma razón. Halle el tiempo que transcurrirá antes de que la concentración de colorante en el tanque alcance el 1% de su valor original.

20. Un tanque contiene originalmente 100 gal de agua limpia; a continuación se vierte en el tanque agua que contiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón, a razón de 2 gal/min y se deja que la mezcla abandone el tanque a la misma razón. Al cabo de 10 minutos se detiene el proceso y se introduce al tanque agua limpia a razón de 2 gal/min y nuevamente se deja que la mezcla abandone el tanque a la misma razón. Encuentre la cantidad de sal en el tanque al cabo de 20 minutos.
21. Un tanque con una capacidad de 500 gal contiene originalmente 200 gal de agua con 100 lb de sal en solución. Se hace entrar agua que contiene 1 lb de sal por galón, a razón de 3 gal/min, y se deja que la mezcla salga del tanque a razón de 2 gal/min. Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante antes del momento en que la solución comienza a derramarse. Encuentre la concentración (en libras por galón) de sal en el tanque cuando se encuentra en el punto en que se derrama. Compare esta concentración con la concentración límite teórica, si la capacidad del tanque fuera infinita.
22. Suponga que un recinto que contiene 1 200 pies^3 de aire originalmente está libre de monóxido de carbono. A partir del instante $t = 0$, se introduce al recinto humo de cigarro, que contiene 4% de monóxido de carbono, a razón de 0.1 pies^3/min y se permite que la mezcla bien circulada salga a la misma razón.
    a) Halle una expresión para la concentración $x(t)$ de monóxido de carbono en el recinto, en cualquier instante $t > 0$.
    b) La exposición prolongada a una concentración de monóxido de carbono no tan baja como 0.00012 es dañina para el organismo humano. Halle el instante τ en el que se alcanza esta concentración.
23. Considere una lago de volumen constante V que contiene en un instante t una cantidad $Q(t)$ de contaminante, distribuido de manera uniforme en todo el lago con una concentración $c(t)$, en donde $c(t) = Q(t)/V$. Suponga que al lago entra agua que contiene una concentración k de contaminante a una razón r, y que del mismo lago sale el agua a la misma razón. Suponga que al lago también se le agregan directamente contaminantes a una razón constante P. Note que en las hipótesis establecidas se desprecian varios factores que pueden, en algunos casos, ser importantes; por ejemplo, el agua agregada o perdida por precipitación, absorción y evaporación; el efecto estratificante de la diferencia de temperaturas en un lago profundo; la tendencia de que las irregularidades de la costa produzcan bahías protegidas; y el hecho de que los contaminantes no se depositan de manera uniforme en todo el lago, sino que (por lo general) lo hacen en puntos aislados de su periferia. Los resultados que se dan en seguida deben interpretarse a la luz de que se han despreciado factores como éstos.
    a) Si en el instante $t = 0$ la concentración de contaminantes es c_0, halle una expresión para la concentración $c(t)$ en cualquier instante. ¿Cuál es la concentración límite cuando $t \to \infty$?

TABLA 2.5.2 Datos del volumen y el flujo de los Grandes Lagos

Lago	V (km$^3 \times 10^{-3}$)	r (km^3/año)
Superior	12.2	65.2
Michigan	4.9	158
Erie	0.46	175
Ontario	1.6	209

b) Si se termina la adición de contaminantes al lago ($k = 0$ y $P = 0$) para $t > 0$), determine el intervalo de tiempo T que debe transcurrir antes de que la concentración de esos contaminantes se reduzca al 50% de su valor original; al 10% de su valor original.
c) En la tabla 2.5.2 están contenidos datos[3] de varios de los Grandes Lagos. Con la aplicación de estos datos, determine con base en el inciso b) el tiempo T necesario para reducir la contaminación de cada uno de estos lagos hasta el 10% del valor original.

2.6 Dinámica de las poblaciones y algunos problemas relacionados

En varias aplicaciones, que van desde la medicina hasta la ecología y hasta por la economía global, resulta conveniente predecir el crecimiento o descenso de la población de una especie dada. En diferentes situaciones puede haber interés en una población de bacterias, insectos, mamíferos o incluso de personas. Ecuaciones semejantes también rigen muchos otros tipos de fenómenos y en los problemas se mencionan algunos de éstos; por ejemplo, la cosecha de un recurso renovable (problemas 18 y 19); epidemias (problemas 20 a 22); bifurcación de fluidos (problema 23), y reacciones químicas (problema 24). El propósito principal de esta sección es mostrar cómo es posible aplicar métodos geométricos para obtener información cualitativa importante directamente de la ecuación diferencial, sin resolverla. Esto lleva de inmediato a los muy importantes conceptos de estabilidad e inestabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Estas ideas se presentan aquí y se analizan con mayor profundidad y en un planteamiento más general en el capítulo 9.

Crecimiento exponencial. Sea $N(t)$ la población de la especie dada en el instante t. La hipótesis más simple referente a la variación de $N(t)$ es que la razón de cambio de N es proporcional[4] al valor actual de N, es decir,

$$dN/dt = rN, \tag{1}$$

en donde r es la constante de proporcionalidad. La constante r se denomina **razón de crecimiento** o **disminución**, dependiendo de si es positiva o negativa. Si $r < 0$, entonces el problema matemático es el mismo que el correspondiente al decaimiento radiactivo que se analizó en la sección 2.5. Aquí se supone que $r > 0$, de modo que la población está creciendo.

Al resolver la ecuación (1) sujeta a la condición inicial

$$N(0) = N_0 \tag{2}$$

se obtiene

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \tag{3}$$

[3] Este problema se basa en el artículo de R. H. Rainey "Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes", *Science 155* (1967), pp. 1242-1243; la información de la tabla se tomó de esa fuente.

[4] Aparentemente fue el economista británico Tomas Malthus (1766 -1834) quien primero observó que muchas poblaciones biológicas crecen a una razón proporcional a la población. Su primer artículo sobre poblaciones apareció en 1798.

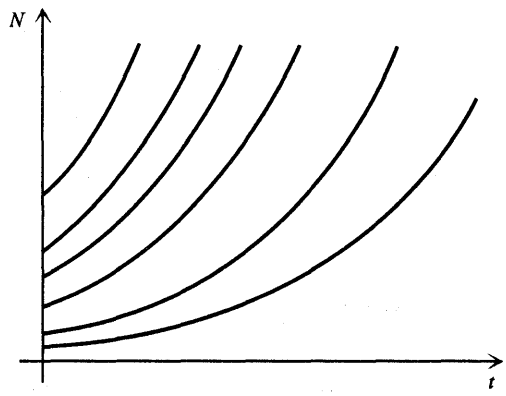


FIGURA 2.6.1 Crecimiento exponencial: N contra t para $dN/dt = rN$.

Por tanto, el modelo matemático que consta del problema con valor inicial (1), (2) con $r > 0$ predice que la población crecerá exponencialmente durante todo el tiempo, como se muestra en la figura 2.6.1. En condiciones ideales, se ha observado que la (3) es razonablemente exacta para muchas poblaciones, al menos para periodos limitados. Sin embargo, resulta evidente que estas condiciones ideales no pueden continuar de manera indefinida; llega el momento en que las limitaciones de espacio, abastecimiento de alimentos u otros recursos reducen el índice de crecimiento y hacen que termine el crecimiento exponencial no inhibido.

Crecimiento logístico. Para tomar en cuenta el hecho de que la tasa de crecimiento en realidad depende de la población, en la ecuación (1) se reemplaza la constante r por una función $f(N)$, con lo que se obtiene la ecuación modificada

$$dN/dt = f(N)N. \tag{4}$$

Ahora se desea elegir $f(N)$ de modo que $f(N) \cong r > 0$ cuando N sea pequeño, $f(N)$ decrezca cuando N aumenta, y $f(N) < 0$ cuando N sea suficientemente grande. La función más sencilla que tiene estas propiedades es $f(N) = r - aN$, en donde a también es una constante positiva. Si se usa esta función en la (4), se obtiene

$$dN/dt = (r - aN)N. \tag{5}$$

La ecuación (5) se conoce como ecuación de Verhulst[5] o ecuación **logística**. A menudo resulta conveniente escribir la ecuación logística en la forma equivalente

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \tag{6}$$

[5] P. F. Verhulst (1804-1849) fue un matemático belga que introdujo la ecuación (5) como modelo para el crecimiento de la población humana, en 1838; lo mencionó como crecimiento logístico, por lo cual (5) a menudo se le denomina ecuación logística. No pudo probar la exactitud de su modelo debido a los datos inadecuados de censo, y no se le prestó mucha atención hasta muchos años después. R. Pearl (1930) demostró que existía una concordancia razonable con los datos experimentales para las poblaciones de *Drosophila melanogaster* (mosca de la fruta), así como G. F. Gause (1935) para poblaciones de *Paramecium* y *Tribolium* (escarabajos de la harina).

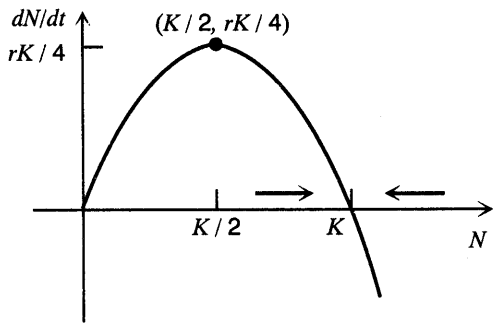


FIGURA 2.6.2 dN/dt contra N para $dN/dt = r(1 - N/K)N$.

en donde $K = r/a$. La constante r se denomina **razón de crecimiento intrínseco**, es decir, la razón de crecimiento en ausencia de todo factor limitante. Un poco más adelante se aclarará la interpretación de K.

La solución de la ecuación logística (6) puede encontrarse fácilmente por el método de separación de variables,[6] y la solución se obtendrá un poco después. Sin embargo, ahora se mostrará que al aplicar un razonamiento geométrico es posible descubrir directamente las características principales de la solución a partir de la propia ecuación diferencial sin resolverla. Esto es importante porque a menudo pueden aplicarse los mismos métodos en ecuaciones más complicadas, cuyas soluciones son más difíciles de obtener.

En la figura 2.6.2 se muestra la gráfica de dN/dt contra N, en donde dN/dt está dada por el segundo miembro de la ecuación (6). La gráfica es una parábola que se interseca con el eje N en $(0, 0)$ y $(k, 0)$, y con vértice en $(k/2, rk/4)$. Para $0 < N < K$ se ve que $dN/dt > 0$ y, por lo tanto N es una función creciente de t; esto se indica por la flecha que apunta hacia la derecha cerca del eje N. De manera semejante, si $N > K$, entonces $dN/dt < 0$; de donde, $N(t)$ es decreciente, como se indica por la flecha que apunta hacia la izquierda. Si $N = 0$ o $N = K$, entonces $dN/dt = 0$ y $N(t)$ no cambia. Las soluciones constantes $N = \phi_1(t) = 0$ y $N = \phi_2(t) = K$ **soluciones de equilibrio**; a las cuales corresponden los puntos $N = 0$ y $N = K$ del eje N que se denominan **puntos de equilibrio** o **puntos críticos.**

A continuación se desea trazar las gráficas de las soluciones $N(t)$ contra t para $t > 0, N > 0$ y para diferentes valores iniciales $N(0)$. Con este fin resulta útil conocer la relación entre las propiedades de la gráfica de dN/dt contra N y las de la gráfica de N contra t para cualquier ecuación de la forma

$$dN/dt = F(N).$$

En la tabla 2.6.1 se resume esta información. La explicación de las entradas de la tabla 2.6.1 es la siguiente: la gráfica de $N(t)$ contra t es creciente o decreciente, dependiendo de si dN/dt es positiva o negativa. Para investigar la concavidad, nótese que si dN/dt es positiva, entonces N y t crecen o decrecen simultáneamente. Por consiguiente, si dN/dt es positiva y creciente como función de N, entonces también es creciente como función de t, y la gráfica

[6] La ecuación logística también es una ecuación de Bernoulli y puede resolverse por la sustitución indicada en el problema 27 de la sección 2.2.

TABLA 2.6.1 RELACIÓN ENTRE LAS GRÁFICAS DE dN/dt CONTRA N Y DE N CONTRA t, RESPECTIVAMENTE.

Si dN/dt [o $F(N)$] es	entonces	$N(t)$ es	
Positiva y creciente		Creciente y cóncava hacia arriba	⌣
Positiva y decreciente		Creciente y cóncava hacia abajo	⌢
Negativa y creciente		Decreciente y cóncava hacia abajo	⌢
Negativa y decreciente		Decreciente y cóncava hacia arriba	⌣

de N contra t es cóncava hacia arriba. De manera semejante, si dN/dt es positiva y decreciente, entonces la gráfica de N contra t es cóncava hacia abajo.

La situación se invierte si dN/dt es negativa, porque entonces N decrece cuando t crece y viceversa. Por lo tanto si dN/dt es negativa y creciente como función de N, entonces es decreciente como función de t y la gráfica de N contra t es cóncava hacia abajo. De manera semejante, si dN/dt es negativa y decreciente, entonces la gráfica de N contra t es cóncava hacia arriba.

Estos resultados significan que las gráficas de las soluciones de la ecuación (6) deben tener la forma general que se indica en la figura 2.6.3, sin importar los valores de r y K. Las rectas horizontales son las soluciones de equilibrio $\phi_1(t) = 0$ y $\phi_2(t) = K$.

En la figura 2.6.2 se nota que dN/dt es positiva y creciente para $0 < N < K/2$, de modo que allí, la gráfica de $N(t)$ es creciente y cóncava hacia arriba. De modo semejante, dN/dt es positiva y decreciente para $K/2 < N < K$, de modo que, en este intervalo, la gráfica de $N(t)$ es creciente y cóncava hacia abajo. Por tanto, las soluciones que se inician por debajo de $K/2$ tienen la forma de S o carácter sigmoide que se muestra en la figura 2.6.3. Por otra parte, para $N > K$, dN/dt es negativa y decreciente, de modo que, para estos valores de N, la gráfica de $N(t)$ es decreciente y cóncava hacia arriba.

Por último, recuérdese que el teorema 2.4.1, el teorema fundamental de existencia y unicidad, garantiza que dos soluciones distintas jamás pasan por el mismo punto. De don-

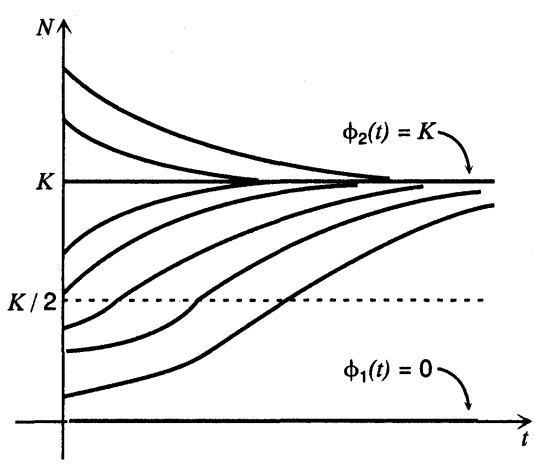


FIGURA 2.6.3 Crecimiento logístico: N contra t para $dN/dt = r(1 - N/K)N$.

de, aunque las soluciones tienden a la solución de equilibrio $N = K$ cuando $t \to \infty$, no alcanzan este valor en ningún tiempo finito. Dado que K es la cota superior a la que se tiende, pero que no se sobrepasa, al crecer las poblaciones que se inician por debajo de este valor, es natural referirse a K como el **nivel de saturación**, o como la **capacidad cinegética del ambiente**, para la especie dada.

Una comparación de las figuras 2.6.1 y 2.6.3 revela que las soluciones de la ecuación no lineal (6) son sorprendentemente diferentes de las de la ecuación (1), al menos para grandes valores de t. A pesar del valor de K, es decir, sin importar cuán pequeño sea el término no lineal de (6), sus soluciones tienden a un valor finito cuando $t \to \infty$, mientras que las soluciones de (1) crecen (exponencialmente) sin cota cuando $t \to \infty$. Por tanto, incluso un término no lineal diminuto en la ecuación diferencial tiene un efecto decisivo en la solución, para t grande.

En muchas situaciones basta con tener la información cualitativa acerca de la solución $N(t)$ de la ecuación (6) que se muestra en la figura 2.6.3. Se recalca que esta información se obtuvo por completo a partir de la gráfica de dN/dt contra N y sin resolver la ecuación diferencial (6). Sin embargo, si se desea tener una descripción más detallada del crecimiento logístico –por ejemplo, si se desea conocer al valor de la población en algún instante específico– es necesario resolver la ecuación (6) sujeta a la condición inicial (2). En el supuesto de que $N \neq 0$ y $N \neq K$ (6) puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{1/K}{1 - N/K}\right) dN = r\, dt.$$

Al aplicar un desarrollo en fracciones parciales en el primer miembro, se tiene

$$\frac{dN}{(1 - N/K)N} = r\, dt.$$

Luego, al integrar ambos miembros se obtiene

$$\ln|N| - \ln\left|1 - \frac{N}{K}\right| = rt + c, \tag{7}$$

en donde c es una constante arbitraria de integración que debe determinarse con base en la condición inicial $N(0) = N_0$. Ya se hizo notar que si $0 < N_0 < K$, entonces $N(t)$ permanece en este intervalo todo el tiempo. Por consiguiente, en este caso es posible eliminar las barras de valor absoluto en la (7) y, al tomar la exponencial de ambos miembros, se encuentra que

$$\frac{N}{1 - (N/K)} = Ce^{rt}, \tag{8}$$

en donde $C = e^c$. Para satisfacer la condición inicial $N(0) = N_0$, es necesario elegir $C = N_0/[1 - (N_0/K)]$. Si se usa este valor de C en (8) y se despeja N, se obtiene

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}. \tag{9}$$

La solución (9) se obtuvo a partir de la hipótesis de que $0 < N_0 < K$. Si $N_0 > K$, entonces los detalles para tratar la ecuación (7) difieren sólo un poco, y se deja al estudiante que demuestre que la (9) también es válida en este caso. Por último, nótese que (9) también contiene las soluciones de equilibrio $N = \phi_1(t) = 0$ y $N = \phi_2(t) = K$ correspondientes a las condiciones iniciales $N_0 = 0$ y $N_0 = K$, respectivamente.

Todas las conclusiones cualitativas a las que se llegó antes mediante un razonamiento geométrico pueden confirmarse al examinar la solución (9). En particular, si $N_0 = 0$, entonces la (9) requiere que $N(t) \equiv 0$ para toda t. Si $N_0 > 0$ y si en la (9) se hace $t \to \infty$, entonces se obtiene

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = N_0 K / N_0 = K.$$

Por tanto, para cada $N_0 > 0$ la solución tiende asintóticamente a la solución de equilibrio $N = \phi_2(t) = K$ (de hecho, lo hace exponencialmente) cuando $t \to \infty$. De donde, se dice que la solución constante $\phi_2(t) = K$ es una **solución asintóticamente estable** de la ecuación (6), o que el punto $N = K$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable o punto crítico. Esto significa que después de un tiempo largo la población está próxima al nivel de saturación K, sin importar el tamaño inicial de la población, en tanto sea positivo.

Por otra parte, la situación para la solución de equilibrio $N = \phi_1(t) = 0$ es bastante diferente. Incluso las soluciones que parten muy cerca de cero crecen cuando t aumenta y, como se ha visto, tienden a K cuando $t \to \infty$. Se dice que $\phi_1(t) = 0$ es una **solución de equilibrio inestable** o que $N = 0$ es un punto de equilibrio inestable o punto crítico. Esto significa que la única manera de garantizar que la solución permanezca próxima a cero es asegurar que su valor inicial sea *exactamente* igual a cero.

Estos dos casos pueden visualizarse como sigue. En primer lugar, suponga que se está intentando efectuar un experimento libre de bacterias en un medio en que el crecimiento de las bacterias lo rige la ecuación (6). Además, suponga que se ha logrado reducir la población de bacterias hasta un nivel extremadamente bajo, pero diferente de cero. ¿Es seguro efectuar un experimento durante un periodo largo, con la hipótesis de que la población de bacterias permanecerá baja? No, siempre que la población inicial N_0 sea diferente de cero, el tamaño de la población terminará por tender al nivel de saturación K. Por supuesto, si el experimento no dura demasiado y si N_0 es suficientemente pequeño, entonces la población de bacterias permanecerá dentro de límites aceptables para la duración de ese experimento. En segundo lugar, suponga que se está intentando realizar un experimento a un nivel K de bacterias, aunque de vez en cuando se introducen contaminantes que matan unas cuantas bacterias. ¿Es posible que esto haga que la población de bacterias siga decreciendo y termine por extinguirse? No. Si el nivel de la población varía ligeramente con respecto a K, hacia arriba o hacia abajo, tenderá a volver a K al crecer t.

Ejemplo 1 Se ha aplicado el modelo logístico al crecimiento natural de la población de hipoglosos en ciertas regiones del Océano Pacífico.[7] Sea $N(t)$, medida en kilogramos, la masa total, o biomasa,

[7] Una buena fuente de información sobre la dinámica de las poblaciones y los aspectos económicos relativos al hacer un uso eficiente de un recurso renovable, con especial atención a la pesca, es el libro de Clark (ver la bibliografía al final del capítulo). Los valores de los parámetros que se usan en este ejemplo se dan en la página 48 de este libro y fueron obtenidos como resultado de un estudio efectuado por M. S. Mohring.

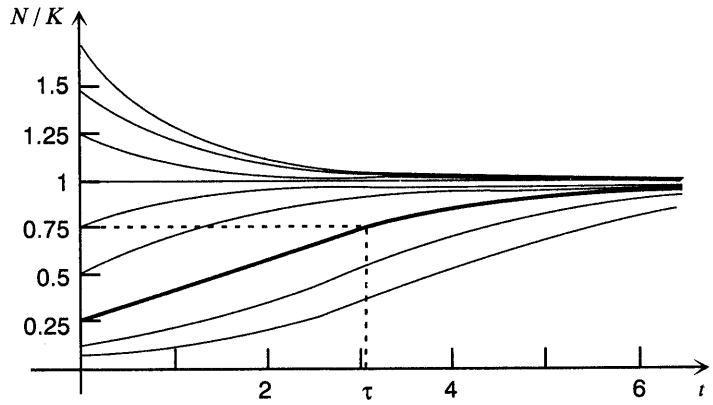


FIGURA 2.6.4 *N/K* contra *t* para el modelo de población de hipoglosos en el Océano Pacífico.

de la población de hipoglosos en el instante t. Se estima que los parámetros de la ecuación logística tienen los valores $r = 0.71$/año y $K = 80.5 \times 10^6$ kg. Si la biomasa inicial es $N_0 = 0.25K$, encontrar la biomasa dos años después. También, hallar el tiempo τ para el que $N(\tau) = 0.75K$.

Es conveniente reducir la solución (9) a escala de la capacidad de portación K; por tanto, la ecuación (9) se escribe en la forma

$$\frac{N(t)}{K} = \frac{N_0/K}{(N_0/K) + [1 - (N_0/K)]e^{-rt}}. \tag{10}$$

Al usar los datos dados en el problema se encuentra que

$$\frac{N(2)}{K} = \frac{0.25}{0.25 + 0.75e^{-1.42}} \cong 0.5797.$$

Como consecuencia, $N(2) \cong 46.7 \times 10^6$ kg.

Para hallar τ primero puede despejarse en la (10); se obtiene

$$e^{-rt} = \frac{(N_0/K)[1 - (N/K)]}{(N/K)[1 - (N_0/K)]},$$

de donde,

$$t = -\frac{1}{r} \ln \frac{(N_0/K)[1 - (N/K)]}{(N/K)[1 - (N_0/K)]}. \tag{11}$$

Al usar los valores dados de r y N^0/K y hacer $N/K = 0.75$, se encuentra que

$$\tau = -\frac{1}{0.71} \ln \frac{(0.25)(0.25)}{(0.75)(0.75)} = \frac{1}{0.71} \ln 9 \cong 3.095 \text{ años}.$$

En la figura 2.6.4 se muestran las gráficas de $N(t)$ contra t para los valores dados de los parámetros y para varias condiciones iniciales.

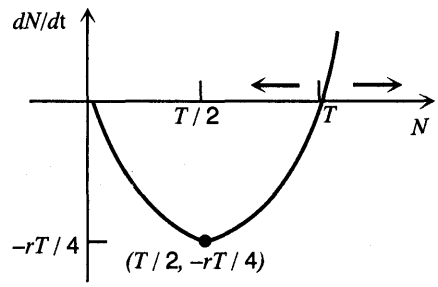


FIGURA 2.6.5 dN/dt contra N para $dN/dt = -r(1 - N/T)N$.

Un umbral crítico. Considérese ahora la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = -r\left(1 - \frac{N}{T}\right)N, \tag{12}$$

en donde r y T son constantes positivas dadas. Obsérvese que (excepto por la sustitución del parámetro K por T), esta ecuación sólo difiere de la ecuación logística (6) por la presencia del signo negativo en el segundo miembro. Sin embargo, como se verá, las soluciones de la ecuación (12) se comportan de manera muy diferente a las de la (6).

Para la ecuación (12), la gráfica de dN/dt contra N es la parábola que se muestra en la figura 2.6.5. Las intersecciones con el eje N son los puntos críticos $N = 0$ y $N = T$, correspondientes a las soluciones de equilibrio $\phi_1(t) = 0$ y $\phi_2(t) = T$. Si $0 < N < T$, entonces $dN/dt < 0$ y $N(t)$ decrece cuando t aumenta. Por otra parte, si $N > T$, entonces $dN/dt > 0$ y $N(t)$ crece cuando t aumenta. Por tanto, $\phi_1(t) = 0$ es una solución de equilibrio asintóticamente estable y $\phi_2(t) = T$ es inestable. Además, dN/dt es decreciente para $0 < N < T/2$ y creciente para $T/2 < N < T$, de modo que la gráfica de $N(t)$ es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, respectivamente, en estos intervalos (ver la tabla 2.6.1). Asimismo, dN/dt es creciente para $N > T$, de modo que la gráfica de $N(t)$ también es cóncava hacia arriba allí. Al usar toda la información obtenida de la figura 2.6.5, se concluye que las gráficas de las soluciones de la ecuación (12), para valores diferentes de N_0, deben tener la apariencia cualitativa que se muestra en la figura 2.6.6. Con base en esta figura resulta evidente que cuando el tiempo crece, $N(t)$ tiende a cero

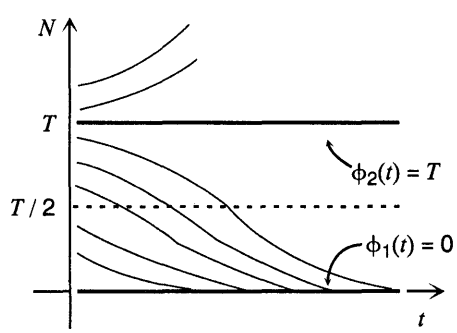


FIGURA 2.6.6 N contra t para $dN/dt = -r(1 - N/T)N$.

o crece sin cota, dependiendo de si el valor inicial N_0 es menor o mayor que T. Por tanto, T es un **nivel de umbral**, por debajo del cual no ocurre crecimiento.

Las conclusiones a las que se llega mediante razonamiento geométrico pueden confirmarse si se resuelve la ecuación diferencial (12). Esto puede hacerse al separar las variables e integrar, precisamente como se hizo para la ecuación (6). Sin embargo, si se nota que (12) puede obtenerse de (6) al sustituir K por T y r por $-r$, entonces es posible efectuar las mismas sustituciones en la solución (9) y obtener

$$N(t) = \frac{N_0 T}{N_0 + (T - N_0)e^{rt}}, \tag{13}$$

que es la solución de (12) sujeta a la condición inicial $N(0) = N_0$.

Si $N_0 < T$, entonces de la (13) se concluye que $N(t) \to 0$ cuanto $t \to \infty$. Esto concuerda con el análisis geométrico cualitativo. Si $N_0 > T$, entonces el denominador del segundo miembro de (13) es cero para cierto valor finito de t. Se denota este valor por t^* y se calcula a partir de

$$N_0 - (N_0 - T)e^{rt^*} = 0,$$

lo que da

$$t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{N_0}{N_0 - T}. \tag{14}$$

Por tanto, si la población inicial N_0, está por arriba del umbral T, entonces el modelo de umbral predice que la gráfica de $N(t)$ tiene una asíntota vertical en $t = t^*$; en otras palabras, la población se vuelve no acotada en un tiempo finito, que depende del valor inicial N_0 y del valor de umbral T. Con base en el análisis geométrico no resultaron evidentes la existencia ni la ubicación de esta asíntota, de modo que en este caso la solución explícita da lugar a importante información adicional cualitativa, así como cuantitativa.

Las poblaciones de algunas especies presentan el fenómeno de umbral. Si existen demasiado pocos, la especie no puede propagarse con buen éxito y la población se extingue. Sin embargo, si es posible reunir una población mayor que la de nivel de umbral, entonces se presenta un crecimiento adicional. Por supuesto, la población no puede llegar a ser no acotada de modo que, finalmente, será necesario modificar la ecuación (12) para tomar en consideración este hecho.

En mecánica de fluidos, ecuaciones de la forma (6) o (12) a menudo rigen la evolución de una pequeña perturbación N en flujo laminar (o suave) de un fluido. Por ejemplo, si se cumple la ecuación (12) y si $N < T$, entonces se amortigua la perturbación y persiste el flujo laminar. Sin embargo, si $N > T$ entonces la perturbación crece y el flujo laminar se fragmenta en uno turbulento. En este caso, T suele mencionarse como *amplitud crítica*. Los experimentadores hablan de mantener el nivel de perturbación en un túnel de viento lo suficientemente bajo de modo que puedan estudiar el flujo laminar sobre un perfil aerodinámico, por ejemplo.

El mismo tipo de situación puede ocurrir con los dispositivos de control automático. Por ejemplo, supóngase que N corresponde a la posición de una aleta del ala de un avión que se regula por medio de un control automático. La posición deseada es $N = 0$. En el movimiento normal del avión, las fuerzas aerodinámicas cambiantes sobre la aleta harán que ésta se

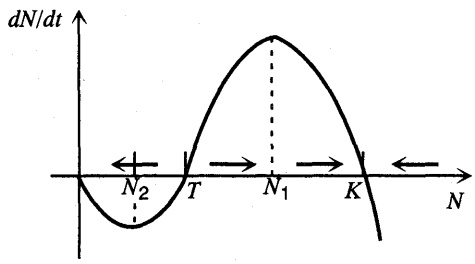


FIGURA 2.6.7 *dN/dt* contra *N* para $dN/dt = -r(1 - N/T)(1 - N/K)N$.

mueva respecto de su posición de ajuste, pero entonces el control automático entrará en acción para amortiguar a la pequeña desviación y colocar nuevamente la aleta en la posición deseada. Sin embargo, si el avión queda atrapado en una fuerte ráfaga, entonces la aleta puede desviarse tanto que el control automático no pueda regresarla a la posición de ajuste (esto correspondería a una desviación mayor que *T*). En tal caso, probablemente el piloto asumiría el control y contrarrestaría en forma manual el sistema automático.

Crecimiento logístico con un umbral. Como se mencionó en la última subsección, puede ser necesario modificar el modelo de umbral (12) de modo que no ocurra crecimiento no acotado cuando *N* esté arriba del umbral *T*. La manera más simple de lograrlo es con la introducción de otro factor que tendrá el efecto de hacer a *dN/dt* negativa cuando *N* es grande. Por tanto, se considera

$$\frac{dN}{dt} = -r\left(1 - \frac{N}{T}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \tag{15}$$

en donde $r > 0$ y $0 < T < K$.

En la figura 2.6.7 se muestra la gráfica de *dN/dt* contra *N*. En este problema existen tres puntos críticos: $N = 0$, $N = T$ y $N = K$, correspondientes a las soluciones de equilibrio $\phi_1(t) = 0$, $\phi_2(t) = T$ y $\phi_3(t) = K$, respectivamente. Con base en la figura 2.6.7 es evidente que $dN/dt > 0$ para $T < N < K$ y, por consiguiente, $N(t)$ es creciente allí. La inversa es cierta para $N < T$ y para $N > K$. Como consecuencia, las soluciones de equilibrio $\phi_1(t)$ y $\phi_3(t)$ son estables y la solución $\phi_2(t)$ es inestable. Las gráficas de $N(t)$ contra t tienen el aspecto cualitativo que se muestra en la figura 2.6.8. Si *N* se inicia por debajo del umbral *T*, entonces *N* decrece hasta su extinción final. Por otra parte, si *N* se inicia por arriba de *T*, entonces $N(t)$ terminará por tender a la capacidad de portación *K*. Los puntos de inflexión de las gráficas de $N(t)$ contra t de la figura 2.6.8 corresponden a los puntos máximo y mínimo, N_1 y N_2, respectivamente, de la gráfica de *dN/dt* contra *N* de la figura 2.6.7. Estos valores pueden obtenerse al derivar con respecto a *N* el segundo miembro de la ecuación (15), igualar el resultado a cero y despejar *N*. Se obtiene

$$N_{1,2} = (K + T \pm \sqrt{K^2 - KT + T^2})/3, \tag{16}$$

en donde el signo positivo da lugar a N_1 y el signo negativo, a N_2.

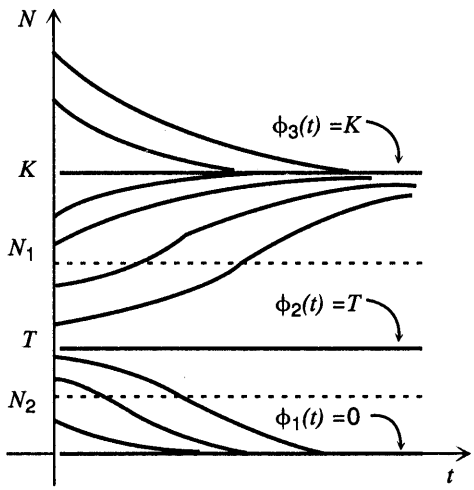


FIGURA 2.6.8 N contra t para $dN/dt = -r(1 - N/T)(1 - N/K)N$.

Aparentemente, un modelo de esta clase general rigió la población de palomas viajeras,[8] que existía en Estados Unidos en grandes números hasta fines del siglo XIX. Estas palomas fueron intensamente cazadas para alimentación y por deporte y, como consecuencia, el número de ellas se redujo drásticamente hacia la década de 1880. Sin embargo, parece que esta paloma pudo multiplicarse bien sólo cuando existió en grandes concentraciones, lo cual corresponde a un umbral T relativamente alto. Aunque a fines de la década de 1880 permanecían vivos un número razonablemente grande de estos pájaros por separado, no existían los suficientes en algún lugar como para permitir que se reprodujeran con éxito, por lo que la población disminuyó con rapidez hasta extinguirse. La última sobreviviente murió en 1914. La disminución precipitada de la población de la paloma viajera desde grandes cantidades hasta la extinción en poco más de tres décadas fue uno de los primeros factores que contribuyeron al interés por la conservación en Estados Unidos.

Problemas

En cada uno de los problemas del 1 al 6, trace la gráfica de dN/dt contra N; determine los puntos críticos (de equilibrio) y clasifique cada uno como estable o inestable.

1. $dN/dt = aN + bN^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad N_0 \geq 0$
2. $dN/dt = aN + bN^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad -\infty < N_0 < \infty$
3. $dN/dt = N(N-1)(N-2), \quad N_0 \geq 0$
4. $dN/dt = e^N - 1, \quad -\infty < N_0 < \infty$
5. $dN/dt = e^{-N} - 1, \quad -\infty < N_0 < \infty$
6. $dN/dt = -2\,(\arctan N)/(1 + N^2), \quad -\infty < N_0 < \infty$

[8] Ver, por ejemplo, la obra de Oliver L. Austin, Jr., *Birds of the World* (New York: Golden Press, 1983), pp. 143-145.

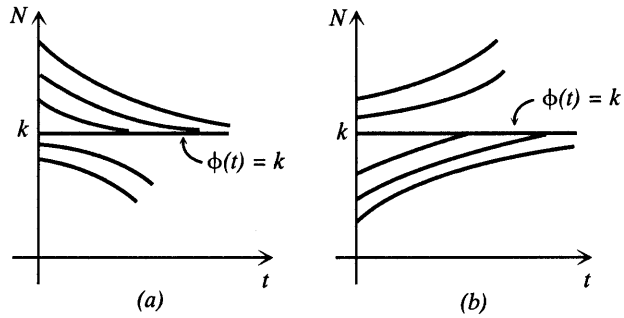


FIGURA 2.6.9 En los dos casos la solución de equilibrio $\phi(t) = k$ es semiestable. a) $dN/dt \leq 0$; b) $dN/dt \geq 0$.

7. **Soluciones de equilibrio semiestable.** Algunas veces una solución de equilibrio constante tiene la propiedad de que las soluciones que están hacia uno de los lados de la solución de equilibrio tienden hacia ésta, en tanto que las soluciones que se encuentran en el otro lado se alejan de ella (ver la figura 2.6.9); en este caso, se dice que la solución de equilibrio es **semiestable.**
   a) Considere la ecuación

$$dN/dt = k(1 - N)^2, \tag{i}$$

   en donde k es una constante positiva. Demuestre que $N = 1$ es el único punto crítico, con la solución de equilibrio correspondiente $\phi(t) = 1$.
   b) Trace la gráfica de dN/dt contra N. Demuestre que N es creciente como función de t, para $N < 1$ y también para $N > 1$. Por tanto, las soluciones que están debajo de la solución de equilibrio tienden a ésta, mientras que las que están arriba crecen alejándose de ella. De donde, $\phi(t) = 1$ es semiestable.
   c) Resuelva la ecuación (i) sujeta a la condición inicial $N(0) = N_0$ y confirme las conclusiones a las que se llegó en el inciso b).

En cada uno de los problemas del 8 al 13, trace la gráfica de dN/dt contra N y determine los puntos críticos (de equilibrio). Clasifique también cada punto de equilibrio como estable, inestable o semiestable (ver el problema 7).

8. $dN/dt = -k(N - 1)^2$, $\quad k > 0, \quad -\infty < N_0 < \infty$
9. $dN/dt = N^2(N^2 - 1)$, $\quad -\infty < N_0 < \infty$
10. $dN/dt = N(1 - N^2)$, $\quad -\infty < N_0 < \infty$
11. $dN/dt = aN - b\sqrt{N}$, $\quad a > 0, \quad b > 0, \quad N_0 \geq 0$
12. $dN/dt = N^2(4 - N^2)$, $\quad -\infty < N_0 < \infty$
13. $dN/dt = N^2(1 - N)^2$, $\quad -\infty < N_0 < \infty$

14. Considere la ecuación $dN/dt = F(N)$ y suponga que N_1 es un punto crítico; es decir, que $F(N_1) = 0$. Demuestre que la solución de equilibrio constante $\phi(t) = N_1$ es estable si $F'(N_1) < 0$ e inestable si $F'(N_1) > 0$.
15. Suponga que cierta población obedece la ecuación logística $dN/dt = rN[1 - (N/K)]$.
   a) Si $N_0 = K/3$, halle el tiempo τ en el que se ha duplicado la población inicial. Encuentre el valor de τ correspondiente a $r = 0.025$ por año.
   b) Si $N_0/K = \alpha$, encuentre el tiempo T en el que $N(T)/K = \beta$, en donde $0 < \alpha, \beta < 1$.

Observe que $T \to \infty$ cuando $\alpha \to 0$ o cuando $\beta \to 1$. Encuentre el valor de T para $r = 0.025$ por año, $\alpha = 0.1$, y $\beta = 0.9$.

16. Otra ecuación que se ha utilizado como modelo de crecimiento de las poblaciones es la ecuación de Gompertz:

$$dN/dt = rN \ln(K/N),$$

en donde r y K son constantes positivas.

a) Trace la gráfica de dN/dt contra N, encuentre los puntos críticos y determine si cada uno es estable o inestable.

b) Para $0 \leq N \leq K$, determine en dónde la gráfica de N contra t es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo.

c) Para cada N en $0 < N \leq K$, demuestre que dN/dt, según se expresa por la ecuación de Gompertz, nunca es menor que dN/dt según se expresa por la ecuación logística.

17. a) Resuelva la ecuación de Gompertz

$$dN/dt = rN \ln(K/N),$$

sujeta a la condición inicial $N(0) = N_0$.

Sugerencia: Es conveniente hacer $u = \ln(N/K)$.

b) Para los datos del ejemplo 1 del texto [$r = 0.71$ por año, $K = 80.5 \times 10^6$ kg. $N_0/K = 0.25$], aplique el modelo de Gompertz para encontrar el valor predicho de $N(2)$.

c) Para los mismos datos del inciso b), use el modelo de Gompertz para encontrar el tiempo τ en el que $N(\tau) = 0.75\,K$.

Aprovechamiento de un recurso renovable. Supóngase que la población $N(t)$ de cierta especie de peces (por ejemplo, atún o hipogloso) en una región dada del océano se describe por la ecuación logística.

$$dN/dt = r(1 - N/K')N.$$

Aunque es deseable utilizar esta fuente de alimento, de manera intuitiva es evidente que si se pescan demasiados peces, entonces su población puede reducirse a menos de un nivel útil y, posiblemente, incluso se la lleve a la extinción. En los problemas 18 y 19 se examinan algunas de las preguntas relacionadas con el planteamiento de una estrategia racional para administrar la pesca.[9]

18. A cierto nivel de esfuerzo, resulta razonable suponer que la rapidez a la que se capturen los peces depende de la población N: mientras más peces haya, más fácil es atraparlos. Por tanto, se supone que la razón a la que se capturan los peces, es decir, el rendimiento Y de la pesca, queda definida por $Y = EN$, en donde E es una constante positiva, cuyas unidades son 1/tiempo y que mide el esfuerzo total realizado para aprovechar la especie dada de peces. A fin de incluir este efecto, la ecuación logística se sustituye por

$$dN/dt = r(1 - N/K')N - EN, \qquad \text{(i)}$$

Esta ecuación se conoce como **modelo de Schaefer**, en honor del biólogo M. B. Schaefer, quien lo aplicó a las poblaciones de peces.

[9] Un excelente tratamiento de este tipo de problema, que va más allá de lo que aquí se presenta, puede encontrarse en el libro de Clark ya mencionado, especialmente en los dos primeros capítulos. Allí se dan numerosas referencias adicionales.

a) Demuestre que si $E < r$, entonces existen dos puntos de equilibrio, $N_1 = 0$ y $N_2 = K(1 - E/r) > 0$.

b) Demuestre que $N = N_1$ es inestable y que $N = N_2$ es estable.

c) Halle el rendimiento sostenible Y como función del esfuerzo E; la gráfica de esta función se conoce como curva rendimiento-esfuerzo.

d) Determine E a fin de hacer máxima a Y y, en consecuencia encuentre el **rendimiento máximo sostenible** Y_m.

19. En este problema se supone que los peces se capturan a una razón constante h independiente del tamaño de la población de los mismos; entonces N satisface

$$dN/dt = r(1 - N/K)N - h. \tag{i}$$

La hipótesis de una razón constante de captura h puede ser razonable cuando N es grande, aunque se vuelve menos razonable cuando N es pequeña.

a) Si $h < rK/4$, demuestre que la ecuación (i) tiene dos puntos de equilibrio N_1 y N_2 con $N_1 < N_2$; determinar estos puntos.

b) Demuestre que N_1 es inestable y que N_2 es estable.

c) A partir de una gráfica de dN/dt contra N, demuestre que si la población inicial $N_0 > N_1$, entonces $N(t) \to N_2$ cuando $t \to \infty$, pero que si $N_0 < N_1$, entonces $N(t)$ decrece cuando t crece. Note que $N = 0$ no es un punto de equilibrio, de modo que si $N_0 < N_1$, entonces se llega a la extinción en un tiempo finito.

d) Si $h > rk/4$, demuestre que $N(t)$ decrece hasta cero cuando t crece, sin importar el valor de N_0.

e) Si $h = rk/4$, demuestre que existe un sólo punto de equilibrio $N = K/2$, y que este punto es semiestable (ver el problema 7). Por tanto, el rendimiento máximo sostenible es $h_m = rK/4$, correspondiente al valor de equilibrio $N = K/2$. Observe que h_m tiene el mismo valor que Y_m del problema 18 d). Se considera que la pesca está sobre explotada si N se reduce hasta un nivel por debajo de $K/2$.

Epidemias. El empleo de los métodos matemáticos para estudiar la propagación de enfermedades contagiosas se remonta por lo menos hasta algunos trabajos de Daniel Bernoulli sobre la viruela, en 1760. En años más recientes se han propuesto y estudiado muchos modelos matemáticos para muchas enfermedades diferentes.[10] En los problemas 20 al 22 se tratan algunos de los modelos más sencillos y las conclusiones que es posible obtener de ellos. También se han utilizado modelos semejantes para describir la propagación de rumores y de productos para el consumidor.

20. Suponga que una población dada puede dividirse en dos partes: aquellos que tienen una enfermedad dada y pueden contagiar a los demás, y aquellos que no la tienen pero son susceptibles de adquirirla. Sea x la proporción de individuos susceptibles y y la proporción de individuos infectados; entonces $x + y = 1$. Suponga que la enfermedad se propaga por contacto entre los miembros enfermos y los sanos de la población y que la razón de propagación dy/dt es proporcional al número de esos contactos. Además, suponga que los miembros de los dos grupos se desplazan libremente entre sí, de modo que el número de contactos es proporcional al producto de x y y. Como $x = 1 - y$, se obtiene el problema con valor inicial

$$dy/dt = \alpha y(1 - y), \qquad y(0) = y_0, \tag{i}$$

[10] Una fuente común es el libro de Bailey que se lista en la bibliografía. Los modelos de los problemas 20 al 22 son analizados por Bailey en los capítulos 5, 10 y 20, respectivamente.

en donde α es un factor de proporcionalidad positivo y y_0 es la proporción inicial de individuos infectados.

a) Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial (i) y determine si cada uno es estable o inestable.

b) Resuelva el problema con valor inicial (i) y verifique que las conclusiones a las que llegó en el inciso a) son correctas. Demuestre que $y(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$, lo cual significa que la enfermedad terminará por propagarse en toda la población.

21. Algunas enfermedades (como la fiebre tifoidea) son propagadas en gran medida por *portadores*, individuos que pueden transmitir la enfermedad aunque no presentan síntomas evidentes. Sean x y y, respectivamente, la proporción de individuos susceptibles y portadores en la población. Suponga que se identifican los portadores y se retiran de la población a una razón β, de modo que

$$dy/dt = \beta y. \tag{i}$$

Suponga también que la enfermedad se propaga a una razón proporcional al producto de x y y; entonces,

$$dx/dt = -\alpha xy. \tag{ii}$$

a) Determine y en cualquier instante t al resolver la ecuación (i) sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$.

b) Aplique el resultado del inciso a) para hallar x en cualquier instante al resolver la ecuación (ii) sujeta a la condición inicial $x(0) = x_0$.

c) Encuentre la proporción de la población que escapa de la epidemia, al hallar el valor límite de x cuando $t \to \infty$.

22. El trabajo de Daniel Bernoulli en 1760 tuvo como meta valorar la eficacia de un polémico programa de inoculación en contra de la viruela, que en esa época representaba una importante amenaza para la salud pública. Su modelo se aplica con igual propiedad a cualquiera otra enfermedad que, una vez contraída y haber sobrevivido, confiere inmunidad de por vida.

Considere el grupo de individuos nacidos un año dado ($t = 0$), y sean $n(t)$ el número de estos individuos que sobreviven t años después. Sea $x(t)$ el número de miembros de este grupo que para el año t no han tenido viruela y que, por consiguiente, siguen siendo susceptibles. Sean β la razón a la que los susceptibles contraen la viruela, y μ la razón a la que quienes contraen la viruela fallecen debido a ésta. Por último, sea $\mu(t)$ el índice de mortalidad debido a todas las causas diferentes de la viruela. Entonces dx/dt, la razón a la que disminuye el número de susceptibles, se expresa por

$$dx/dt = -[\beta + \mu(t)]x; \tag{i}$$

el primer término del segundo miembro de la ecuación (i) es la razón a la que los sujetos susceptibles contraen la viruela, mientras que el segundo término es la razón a la que fallecen debido a otras causas. También,

$$dn/dt = -v\beta x - \mu(t)n, \tag{ii}$$

en donde dn/dt es el índice de mortalidad de todo el grupo, y los dos términos del segundo miembro son los índices de mortalidad debido a la viruela y otras causas, respectivamente.

a) Haga $z = x/n$ y demuestre que z satisface el problema con valor inicial

$$dz/dt = -\beta z(1 - vz), \qquad z(0) = 1. \tag{iii}$$

Observe que el problema con valor inicial (iii) no depende de $\mu(t)$.
b) Encuentre $z(t)$ al resolver la (iii).
c) Bernoulli estimó que $v = \beta = \frac{1}{8}$. Usando estos valores, determine la proporción de personas de 20 años de edad que no han tenido viruela.
Nota: Con base en el modelo antes descrito y en los mejores datos sobre mortalidad disponibles en la época, Bernoulli calculó que si pudieran eliminar los fallecimientos debidos a la viruela ($v = 0$), entonces a la esperanza media de vida (en 1760) de 26 años 7 meses podrían sumarse aproximadamente 3 años; por consiguiente, apoyó el programa de inoculación.

23. **Teoría de la bifurcación**. En muchos problemas físicos alguna cantidad observable, como una velocidad, forma de onda o reacción química, depende de un parámetro que describe el estado físico. A medida que aumenta este parámetro, se alcanza un valor crítico en que la velocidad, forma de onda o reacción cambia repentinamente su carácter. Por ejemplo, al aumentar la cantidad de uno de los compuestos químicos de una mezcla, en un fluido originalmente estático, repentinamente surgen patrones de onda en espiral de color cambiante. En muchos de estos casos el análisis matemático produce finalmente una ecuación[11] de la forma

$$dx/dt = (R - R_c)x - ax^3. \tag{i}$$

Aquí a y R_c son constantes positivas y R es un parámetro que puede tomar varios valores. Por ejemplo, R puede medir la cantidad de cierto compuesto químico y x puede medir una reacción química.
a) Si $R < R_c$, demuestre que sólo existe una solución de equilibrio $x = 0$ y que es estable.
b) Si $R > R_c$, demuestre que existen tres soluciones de equilibrio, $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{(R - R_c)/a}$, y que la primera solución es inestable, en tanto que las otras dos son estables.
c) Trace una gráfica en el plano Rx que muestre todas las soluciones de equilibrio e identifique cada una de ellas como estable o inestable.

El punto $R = R_c$ se llama **punto de bifurcación**. Para $R < R_c$, se observa la solución de equilibrio estable $x = 0$. Sin embargo, esta solución pierde su estabilidad al pasar R por el valor R_c, y para $R > R_c$ las soluciones estables (y por tanto las observables) son $x = \sqrt{(R - R_c)/a}$ y $x = -\sqrt{(R - R_c)/a}$. Debido a la manera en la que las soluciones se ramifican en R_c, este tipo de bifurcación se le conoce como bifurcación de horquilla; su gráfica debe sugerir que este nombre resulta adecuado.

24. **Reacciones químicas**. Una reacción química de segundo orden comprende la interacción (colisión) de una molécula de una sustancia P con una molécula de una sustancia Q para producir una molécula de una nueva sustancia X; esto se denota por $P + Q \rightarrow X$. Suponga que p y q, en donde $p \neq q$, son las concentraciones iniciales de P y Q, respectivamente, y sea $x(t)$ la concentración de X en el instante t. Entonces $p - x(t)$ y $q - x(t)$ son las concentraciones de P y Q en el instante t, y la rapidez a la que ocurre la reacción se expresa por la ecuación

[11] En mecánica de fluidos, la ecuación (i) surge en el estudio de la transición del flujo laminar al turbulento; en esos estudios a menudo se le menciona como ecuación de Landau. L. D. Landau (1908-1968) fue un físico ruso que recibió el premio Nobel en 1962 por sus contribuciones al conocimiento de los estados condensados, en especial el helio líquido. También fue coautor, con E. M. Lifschitz, de una serie bastante conocida de libros de texto de física.

$$dx/dt = \alpha(p - x)(q - x), \tag{i}$$

en donde α es una constante positiva.

a) Si $x(0) = 0$, determine el valor límite de $x(t)$ cuanto $t \to \infty$, sin resolver la ecuación diferencial. Luego, resuelva el problema con valor inicial y encuentre $x(t)$ para cualquier t.

b) Si las sustancias P y Q son las mismas, entonces $p = q$ y la ecuación (i) se sustituye por

$$dx/dt = \alpha(p - x)^2, \tag{ii}$$

Si $x(0) = 0$, determine el valor límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$, sin resolver la ecuación diferencial. Luego, resuelva el problema con valor inicial y determine $x(t)$ para cualquier t.

2.7 Algunos problemas de mecánica

Algunas de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones diferenciales de primer orden se encuentran en el dominio de la mecánica elemental. En esta sección se considerarán algunos problemas en los que interviene el movimiento de un cuerpo rígido a lo largo de una recta. Se supondrá que estos cuerpos obedecen la ley de Newton del movimiento: *el producto de la masa y la aceleración es igual a la fuerza externa.* En símbolos,

$$F = ma, \tag{1}$$

en donde F es la fuerza externa, m es la masa del cuerpo y a es la aceleración en la dirección de F.

Hay tres sistemas de unidades que se usan comúnmente. En el sistema cgs, las unidades básicas son el centímetro (longitud), el gramo (masa) y el segundo (tiempo). La unidad de fuerza, la dina, se define mediante la ecuación (1) como la fuerza necesaria para impartir una aceleración de 1 cm/s^2 a una masa de 1 g. Como una dina es una fuerza muy pequeña, a menudo es preferible usar el sistema mks en el que las unidades básicas son el metro (longitud), el kilogramo (masa) y el segundo (tiempo). La unidad de fuerza, el newton (N), se define mediante la ecuación (1) como la fuerza necesaria para impartir una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg. Por último, en el sistema inglés, o de ingeniería, las unidades básicas son el pie (longitud), la libra (fuerza) y el segundo (tiempo).

La unidad de masa, el slug, se define por la ecuación (1) como la masa a la que una fuerza de 1 lb le da una aceleración de 1 pie/s^2. Para comparar los tres sistemas, observe que 1 N es igual a 10^5 dinas y a 0.255 lb.

Considérese ahora un cuerpo que cae libremente en un vacío y lo suficientemente cerca de la superficie terrestre, de modo que la única fuerza significativa que actúa sobre ese cuerpo es su peso debido al campo gravitacional de la Tierra. Entonces, la ecuación (1) toma la forma

$$w = mg \tag{2}$$

en donde w es el peso del cuerpo y g denota su aceleración debida a la gravedad.

Aunque la masa del cuerpo permanezca constante, su peso y aceleración gravitacional cambian con la distancia al centro del campo gravitacional de la Tierra. Al nivel del mar, se ha determinado experimentalmente que el valor de g es 32 pies/s^2 (sistema inglés), 980 cm/s^2 (sistema cgs) o 9.8 m/s^2 (sistema mks). Se acostumbra denotar por g la aceleración gravita-

cional al *nivel del mar*; por tanto, g es una constante. Con esta aclaración, la ecuación (2) sólo es exacta al nivel del mar.

La expresión general para el peso de un cuerpo de masa m se obtiene a partir de la ley de Newton del cuadrado inverso de la atracción gravitacional. Si R es el radio de la Tierra y x es la altitud por encima del nivel del mar, entonces

$$w(x) = \frac{K}{(R + x)^2} \tag{3}$$

en donde K es una constante. En $x = 0$ (nivel del mar), $w = mg$; de donde, $K = mgR^2$ y

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(R + x)^2}. \tag{4}$$

Al desarrollar $(R + x)^{-2}$ en una serie de Taylor en torno a $x = 0$ se llega a

$$w(x) = mg\left(1 - 2\frac{x}{R} + \cdots\right). \tag{5}$$

Se concluye que si, en comparación con la unidad, se pueden despreciar los términos del orden de magnitud de x/R, entonces la ecuación (4) puede sustituirse por la aproximación más simple (2). Por tanto, para movimientos en la vecindad de la superficie terrestre, o en caso de que no se requiera una exactitud extrema, por lo general basta con utilizar la (2). En otros casos, como en los problemas relacionados con vuelos espaciales, puede ser necesario usar la (4) o por lo menos una mejor aproximación que la (2).

En muchos casos, la fuerza externa F incluye los efectos que no son el peso del cuerpo. Por ejemplo, es posible que sea necesario considerar las fuerzas de fricción debidas a la resistencia presentada por el aire o algún otro medio circundante. De manera semejante, pueden ser importantes los efectos de los cambios de masa, como en el caso de un vehículo espacial que consume su combustible durante el vuelo.

En los problemas que se consideran aquí resulta útil describir el movimiento del cuerpo con referencia a algún sistema conveniente de coordenadas. Siempre se elige el eje x como la recta a lo largo de la cual se efectúa el movimiento; la dirección positiva del eje x puede

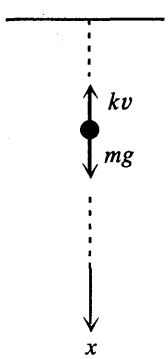


FIGURA 2.7.1 Una masa que cae en un medio que opone resistencia ($v > 0$).

elegirse de manera arbitraria. Una vez que se especifica la dirección x positiva, un valor positivo de x indica un desplazamiento en esta dirección, un valor positivo de $v = dx/dt$ indica que el cuerpo se desplaza en la dirección del eje x positivo, un valor positivo de una fuerza F indica que ésta actúa en la dirección x positiva, etcétera. Los siguientes ejemplos tratan algunos problemas comunes.

Ejemplo 1 Se deja caer desde el reposo un objeto de masa m en un medio que presenta una resistencia proporcional a v, la magnitud de la velocidad instantánea del objeto.[12] Si se supone que la fuerza gravitacional es constante, determinar la posición y la velocidad del objeto en cualquier instante t.

En este caso es conveniente trazar el eje x positivo hacia abajo con el origen en la posición inicial del objeto (ver la figura 2.7.1). El peso mg del objeto actúa entonces en la dirección hacia abajo (positiva), pero la resistencia $k|v|$, en donde k es una constante positiva, actúa para impedir el movimiento. Si $v > 0$, la resistencia es en la dirección hacia arriba (negativa) y, por tanto, se expresa por $-kv$. Si $v < 0$, la resistencia actúa hacia abajo y todavía se expresa por $-kv$. Por tanto, en todos los casos es posible escribir la ley de Newton como

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

o bien,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \tag{6}$$

La ecuación (6) es una ecuación lineal de primer orden y tiene el factor integrante $e^{kt/m}$. La solución de (6) es

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m}. \tag{7}$$

La condición inicial $v(0) = 0$ requiere que $c_1 = -mg/k$; por tanto,

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}). \tag{8}$$

Para obtener la posición x del cuerpo, en la ecuación (8) se sustituye v por dx/dt; al integrar y aplicar la segunda condición inicial $x(0) = 0$ da

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}). \tag{9}$$

La posición y la velocidad del cuerpo en cualquier instante t quedan dadas por las ecuaciones (9) y (8), respectivamente.

[12] En general, la resistencia es una función de la velocidad, es decir, de la magnitud de la velocidad. La hipótesis de una relación lineal es razonable sólo para velocidades comparativamente bajas. Si se tienen velocidades mayores puede ser necesario suponer que la resistencia es proporcional a alguna potencia superior de v o incluso que se expresa por alguna función polinomial de $|v|$.

Vale la pena hacer notar que cuando $t \to \infty$ en la ecuación (7), la velocidad tiende al valor límite

$$v_1 = mg/k \tag{10}$$

La velocidad límite también puede obtenerse directamente a partir de la ecuación diferencial (6) al hacer $dv/dt = 0$ y luego despejar v en (6). La velocidad límite v_l no depende de las condiciones iniciales, sino sólo de la masa del objeto y del coeficiente de resistencia del medio. Dada v_l o k, la ecuación (10) proporciona una fórmula para calcular la otra. Cuando k tiende a cero (es decir, que la resistencia disminuye), la velocidad límite aumenta indefinidamente.

Ejemplo 2 Desde la superficie de la Tierra se proyecta hacia arriba un cuerpo de masa constante m con una velocidad inicial v_0. Si se supone que no hay resistencia del aire, pero se toma en cuenta la variación del campo gravitacional terrestre con la altitud, encontrar una expresión para la velocidad durante el movimiento subsecuente. Encontrar también la velocidad inicial necesaria para que el cuerpo alcance una altitud máxima dada ξ por encima de la superficie terrestre y la menor velocidad inicial para que el cuerpo no regrese a la Tierra; esta última velocidad es la **velocidad de escape**.

Tome el eje x positivo hacia arriba, con el origen en la superficie de la Tierra; ver la figura 2.7.2. El peso del cuerpo actúa hacia abajo y está dado por

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R + x)^2}, \tag{11}$$

en donde el signo negativo significa que $w(x)$ está dirigido en la dirección x negativa. En virtud de que no existen otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo, la ecuación del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R + x)^2}, \tag{12}$$

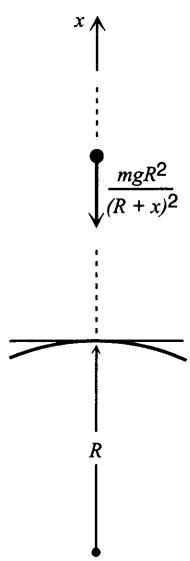


FIGURA 2.7.2 Un cuerpo en el campo gravitacional de la Tierra.

y la condición inicial es

$$v(0) = v_0. \tag{13}$$

Dado que el segundo miembro de (12) sólo depende de x, es conveniente considerar a x, en vez de t, como la variable independiente. Esto requiere que se exprese dv/dt en términos de dv/dx por la regla de la cadena; de donde,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

y (12) se reemplaza por

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}. \tag{14}$$

Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c. \tag{15}$$

Como $x = 0$ cuando $t = 0$, entonces la condición inicial (13) en $t = 0$ puede sustituirse por la condición de que $v = v_0$ cuando $x = 0$. De donde, $c = (r_0^2/2) - gR$ y

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}}. \tag{16}$$

Observe que la ecuación (16) da la velocidad como una función de la altitud, en vez de como una función del tiempo. Debe elegirse el signo positivo si el cuerpo está ascendiendo y el negativo si el cuerpo está cayendo de regreso a la Tierra.

Para determinar la altitud máxima ξ que el cuerpo alcanza, se hace $v = 0$ y $x = \xi$ en la (16) y luego se despeja ξ, con lo que se obtiene

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}. \tag{17}$$

Al despejar v_0 en la (17) se encuentra la velocidad inicial requerida para elevar el cuerpo hasta la altitud ξ; a saber,

$$v_0 = \sqrt{2gR\frac{\xi}{R+\xi}}. \tag{18}$$

Entonces se encuentra la velocidad de escape v_e al hacer que $\xi \to \infty$. Por consiguiente,

$$v_e = \sqrt{2gR}. \tag{19}$$

El valor numérico de v_e es aproximadamente de 6.9 millas/s o bien, 11.1 km/s.

En el cálculo anterior de la velocidad de escape se desprecia el efecto de la resistencia del aire, de modo que la velocidad de escape real (incluye el efecto de la resistencia del aire) es algo mayor. Por otra parte, la velocidad de escape efectiva puede reducirse de manera importante si el cuerpo se transporta a una distancia considerable por encima del nivel del mar, antes de su lanzamiento.

En consecuencia, se reducen las fuerzas gravitacional y de fricción; en especial, la resistencia del aire disminuye con bastante rapidez al aumentar la altitud. También debe tenerse presente que puede ser impráctico impartir de manera instantánea una velocidad inicial demasiado grande; por ejemplo, los vehículos espaciales reciben su aceleración inicial durante un periodo de minutos.

Problemas

1. Una bola de masa de 0.25 kg se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s desde el techo de un edificio que tiene 30 m de altura. Desprecie la resistencia del aire.
   a) Encuentre la altura máxima que alcanza la bola por arriba del piso.
   b) Si se supone que en su trayecto hacia abajo la bola no cae en el edificio, halle el tiempo que transcurre hasta que choca contra el piso.
2. Suponga que las condiciones son como las del problema 1, excepto en que existe una fuerza de $|v|/30$ debida a la resistencia del aire, en donde v está dada en metros por segundo.
   a) Encuentre la altura máxima que alcanza la bola por arriba del piso.
   b) Encuentre el tiempo que transcurre hasta que la bola choca contra el piso.
   Sugerencia: aplique el método de Newton, o algún otro procedimiento numérico adecuado, en el inciso b).
3. Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Si se supone que la atracción gravitacional de la Tierra es constante, y se desprecian todas las demás fuerzas que actúan sobre el cuerpo, halle
   a) La altura máxima alcanzada por el cuerpo.
   b) El tiempo en el que se alcanza la altura máxima.
   c) El tiempo en el que el cuerpo regresa a su punto de partida.
4. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuentre la velocidad v como una función del tiempo t. Encuentre la velocidad límite v_l a la que se tiende después de mucho tiempo.
5. Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Halle el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.
6. Un bote de motor y su tripulante pesan juntos 320 lb. Si el empuje del motor es equivalente a una fuerza constante de 10 lb en la dirección del movimiento, si la resistencia del agua al movimiento es numéricamente igual al doble de la velocidad en pies por segundo y si el bote se encuentra inicialmente en reposo, determine
   a) La velocidad del bote en el instante t.
   b) La velocidad límite.
7. Un paracaidista que pesa 180 lb (incluyendo el equipo) cae verticalmente desde una altura de 5 000 pies, y abre su paracaídas después de 10 segundos de caída libre. Suponga que la fuerza de la resistencia del aire es de $0.7|v|$ cuando el paracaídas está cerrado y de $12|v|$ cuando el paracaídas está abierto, en donde la velocidad v se da en pies por segundo.
   a) Encuentre la velocidad del paracaidista al abrirse el paracaídas.
   b) Halle la distancia que cae antes de que se abra el paracaídas.
   c) ¿Cuál es la velocidad límite v_l después de que se abre el paracaídas?
   d) Estime cuánto tiempo permanece el paracaidista en el aire después de que el paracaídas se abre.

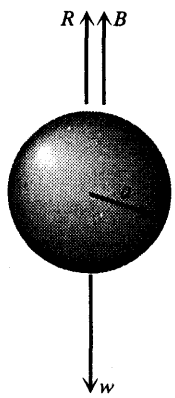


FIGURA 2.7.3 Un cuerpo que cae en un fluido denso.

8. Un cuerpo de masa m se proyecta verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0 en un medio que presenta una resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad. Encuentre la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuentre la velocidad límite.
9. Un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio que presenta una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Determine la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Determine la velocidad límite.
10. Un cuerpo de masa m cae en un medio que ofrece una resistencia proporcional a $|v|^r$, en donde r es una constante positiva. Si se supone que la atracción gravitacional es constante, encuentre la velocidad límite del cuerpo.
11. Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que presenta una resistencia $k|v|$, en donde k es una constante. Despréciense los cambios en la fuerza de la gravedad.
    a) Encuentre la altura máxima x_m que alcanza el cuerpo y el instante t_m en el que alcanza esta altura máxima.
    b) Demuestre que si $kv_0/mg < 1$, entonces t_m y x_m pueden expresarse como
$$t_m = \frac{v_0}{g}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$
$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right].$$
12. Un cuerpo de masa m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia $k|v|$, en donde k es una constante. Suponga que la atracción gravitacional de la Tierra es constante.
    a) Determine la velocidad $v(t)$ del cuerpo en cualquier instante.
    b) Aplique el resultado del inciso a) para calcular el límite de $v(t)$ cuando $k \to 0$; es decir, a medida que la resistencia tiende a cero. ¿Concuerda este resultado con la velocidad de una masa m proyectada hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un vacío?
    c) Aplique el resultado del inciso a) para calcular el límite de $v(t)$ cuando $m \to 0$; es decir, a medida que la masa tiende a cero.
13. Sobre un cuerpo que cae en un líquido relativamente denso, por ejemplo aceite, actúan tres fuerzas (ver la figura 2.7.3): una fuerza de resistencia R, una fuerza de empuje B y su

peso w debido a la gravedad. La fuerza de empuje es igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Para un cuerpo esférico de radio a que se mueve lentamente, la fuerza de resistencia queda definida por la ley de Stokes[13] $R = 6\pi\mu a|v|$, en donde v es la velocidad del cuerpo y μ es el coeficiente de viscosidad del fluido circundante.

a) Encuentre la velocidad límite de una esfera maciza de radio a y densidad ρ que cae libremente en un medio de densidad ρ' y coeficiente de viscosidad μ.

b) En 1910, el físico estadounidense R. A. Millikan (1868-1953) determinó la carga de un electrón al estudiar el movimiento de gotas de aceite diminutas al caer en un campo eléctrico. Un campo de intensidad E ejerce una fuerza Ee sobre una gota con carga e. Suponga que se ha ajustado E de modo que la gota se mantenga estacionaria ($v = 0$) y que w y B son como se dan en el inciso a). Encuentre una fórmula para e. Millikan pudo identificar e como la carga sobre un electrón y determinar que $e = 4.803 \times 10^{-10}$ ues.

14. Una masa de 0.25 kg se deja caer desde el reposo en un medio que presenta una resistencia de $0.2|v|$, en donde v se da en metros/segundo.

a) Si la masa se deja caer desde una altura de 30 m, determine su velocidad al chocar contra el piso.

b) Si la masa debe alcanzar una velocidad no mayor de 10 m/s, encuentre la altura máxima desde la que puede dejarse caer.

*c) Suponga que la fuerza de resistencia es $k|v|$, en donde v se da en metros/segundo y k es una constante. Si la masa se deja caer desde una altura de 30 m y debe chocar contra el piso con una velocidad no mayor de 10 m/s, determine el coeficiente de resistencia k que se requiere.

15. Suponga que se lanza un cohete directamente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial $v_0\sqrt{2gR}$, en donde R es el radio de la Tierra. Despréciese la resistencia del aire.

a) Encuentre una expresión para la velocidad v en términos de la distancia x desde la superficie de la Tierra.

b) Encuentre el tiempo necesario para que el cohete recorra 240 000 millas (la distancia aproximada de la Tierra a la Luna). Supóngase que $R = 4\,000$ millas.

16. Determine la velocidad de escape para un cuerpo que se proyecta hacia arriba con una velocidad inicial v_0 desde un punto $x_0 = \xi R$ arriba de la superficie terrestre, en donde R es el radio de la tierra y ξ es una constante. Despréciese la resistencia del aire. Halle la altitud inicial desde la que debe lanzarse el cuerpo a fin de reducir la velocidad de escape a un 85% de su valor en la superficie terrestre.

17. **Problema de la braquistócrona**. Uno de los problemas famosos en la historia de las matemáticas es el de la braquistócrona; hallar la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará sin fricción en el tiempo mínimo, de un punto P a otro Q, en donde el segundo punto está más bajo que el primero, pero no directamente debajo de éste (ver la figura 2.7.4). Este problema fue propuesto por Johann Bernoulli como un desafío para los matemáticos de su época. Johann Bernoulli y su hermano Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz y el Marqués de L'Hopital encontraron soluciones correctas. El problema de la braquistocrona es importante en el desarrollo de las matemáticas como uno de los precursores del cálculo de variaciones.

[13] George Gabriel Stokes (1819-1903), profesor en Cambridge, fue uno de los matemáticos aplicados más destacados del siglo XIX. A las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos (las ecuaciones de Navier-Stokes) se les dio nombre parcialmente en su honor, y uno de los teoremas fundamentales del cálculo vectorial también lleva su nombre. Fue también uno de los pioneros en el uso de las series divergentes (asintóticas), tema de gran interés e importancia en la actualidad.

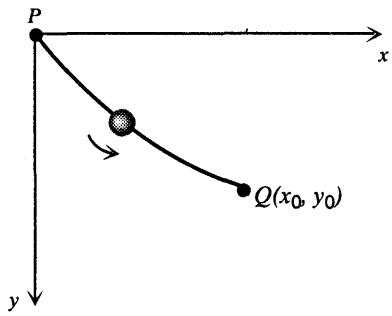


FIGURA 2.7.4 La braquistócrona.

Al resolver este problema es conveniente tomar el origen como el punto superior P y orientar los ejes como se muestra en la figura 2.7.4. El punto inferior Q tiene las coordenadas (x_0, y_0). Entonces, es posible demostrar que la curva de tiempo mínimo queda definida por una función $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$(1 + y'^2)y = k^2, \tag{i}$$

en donde k^2 es cierta constante positiva que debe determinarse posteriormente.

a) Despeje y' en la ecuación (i). ¿Por qué es necesario elegir la raíz cuadrada positiva?

b) Introduzca la nueva variable t mediante la relación

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 t. \tag{ii}$$

Demuestre que la ecuación que encontró en el inciso a) toma entonces la forma

$$2k^2 \operatorname{sen}^2 t \, dt = dx. \tag{iii}$$

c) Si se hace $\theta = 2t$, demuestre que la solución de (iii) para la que $x = 0$ cuando $y = 0$ se expresa por

$$x = k^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)/2, \qquad y = k^2(1 - \cos\theta)/2. \tag{iv}$$

Las ecuaciones (iv) son ecuaciones paramétricas de la solución de (i) que pasa por (0, 0). La gráfica de las ecuaciones (iv) se llama **cicloide**. Si se hace una elección adecuada de la constante k, entonces la cicloide también pasa por el punto (x_0, y_0) y es la solución del problema de la braquistócrona. Es posible eliminar θ y obtener la solución en la forma $y = \phi(x)$; sin embargo, es más fácil usar las ecuaciones paramétricas.

2.8 Ecuaciones exactas y factores integrantes

Ya se mencionó que para las ecuaciones no lineales de primer orden existen varios métodos de integración aplicables a diversas clases de problemas. En las secciones 2.8, 2.9 y en algunos de los problemas de la sección 2.10 se describen los más útiles de estos métodos. Sin embargo, es necesario tener presente que aquellas ecuaciones de primer orden que pueden resolverse por medio de métodos elementales de integración son más bien especiales; la mayor parte de las ecuaciones de primer orden no pueden resolverse de esta manera.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0. \tag{1}$$

La ecuación no es lineal ni separable, de modo que los métodos apropiados para esos tipos de ecuaciones no son aplicables en este caso. Sin embargo, obsérvese que la función $\psi(x, y) = x^2 + xy^2$ tiene la propiedad de que

$$2x + y^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad 2xy = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{2}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Si se supone que y es una función de x y se aplica la regla de la cadena, la ecuación (3) puede escribirse en la forma equivalente

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0. \tag{4}$$

Por lo tanto,

$$x^2 + xy^2 = c, \tag{5}$$

en donde c es una constante arbitraria, es una expresión implícita de la solución de la ecuación (1).

Al resolver (1), el paso clave fue el reconocimiento de que existe una función ψ que satisface a (2). En términos más generales, sea la ecuación diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \tag{6}$$

Suponga que es posible identificar una función ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \tag{7}$$

y tal que $\psi(x, y) = c$ define implícitamente $y = \phi(x)$ como una función diferenciable de x; entonces,

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)]$$

y la ecuación diferencial (6) se transforma en

$$\frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)] = 0. \tag{8}$$

En este caso, se dice que (6) es una ecuación diferencial **exacta**. La solución de la **ecuación** (6), o de la ecuación equivalente (8), queda dada implícitamente por

$$\psi(x, y) = c, \tag{9}$$

en donde c es una constante arbitraria.

En el ejemplo 1 fue relativamente fácil ver que la ecuación diferencial era exacta y, de hecho, fue fácil encontrar su solución al identificar la función ψ requerida. En ecuaciones más complicadas, puede ser que esto no sea tan fácil. El siguiente teorema proporciona una manera sistemática de determinar si una ecuación diferencial dada es exacta.

Teorema 2.8.1

Sean las funciones M, N, M_y y N_x, en donde los subíndices denotan derivadas parciales, continuas en la región rectangular[14] R: $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Entonces (6),

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

es una ecuación diferencial exacta si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{10}$$

en cada punto de R. Es decir, existe una función ψ que satisface las ecuaciones (7).

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y),$$

si y sólo si M y N satisfacen la ecuación (10).

La demostración de este teorema se hace en dos partes. Primero, se demuestra que si existe una función ψ tal que las ecuaciones (7) son verdaderas, entonces se concluye que se cumple la ecuación (10). Al calcular M_y y N_x a partir de las ecuaciones (7), se obtiene

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \qquad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y). \tag{11}$$

Como M_y y N_x son continuas, se deduce que ψ_{xy} y ψ_{yx} también son continuas; esto garantiza su igualdad[15] y se llega a la ecuación (10).

Ahora se demostrará que si M y N satisfacen la ecuación (10), entonces la (6) es exacta. La demostración comprende la construcción de una función ψ que satisfaga las ecuaciones (7),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

Al integrar con respecto a x la primera de las ecuaciones (7), manteniendo y, constante se encuentra que

$$\psi(x, y) = \int M(x, y)\, dx + h(y). \tag{12}$$

[14] No es esencial que la región sea rectangular, sólo que sea simplemente conexa. En dos dimensiones esto significa que la región no tenga huecos en su interior. En tal caso, por ejemplo, las regiones rectangulares o circulares son simplemente conexas, pero una región anular no lo es. En la mayoría de los textos de cálculo avanzado pueden encontrarse más detalles.

[15] Se requiere la hipótesis de continuidad, ya que de lo contrario ψ_{xy} y ψ_{yx} pueden no ser iguales.

La función h es una función arbitraria de y, que actúa como la constante arbitraria. Ahora es necesario demostrar que siempre es posible elegir $h(y)$ de modo que $\psi_y = N$. Por la ecuación (12),

$$\psi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx + h'(y)$$
$$= \int M_y(x, y)\,dx + h'(y).$$

Si se hace $\psi_y = N$ y se despeja $h'(y)$ da

$$h'(y) = N(x, y) - \int M_y(x, y)\,dx. \tag{13}$$

Para determinar $h(y)$ a partir de la ecuación (13) es esencial que, a pesar de su apariencia, el segundo miembro de (13) sea una función sólo de y. Para establecer este hecho es posible derivar con respecto a x la cantidad en cuestión, con lo que se obtiene

$$N_x(x, y) - M_y(x, y),$$

que es cero en virtud de la ecuación (10). De donde, a pesar de su forma aparente, el segundo miembro de (13) en efecto no depende de x y una sola integración da $h(y)$. Al sustituir $h(y)$ en (12), se obtiene como la solución de las ecuaciones (7)

$$\psi(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \int \left[N(x, y) - \int M_y(x, y)\,dx\right] dy. \tag{14}$$

Es necesario hacer notar que esta demostración contiene un método para el cálculo de $\psi(x, y)$ y, por tanto, para resolver la ecuación diferencial original (6). Por lo general es mejor pasar por este proceso cada vez que sea necesario, en vez de intentar recordar el resultado que se da en la ecuación (14). Nótese también que la solución se obtuvo en forma implícita; puede o no ser factible hallar la solución explícitamente.

Ejemplo 2 Resolver la ecuación diferencial

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)y' = 0. \tag{15}$$

Es fácil ver que

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y),$$

de modo que la ecuación dada es exacta. Por tanto, existe una función $\psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y,$$
$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1.$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones se obtiene

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2e^y + h(y). \tag{16}$$

Si se hace $\psi_y = N$ da

$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + h'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1.$$

Por tanto, $h'(y) = -1$ y $h(y) = -y$. Puede omitirse la constante de integración ya que cualquier solución de la ecuación precedente es satisfactoria; no se requiere la más general. Al sustituir $h(y)$ en la ecuación (16) da

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2e^y - y.$$

De donde, la solución de la (15) queda dada implícitamente por

$$y \operatorname{sen} x + x^2e^y - y = c. \tag{17}$$

Ejemplo 3 Resolver la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0. \tag{18}$$

En este caso,

$$M_y(x, y) = 3x + 2y, \qquad N_x(x, y) = 2x + y;$$

dado que $M_y \neq N_x$, la ecuación dada no es exacta. A fin de ver que no es posible resolverla por el procedimiento antes descrito, trátese de encontrar una función ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = 3xy + y^2, \qquad \psi_y(x, y) = x^2 + xy. \tag{19}$$

Al integrar la primera de las ecuaciones (19) da

$$\psi(x, y) = \tfrac{3}{2}x^2y + xy^2 + h(y), \tag{20}$$

en donde h es una función arbitraria sólo de y. Para intentar satisfacer la segunda de las ecuaciones (19), a partir de la (20) se calcula ψ_y y se iguala a N, con lo que se obtiene

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + xy$$

o bien,

$$h'(y) = -\tfrac{1}{2}x^2 - xy. \tag{21}$$

Dado que el segundo miembro de la ecuación (21) depende de x y de y, es imposible despejar $h(y)$. Por tanto, no existe $\psi(x, y)$ que satisfaga las dos ecuaciones (19).

Factores integrantes. Algunas veces es posible convertir una ecuación diferencial que no sea exacta en una exacta al multiplicarla por un factor integrante adecuado. Recuérdese que este es el procedimiento que se utilizó al resolver las ecuaciones lineales en las secciones 2.1 y 2.2. Con el fin de investigar la posibilidad de poner en práctica esta idea de manera más general, multiplíquese la ecuación

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{22}$$

por una función μ y, a continuación, inténtese elegir μ de modo que la ecuación resultante

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \tag{23}$$

sea exacta. Por el teorema 2.81, la ecuación (23) es exacta si y sólo si

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \tag{24}$$

Dado que M y N son funciones dadas, entonces la ecuación (24) hace ver que el factor integrante μ debe satisfacer la ecuación diferencial parcial de primer orden

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{25}$$

Si es posible encontrar una función μ que satisfaga la ecuación (25), entonces la (23) será exacta. Entonces puede obtenerse la solución de la (23) por el método descrito en la primera parte de esta sección. La solución hallada de esta manera también satisface a la ecuación (22), ya que el factor integrante μ puede cancelarse en la (23).

Una ecuación diferencial parcial de la forma (25) puede tener más de una solución; si este es el caso, entonces puede usarse cualquiera de esas soluciones como un factor integrante de la ecuación (22). Esta no unicidad posible del factor integrante se ilustra en el ejemplo 4.

No obstante, la ecuación (25), que determina el factor integrante μ, suele ser por lo menos tan difícil de resolver como la ecuación original (22). Por lo tanto, aunque en principio los factores integrantes son instrumentos poderosos para resolver las ecuaciones diferenciales, en la práctica por lo general sólo pueden encontrarse en casos especiales. Las situaciones más importantes en que es posible hallar factores integrantes simples ocurren cuando μ es una función sólo de una de las variables x, y, en vez de serlo de las dos. Considérese entonces la determinación de las condiciones necesarias en M y N de modo que la ecuación (22) tenga un factor integrante μ que dependa solamente de x. Si se supone que μ es una función sólo de x, se tiene

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}.$$

Por tanto, si $(\mu M)_y$ debe ser igual a $(\mu N)_x$, es necesario que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{26}$$

Si $(M_y - N_x)/N$ es una función sólo de x, entonces existe un factor integrante μ que también depende solamente de x; además, puede encontrarse $\mu(x)$ al resolver la ecuación *lineal* de primer orden (26).

Se puede aplicar un procedimiento semejante para determinar una condición con la que la ecuación (22) tenga un factor integrante que dependa solamente de y.

Ejemplo 4 Determinar un factor integrante de la ecuación

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \tag{18}$$

y, a continuación resolver la ecuación.

En el ejemplo 3 se demostró que esta ecuación no es exacta. Trátese de determinar si tiene un factor integrante que sólo dependa de x. Al calcular la cantidad $(M_y - N_x)/N$, se encuentra que

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}. \tag{27}$$

Por tanto, existe un factor integrante μ que es función sólo de x, y que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}. \tag{28}$$

De donde,

$$\mu(x) = x. \tag{29}$$

Al multiplicar la ecuación (18) por este factor integrante, se obtiene

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0. \tag{30}$$

Esta última ecuación es exacta y se encuentra rápidamente que su solución está dada en forma implícita por

$$x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 = c. \tag{31}$$

La solución también puede encontrarse con facilidad en forma explícita, ya que la ecuación (31) es cuadrática en y.

El lector puede comprobar también que un segundo factor integrante de la ecuación (18) es

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)},$$

y que se obtiene la misma solución, aunque con mucho mayor dificultad, si se utiliza este factor integrante (ver el problema 32).

Problemas

Determine si cada una de las ecuaciones de los problemas 1 a 12 es exacta. En caso de serlo, halle la solución.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$

7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)\,dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)\,dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)\,dy = 0$
10. $(y/x + 6x)\,dx + (\ln x - 2)\,dy = 0, \qquad x > 0$
11. $(x \ln y + xy)\,dx + (y \ln x + xy)\,dy = 0; \qquad x > 0, \quad y > 0$
12. $\dfrac{x\,dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$

En los problemas 13 y 14, resuelva el problema con valor inicial dado y determine, por lo menos aproximadamente, en dónde es válida la solución.

13. $(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0, \qquad y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1)\,dx - (4y - x)\,dy = 0, \qquad y(1) = 0$

En los problemas 15 y 16, encuentre el valor de b para el que la ecuación dada es exacta y, después, resuelva esa ecuación al utilizar ese valor de b.

15. $(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x + y)\,x^2\,dy = 0$
16. $(ye^{2xy} + x)\,dx + bxe^{2xy}\,dy = 0$
17. Considere la ecuación diferencial exacta

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Encuentre una fórmula implícita $\psi(x, y) = c$ para la solución, análoga a la ecuación (14), si se integra primero $\psi_y = N$, en vez de $\psi_x = M$, como en el texto.

18. Demuestre que cualquier ecuación separable; es decir, de la forma

$$M(x) + N(y)y' = 0,$$

también es exacta.

Demuestre que las ecuaciones de los problemas 19 a 22 no son exactas, aunque se transforman en exactas si se multiplican por el factor integrante dado. En seguida, resuelva las ecuaciones.

19. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0; \qquad \mu(x, y) = 1/xy^3$
20. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x} \operatorname{sen} x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0; \qquad \mu(x, y) = ye^x$
21. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0; \qquad \mu(x, y) = y$
22. $(x + 2) \operatorname{sen} y\,dx + x \cos y\,dy = 0 \qquad \mu(x, y) = xe^x$
23. Demuestre que si $(N_x - M_y)/M = Q$, en donde Q es una función sólo de y, entonces la ecuación diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma

$$\mu(y) = \exp \int Q(y)\,dy.$$

*24. Demuestre que si $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, en donde R depende solamente de la cantidad xy, entonces la ecuación diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. Encuentre una fórmula general para este factor integrante.

En cada uno de los problemas 25 a 31, encuentre un factor integrante y resuelva la ecuación dada.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$
26. $y' = e^{2x} + y - 1$
27. $dx + (x/y - \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
28. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$
29. $e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\,dy = 0$
30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)]\,dx + [3(x/y^2) + 4y]\,dy = 0$
*31. $\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$

Sugerencia: ver el problema 24.

*32. Resolver la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

si se usa el factor integrante $\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$. Compruebe que la solución es la misma que la obtenida en el ejemplo 4 con un factor integrante diferente.

2.9 Ecuaciones homogéneas

Los dos tipos más importantes de ecuaciones no lineales de primer orden que se pueden resolver mediante procesos directos de integración son las ecuaciones separables y las exactas.

En esta sección se verá cómo algunas veces es posible aplicar un cambio de variable para simplificar una ecuación diferencial y por tanto hacer que sea posible (o más conveniente) su resolución. En términos generales, la sustitución idónea debe ser sugerida por la aparición repetida de alguna combinación de las variables o por alguna otra peculiaridad en la estructuras de la ecuación.

La clase más importante de ecuaciones para las cuales es posible establecer una regla definitiva es la clase de las ecuaciones diferenciales homogéneas.[16] Se dice que una ecuación de la forma

$$dy/dx = f(x, y)$$

es homogénea siempre que la función f no dependa por separado de x y y, sino solamente de su razón y/x o x/y; por tanto, las ecuaciones homogéneas son de la forma

$$dy/dx = F(y/x). \tag{1}$$

[16] El término *homogéneas* se usa de más de una manera en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Es necesario estar alerta para distinguir estos usos cuando se presenten.

Considérense los ejemplos siguientes:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\dfrac{y}{x}$;

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \dfrac{x+y}{x-y} = \ln \dfrac{1}{y/x} + \dfrac{1 + (y/x)}{1 - (y/x)}$;

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + 2xy}{x^2} = y\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\dfrac{y}{x}$.

Las ecuaciones a) y b) son homogéneas, ya que el segundo miembro de cada una puede expresarse como una función de y/x; dado que la c) no puede escribirse así, no es homogénea. Por lo general, es fácil decir por inspección si una ecuación dada es homogénea o no; para ecuaciones complicadas puede ser de utilidad el criterio que se da en el problema 15.

La forma de una ecuación homogénea sugiere que es posible simplificarla mediante la introducción de una nueva variable, que se denotará por v, con el fin de representar la razón de y a x. Por tanto,

$$y = xv, \tag{2}$$

y la ecuación (1) se transforma en

$$dy/dx = F(v). \tag{3}$$

Si se toma v como la nueva variable dependiente (en sustitución de y), es necesario considerar a v como una función de x y reemplazar dy/dx de la ecuación (3) por una expresión conveniente en términos de v. Al derivar la ecuación (2) da

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v,$$

y, de donde, (3) queda

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v). \tag{4}$$

El hecho más importante acerca de la ecuación (4) es que las variables x y v siempre pueden separarse, sin importar la forma de la función F; en efecto,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}. \tag{5}$$

Al resolver la ecuación (5) y después sustituir v por y/x se obtiene la solución de la ecuación original.

Por tanto, cualquier ecuación homogénea puede transformarse a una cuyas variables se separan por la sustitución (2). Por supuesto, en la práctica, al resolver (5) puede o no ser posible evaluar la integral requerida por métodos elementales. Es más, una ecuación homogénea también puede pertenecer a una de las clases ya analizadas; puede ser exacta o incluso lineal, por ejemplo. En esos casos, puede elegirse entre varios métodos para hallar su solución.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}. \tag{6}$$

Al escribir esta ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

se demuestra que es homogénea. Las variables no pueden separarse, la ecuación no es exacta ni tiene factor integrante obvio. Por tanto, se ve uno conducido a la sustitución (2), que transforma la ecuación dada en

$$x\frac{dv}{dx} + v = v^2 + 2v.$$

De donde,

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

o bien, al separar las variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)}.$$

Si se desarrolla el segundo miembro por fracciones parciales, se obtiene

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv.$$

Al integrar los dos miembros, se llega a

$$\ln|x| + \ln|c| = \ln|v| - \ln|v+1|,$$

en donde c es una constante arbitraria. Así, al combinar los logaritmos y tomar la exponencial de ambos miembros, se obtiene

$$cx = \frac{v}{v+1}.$$

Por último, al sustituir v en términos de y da la solución de la ecuación (6) en la forma

$$cx = \frac{y/x}{(y/x)+1} = \frac{y}{y+x}.$$

Al despejar y se obtiene

$$y = \frac{cx^2}{1-cx}. \tag{7}$$

Problemas

Demuestre que las ecuaciones de los problemas 1 a 8 son homogéneas y encuentre sus soluciones.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$
2. $2y\,dx - x\,dy = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+3y}{2x+y}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{x-y}$
8. $(x^2+3xy+y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$
9. a) Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{2x-y}.$$

b) Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}.$$

Sugerencia: Para reducir la ecuación del inciso b) a la del inciso a), considérese una sustitución preliminar de la forma $x = X-h, y = Y-k$. Elija las constantes h y k de modo que la ecuación sea homogénea en las variables X y Y.

10. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+3y+15}{2x+y+7}$. Vea la sugerencia del problema 9 b).
11. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+3y+5}{2x+y+7}$. Vea la sugerencia del problema 9 b).
12. Encuentre la solución de la ecuación

$$(3xy+y^2)\,dx + (x^2+xy)\,dy = 0$$

al aplicar el método de esta sección y compárela con la solución obtenida por otros métodos en el ejemplo 4 y el problema 32 de la sección 2.8.

*13. Demuestre que si

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es una ecuación homogénea, entonces uno de sus factores integrantes es

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}.$$

*14. Aplique el resultado del problema 13 para resolver cada una de las ecuaciones siguientes:
   a) La ecuación del problema 2.
   b) La ecuación del problema 4.

*15. Demuestre que la ecuación $y' = f(x, y)$ es homogénea si $f(x, y)$ es tal que

$$f(x, tx) = f(1, t),$$

en donde t es un parámetro real. Aplique este hecho para determinar si cada una de las ecuaciones siguientes es homogénea.

a) $y' = \dfrac{x^3 + xy + y^3}{x^2y + xy^2}$

b) $y' = \ln x - \ln y + \dfrac{x + y}{x - y}$

c) $y' = \dfrac{(x^2 + 3xy + 4y^2)^{1/2}}{x + 2y}$

d) $y' = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2}$

2.10 Problemas diversos y aplicaciones

Esta sección consta de una lista de problemas. Los primeros 32 pueden resolverse por los métodos de las secciones anteriores. Se presentan de modo que el lector pueda practicar la identificación del método o los métodos aplicables a una ecuación dada. En seguida, se tienen algunos problemas que sugieren técnicas especializadas, de utilidad para ciertos tipos de ecuaciones. En particular, los problemas 35 a 37 tratan de las ecuaciones de Riccati. Los problemas del 38 al 43 están relacionados con algunas aplicaciones geométricas, mientras que los demás problemas abordan otras aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.

Problemas

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$

2. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0$

4. $(x + e^y)\,dy - dx = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$ *Sugerencia*: Sea $u = x^2$

8. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(2) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$

10. $(3y^2 + 2xy)\,dx - (2xy + x^2)\,dy = 0$

11. $(x^2 + y)\,dx + (x + e^y)\,dy = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

13. $x\,dy - y\,dx = (xy)^{1/2}\,dx$

14. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0, \quad y(2) = 3$

15. $(e^x + 1)\dfrac{dy}{dx} = y - ye^x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$

18. $(2y + 3x)\,dx = -x\,dy$

19. $x\,dy - y\,dx = 2x^2y^2\,dy, \quad y(1) = -2$

20. $y' = e^{x+y}$

21. $xy' = y + xe^{y/x}$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$

23. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$

24. $2 \operatorname{sen} y \cos x\, dx + \cos y \operatorname{sen} x\, dy = 0$

25. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

26. $(2y + 1)\,dx + \left(\dfrac{x^2 - y}{x}\right)dy = 0$

27. $(\cos 2y - \operatorname{sen} x)\,dx - 2 \tan x \operatorname{sen} 2y\, dy = 0$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1$

31. $(x^2y + xy - y)\,dx + (x^2y - 2x^2)\,dy = 0$

32. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$

33. Demuestre que una ecuación de la forma

$$y = G(p),$$

en donde $p = dy/dx$, puede resolverse de la siguiente manera.

a) Derive con respecto a x.

b) Integre la ecuación del inciso a) para obtener x como función de p. Esta ecuación y la ecuación original $y = G(p)$ forman una representación paramétrica de la solución.

34. Resuelva la ecuación diferencial

$$y - \ln p = 0,$$

en donde $p = dy/dx$, por el método del problema 33. Resuelva también la ecuación directamente y verifique que las soluciones son las mismas.

35. **Ecuación de Riccatti.** La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

se conoce como ecuación de Riccati.[17] Suponga que se conoce alguna solución particular y_1 de esta ecuación. Mediante la sustitución

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

es posible obtener una solución más general que contenga una constante arbitraria. Demuestre que $v(x)$ satisface la ecuación *lineal* de primer orden

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

observe que $v(x)$ contiene una sola constante arbitraria.

[17] Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), noble veneciano, declinó nombramientos académicos universitarios en Italia, Austria y Rusia para continuar sus estudios matemáticos de manera privada en su hogar. Estudió ampliamente la ecuación diferencial que ahora lleva su nombre; sin embargo, fue Euler (en 1760) quien descubrió el resultado que se da en este problema.

36. Con la aplicación del método del problema 35 y la solución particular dada, resuelva cada una de las siguientes ecuaciones de Riccati.

a) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2; \qquad y_1(x) = x$

b) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2; \qquad y_1(x) = \frac{1}{x}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + y^2}{2\cos x}; \qquad y_1(x) = \operatorname{sen} x$

37. La propagación de una simple acción en una población grande (por ejemplo, los conductores que encienden los faros de su automóvil al atardecer) a menudo depende parcialmente de circunstancias externas (que oscurezca) y parcialmente de una tendencia a imitar a los demás que ya han realizado la acción en cuestión. En este caso, la proporción $y(t)$ de personas que ya han realizado la acción pueden describirse [18] por la ecuación

$$dy/dt = (1 - y)[x(t) + by], \tag{i}$$

en donde $x(t)$ mide el estímulo externo y b es el coeficiente de imitación.

a) Observe que la ecuación (i) es una ecuación de Riccati y que $y_1(t) = 1$ es una solución. Aplique la transformación sugerida en el problema 35 y halle la ecuación lineal que satisface $v(t)$.

b) Halle $v(t)$ en el caso de que $x(t) = at$, en donde a es una constante. Deje la respuesta en la forma de una integral.

38. **Trayectorias ortogonales.** Un problema geométrico bastante común es hallar la familia de curvas que se intersecan ortogonalmente en cada punto con una familia dada de curvas. Se dice que cada una de estas familias de curvas constituyen las trayectorias ortogonales de la otra.

a) Considere la familia de parábolas

$$y = kx^2, \tag{i}$$

en donde k es una constante. Trace la gráfica de la ecuación (i) para varios valores de k. Encuentre una expresión para la pendiente de la parábola que pasa por un punto dado, de modo que esa expresión contenga las coordenadas (x, y) del punto, pero no el parámetro k. *Sugerencia*: Derive la ecuación (i) y elimine k.

b) Al aplicar el hecho de que las pendientes de curvas ortogonales son recíprocas negativas, escriba la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de (i).

c) Resuelva la ecuación a la que llegó en el inciso b) y determine las trayectorias ortogonales. Trace varios miembros de esta familia de curvas.

39. En cada uno de los casos siguientes, aplique el método del problema 38 para encontrar la familia de trayectorias ortogonales de la familia dada de curvas. Trace la gráfica de la familia dada y de sus trayectorias ortogonales.

a) La familia de hipérbolas $xy = c$.

b) La familia de circunferencias $(x - c)^2 + y^2 = c^2$.

c) La familia de elipses $x^2 - xy + y^2 = c^2$.

d) La familia de parábolas $2cy + x^2 = c^2$, $c > 0$.

[18] Ver el artículo de Anatol Rapoport, "Contribution to the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts", *Bulletin of Mathematical Biophysics 14* (1952), pp. 159- 169, y el de John Z. Hearon, "Note on the Theory of Mass Behavior", *Bulletin of Mathematical Biophysics 17* (1955), pp. 7-13.

40. Si dos rectas en el plano xy, cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente, se intersecan formando un ángulo θ, demuestre que

$$(\tan \theta)(1 + m_1 m_2) = m_2 - m_1.$$

Aplique este hecho para encontrar la familia de curvas que se intersecan con cada una de las siguientes familias formando un ángulo de 45°. En cada caso trace la gráfica de las dos familias de curvas.

a) $x - 2y = c$ b) $x^2 + y^2 = c^2$

41. Encuentre todas las curvas planas cuya tangente en cada punto (x, y) pasa por el punto fijo (a, b).
42. La recta normal a una curva dada en cada punto (x, y) de la curva pasa por el punto $(2, 0)$. Si la curva contiene el punto $(2, 3)$, encuentre su ecuación.
43. Halle todas las curvas planas en las que, para cada punto de la curva, el eje y biseca esa parte de la recta tangente entre el punto de tangencia y el eje x.
44. Una persona tiene una fortuna que aumenta a una razón proporcional al cuadrado de su riqueza actual. Si hace un año tenía un millón de dólares y en la actualidad tiene dos millones ¿cuánto valdrá en 6 meses?, ¿y en 2 años?
45. Se forma un estanque al acumularse agua en una depresión cónica de radio a y profundidad h. Suponga que el agua entra a una razón constante k y que se pierde por evaporación a una razón proporcional al área superficial.

a) Demuestre que el volumen $V(t)$ de agua en el estanque en el instante t satisface la ecuación diferencial

$$dV/dt = k - \alpha\pi(3a/\pi h)^{2/3} V^{2/3},$$

en donde α es el coeficiente de evaporación.

b) Halle la profundidad de equilibrio del agua en el estanque. ¿Es estable el equilibrio?

c) Encuentre una condición que se deba satisfacer para que el estanque no se desborde.

46. Considere un tanque cilíndrico de agua con sección transversal constante A. Se bombea agua al tanque a una razón constante k y el agua se fuga por un pequeño orificio de área a que se encuentra en el fondo del tanque. Con base en el teorema de Torricelli de la hidrodinámica, se concluye que la razón a la que el agua fluye a través del orificio es $\alpha a \sqrt{2gh}$, en donde h es la profundidad instantánea del agua en el tanque, g es la aceleración debida a la gravedad y α es un coeficiente de contracción que satisface $0.5 \leq \alpha \leq 1.0$.

a) Demuestre que la profundidad del agua en el tanque en cualquier instante satisface la ecuación

$$dh/dt = (k - \alpha a\sqrt{2gh})/A.$$

b) Determine la profundidad de equilibrio h_e del agua y demuestre que es estable. Observe que h_e no depende de A.

47. El crecimiento de una célula depende del flujo de nutrientes a través de su superficie. Sean $W(t)$ el peso de la célula en el instante t y W_0 su peso en $t = 0$, y suponga que dW/dt es proporcional al área de la superficie de la célula.

a) Dé un argumento que apoye la proposición de que

$$dW/dt = \alpha W^{2/3},$$

en donde α es una constante de proporcionalidad.

b) Halle el peso de la célula en cualquier instante t.

48. Cierto negocio aumenta su valor a una razón proporcional a la raíz cuadrada de su valor actual. Si este negocio valía un millón de dólares hace un año y, en la actualidad, vale 1.44 millones, determínese cuándo valdrá dos millones de dólares.

*2.11 Teorema de existencia y unicidad

En esta sección se analiza la demostración del teorema 2.41, el teorema fundamental de existencia y unicidad para los problemas con valor inicial de primer orden. Este teorema afirma que, en ciertas condiciones sobre $f(x, y)$, el problema con valor inicial

$$y' = f(x, y), \tag{1a}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{1b}$$

tiene una solución única en algún intervalo que contenga el punto x_0.

En algunos casos (por ejemplo, si la ecuación diferencial es lineal) la existencia de una solución del problema con valor inicial (1) puede establecerse de manera directa al resolver realmente el problema y exhibir una fórmula para esa solución. Sin embargo, en general, este enfoque no es factible porque no existe un método para resolver la (1a) que se aplique en todos los casos. Por consiguiente, para el caso general es necesario adoptar un enfoque indirecto que establece la existencia de una solución de las ecuaciones (1), pero que, por lo general no proporciona un medio práctico para hallarla. El meollo de este método es la construcción de una sucesión de funciones que converja a una función límite que satisfaga el problema con valor inicial, aunque los miembros por separado de la sucesión no lo hagan. Como regla, es imposible calcular explícitamente más de unos cuantos miembros de la sucesión; por lo tanto, la función límite sólo puede encontrarse en forma explícita en casos raros. Empero, dadas las restricciones sobre $f(x, y)$ que se enuncian en el teorema 2.4.1, es posible demostrar que la sucesión en cuestión converge y que la función límite tiene las propiedades deseadas. La argumentación es bastante intrincada y depende, en parte, de técnicas y resultados que suelen encontrarse por vez primera en un curso de cálculo avanzado. Como consecuencia, no se exponen todos los detalles de la demostración; sin embargo, se indican las características principales y se señalan algunas de las dificultades que se encuentran.

Antes que nada, nótese que basta con considerar el problema en el que el punto (x_0, y_0) es el origen; es decir, el problema

$$y' = f(x, y), \tag{2a}$$

$$y(0) = 0. \tag{2b}$$

Si se da algún otro punto inicial, entonces siempre es posible hacer un cambio preliminar de variable, correspondiente a una traslación de los ejes de coordenadas que lleve el punto (x_0, y_0) al origen. En concreto, se introducen las nuevas variables dependientes e independientes w y s, respectivamente, definidas por las ecuaciones

$$w = y - y_0, \quad s = x - x_0. \tag{3}$$

Al considerar w como función de s, por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}(y - y_0)\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx}.$$

Al denotar $f(x, y) = f(s + x_0, w + y_0)$ por $F(s, w)$, el problema con valor inicial (1) se lleva a la forma

$$w'(s) = F[s, w(s)], \tag{4a}$$

$$w(0) = 0. \tag{4b}$$

Excepto por la denominación de las variables, las ecuaciones (4) son las mismas que las (2). De aquí en adelante, se considerará el problema ligeramente más sencillo (2), en vez del problema original (1).

Ahora es posible enunciar el teorema de existencia y unicidad de la siguiente manera:

Teorema 2.11.1 Si f y $\partial f/\partial y$ son continuas en un rectángulo R: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, entonces existe algún intervalo $x \leq h \leq a$ en el que existe una solución única $y = \phi(x)$ del problema con valor inicial (2)

$$y' = f(x, y), \qquad y(0) = 0.$$

Para probar este teorema es necesario transformar el problema con valor inicial (2) en una forma más conveniente. Si por un momento se supone que existe una función $y = \phi(x)$ que satisface el problema con valor inicial, entonces $f[x, \phi(x)]$ es una función continua sólo de x. De donde, es posible integrar la ecuación (2a) desde el punto inicial $x = 0$ hasta un valor arbitrario de x, con lo que se obtiene

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt, \tag{5}$$

en donde se utilizó la condición inicial $\phi(0) = 0$.

Dado que la ecuación (5) contiene una integral de la función desconocida ϕ, se denomina **ecuación integral**. Esta ecuación integral no es una fórmula para la solución del problema con valor inicial, sino que proporciona otra relación que satisface cualquier solución de las ecuaciones (2). A la inversa, suponga que existe una función continua $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación integral (5); entonces esta función también satisface el problema con valor inicial (2). Para demostrar esto, primero se sustituye x por cero en la ecuación (5), con lo que se obtiene la ecuación (2b). Además, dado que el integrando de la ecuación (5) es continuo, por el teorema fundamental del cálculo se deduce que $\phi'(x) = f[x, \phi(x)]$. Por lo tanto, el problema con valor inicial y la ecuación integral son equivalentes en el sentido de que cualquier solución de uno de ellos también es una solución del otro. Es más conveniente demostrar que existe una solución única de la ecuación integral en cierto intervalo $|x| \leq h$. Entonces la misma conclusión se cumplirá para el problema con valor inicial.

Un método para demostrar que la ecuación integral (5) tiene una solución única se conoce como **método de aproximaciones sucesivas**, o **método de interacción** de Picard.[19] Al aplicar este método se empieza por elegir una función inicial ϕ_0, arbitrariamente o aproximando de alguna manera la solución del problema con valor inicial. La selección más sencilla es

$$\phi_0(x) = 0; \tag{6}$$

entonces ϕ_0 satisface por lo menos la condición inicial (2b), aunque quizá no la ecuación diferencial (2a). La siguiente aproximación ϕ_1 se obtiene al sustituir $\phi_0(t)$ por $\phi(t)$ en el segundo miembro de la ecuación (5) y al nombrar como $\phi_1(x)$ el resultado de esta operación. Por tanto,

$$\phi_1(x) = \int_0^x f[t, \phi_0(t)]\, dt. \tag{7}$$

De manera semejante, ϕ_2 se obtiene a partir de ϕ_1:

$$\phi_2(x) = \int_0^x f[t, \phi_1(t)]\, dt, \tag{8}$$

y, en general,

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{9}$$

De esta manera es posible generar la sucesión de funciones $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1 \ldots, \phi_n, \ldots$ Cada miembro de la sucesión satisface la condición inicial (2b), pero en general ninguno satisface la ecuación diferencial. Sin embargo, si en alguna etapa, por ejemplo para $n = k$, se encuentra que $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x)$, entonces se concluye que ϕ_k es una solución de la ecuación integral (5). De donde, ϕ_k también es una solución del problema con valor inicial (2) y en este punto se termina la sucesión. En general esto no ocurre y es necesario considerar toda la sucesión infinita.

A fin de establecer el teorema 2.11.1 es necesario dar respuesta a cuatro preguntas primordiales:

1. ¿Existen todos los miembros de la sucesión $\{\phi_n\}$, o es posible que el proceso se interrumpa en alguna etapa?
2. ¿Converge la sucesión?
3. ¿Cuáles son las propiedades de la función límite? En particular, ¿satisface la ecuación integral (5) y, por tanto, el problema con valor inicial (2)?
4. ¿Es la única solución o puede haber otras?

[19] Charles-Émile Picard (1856-1914), excepto por Henri Poincaré, quizá el matemático francés más distinguido de su generación, fue designado profesor en la Sorbona antes de cumplir 30 años. Es conocido por teoremas importantes de la variable compleja y la geometría algebraica, así como de las ecuaciones diferenciales. Un caso especial del método de las aproximaciones sucesivas fue publicado primero por Liouville en 1838; sin embargo, el método suele acreditarse a Picard, quien lo estableció en forma general y ampliamente aplicable en una serie de artículos iniciada en 1890.

En primer lugar se demostrará cómo pueden contestarse estas preguntas mediante un ejemplo específico y relativamente sencillo, y luego se harán algunos comentarios sobre algunas de las dificultades que pueden encontrarse en el caso general.

Ejemplo 1 Considérese el problema con valor inicial

$$y' = 2x(1 + y), \qquad y(0) = 0. \tag{10}$$

Para resolver este problema por el método de aproximaciones sucesivas, primero se observa que si $y = \phi(x)$, entonces la ecuación integral correspondiente es

$$\phi(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi(t)]\,dt. \tag{11}$$

Si la aproximación inicial es $\phi_0(x) = 0$, se deduce que

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_0(t)]\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2. \tag{12}$$

De manera semejante,

$$\phi_2(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_1(t)]\,dt = \int_0^x 2t[1 + t^2]\,dt = x^2 + \frac{x^4}{2}. \tag{13}$$

y

$$\phi_3(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_2(t)]\,dt = \int_0^x 2t\left[1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right]dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3}. \tag{14}$$

Las ecuaciones (12), (13) y (14) sugieren que

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} \tag{15}$$

para cada $n \geq 1$, y este resultado puede establecerse por inducción matemática. Resulta evidente que la ecuación (15) es verdadera para $n = 1$ y es necesario demostrar que si es cierta para $n = k$, entonces también se cumple para $n = k + 1$. Se tiene

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_k(t)]\,dt \\ &= \int_0^x 2t\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \cdots + \frac{t^{2k}}{k!}\right)dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!},\end{aligned} \tag{16}$$

y queda completa la demostración inductiva.

Con base en la ecuación (15) se deduce que $\phi_n(x)$ es la n-ésima suma parcial de la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}; \tag{17}$$

de donde, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ existe si y sólo si la serie (17) converge. Al aplicar la prueba de la razón, se ve que para cada x

$$\left|\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}\frac{k!}{x^{2k}}\right| = \frac{x^2}{k+1} \to 0 \text{ cuando } k \to \infty; \tag{18}$$

por tanto, la serie (17) converge para toda x, y su suma $\phi(x)$ es el límite[20] de la sucesión $\{\phi_n(x)\}$. Además, como la serie (17) es una serie de Taylor, es posible derivarla o integrarla término a término, siempre que x permanezca dentro del intervalo de convergencia, que en este caso es todo el eje x. Por lo tanto, es posible verificar por cálculo directo que $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!$ es una solución de la ecuación integral (11). De manera alternativa, al sustituir y por $\phi(x)$ en la ecuación (10) puede verificarse que esta función también satisface el problema con valor inicial.

Por último, para abordar la cuestión de la unicidad, supóngase que el problema con valor inicial tiene dos soluciones ϕ y ψ. Dado que ϕ y ψ satisfacen la ecuación integral (11), al restar se obtiene que

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x 2t[\phi(t) - \psi(t)]\,dt.$$

Si se toman valores absolutos de los dos miembros se tiene, si $x > 0$,

$$|\phi(x) - \psi(x)| \le \int_0^x 2t|\phi(t) - \psi(t)|\,dt.$$

Si x se restringe a estar en el intervalo $0 \le x \le A/2$, en donde A es arbitraria, entonces $2t \le A$ y

$$|\phi(x) - \psi(x)| \le A\int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\,dt. \tag{19}$$

En este punto es conveniente introducir la función U definida por

$$U(x) = \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\,dt. \tag{20}$$

Entonces, de inmediato se concluye que

$$U(0) = 0, \tag{21}$$

$$U(x) \ge 0, \qquad \text{para } x \ge 0. \tag{22}$$

Además, U es diferenciable y $U'(x) = \phi(x) - \psi(x)$. De donde, por la ecuación (19),

$$U'(x) - AU(x) \le 0. \tag{23}$$

Al multiplicar la ecuación (23) por la cantidad positiva e^{-Ax} da

$$[e^{-Ax}U(x)]' \le 0. \tag{24}$$

Luego, al integrar la ecuación (24) desde cero hasta x y aplicar la (21) se obtiene

$$e^{-Ax}U(x) \le 0 \qquad \text{para} \quad x \ge 0.$$

[20] En este caso es posible identificar ϕ en términos de funciones elementales; a saber, $\phi(x) = e^{x^2} - 1$. Sin embargo, esto es irrelevante para el análisis de la existencia y unicidad.

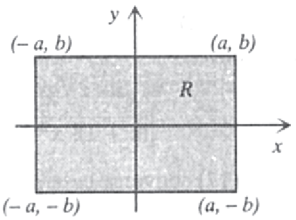


FIGURA 2.11.1 Región de definición para el teorema 2.11.1.

De donde, $U(x) \leq 0$ para $x \geq 0$ y, junto con la ecuación (21), esto requiere que $U(x) = 0$ para cada $x \geq 0$. Por tanto, $U'(x) \equiv 0$ y, por consiguiente, $\psi(x) \equiv \phi(x)$, lo que contradice la hipótesis original. En consecuencia, no puede haber dos soluciones diferentes del problema con valor inicial para $x \geq 0$. Una ligera modificación de este argumento produce la misma conclusión para $x \leq 0$.

Si se regresa ahora al problema general de resolver la ecuación integral (5), considérense brevemente cada una de las preguntas planteadas antes.

1. ¿Existen todos los miembros de la sucesión $\{\phi_n\}$? En el ejemplo f y $\partial f/\partial y$ fueron continuas en todo el plano xy y cada miembro de la sucesión pudo calcularse explícitamente. Como contraste, en el caso general se supone que f y $\partial f/\partial y$ sólo son continuas en el rectángulo R: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ (ver la figura 2.11.1). Además, como regla, los miembros de la sucesión no pueden determinarse explícitamente. El peligro es que en alguna etapa, por ejemplo para $n = k$, la gráfica de $y = \phi_k(x)$ puede contener puntos que estén fuera del rectángulo R. De dónde, en la siguiente etapa –en el cálculo de $\phi_{k+1}(x)$– sería necesario evaluar $f(x, y)$ en puntos en los que se ignora si es continua e incluso si existe. Por tanto, el cálculo de $\phi_{k+1}(x)$ podría ser imposible.

Para evitar este peligro puede ser necesario restringir x a un intervalo más pequeño que $|x| \leq a$. Para encontrar ese intervalo se aplica el hecho de que una función continua en una región cerrada es acotada. De donde, f es acotada sobre R; por tanto, existe un número positivo M tal que

$$|f(x, y)| \leq M, \qquad (x, y) \text{ in } R. \tag{25}$$

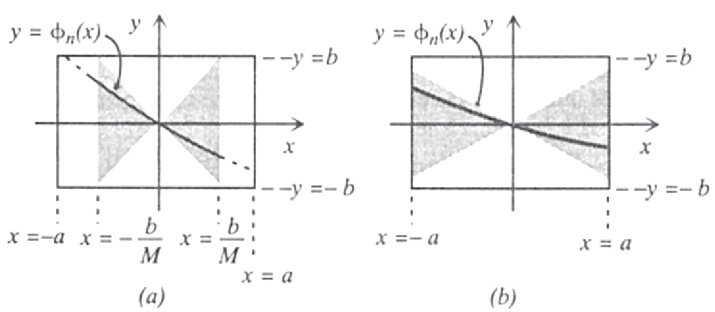


FIGURA 2.11.2 Región en la que se encuentran las iteraciones sucesivas. a) $b/M < a$; b) $b/M > a$.

Ya se mencionó que

$$\phi_n(0) = 0$$

para cada n. Dado que $f[x, \phi_k(x)]$ es igual a $\phi'_{k+1}(x)$, entonces la pendiente máxima absoluta de la gráfica de la ecuación $y = \phi_{k+1}(x)$ es M. Como esta gráfica contiene el punto (0, 0), debe estar en la región con forma de cuña de la figura 2.11.2 De donde el punto $[x, \phi_{k+1}(x)]$ permanece en R por lo menos en tanto que R contenga la región en forma de cuña, lo cual se cumple para $|x| \leq b/M$. De aquí en adelante sólo se considerará el rectángulo D: $|x| \leq h$, $|y| \leq b$, en donde h es igual a a o a b/M, el que sea menor. Con esta restricción, todos los miembros de la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ existen. Nótese que si $b/M < a$, entonces puede obtenerse un valor mayor de h al hallar una mejor cota para $|f(x, y)|$, en el supuesto de que M no sea ya igual al valor máximo de $|f(x, y)|$.

2. ¿Converge la sucesión $\{\phi_n(x)\}$? Como en el ejemplo, es posible identificar $\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$ como la n-ésima suma parcial de la serie

$$\phi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)]. \tag{26}$$

La convergencia de la sucesión $[\phi_n(x)]$ se establece al demostrar que la serie (26) converge. A fin de lograr esto es necesario estimar la magnitud $|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)|$ del término general. En los problemas 11 a 14 se indica el argumento mediante el que se logra esto, por lo que se omite aquí. Si se supone que la sucesión converge, la función límite se denota por ϕ, de modo que

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x). \tag{27}$$

3. ¿Cuáles son las propiedades de la función límite ϕ? En primer lugar, sería conveniente saber que ϕ es continua. Sin embargo, esto no es una consecuencia necesaria de la convergencia de la sucesión $\{\phi_n(x)\}$, aun cuando cada miembro de la sucesión sea continuo. Algunas veces una sucesión de funciones continuas converge a una función límite que es discontinua. En el problema 9 se da un ejemplo sencillo de este fenómeno. Una manera de demostrar que ϕ es continua es demostrar no sólo que la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ converge, sino que lo hace de cierta manera, que se conoce como convergencia uniforme. Aquí, no se abordará esta cuestión, sólo que el argumento mencionado en el párrafo 2 es suficiente para establecer la convergencia uniforme de la sucesión $\{\phi_n\}$ y, de donde, la continuidad de la función límite ϕ en el intervalo $|x| \leq h$.

Ahora, se volverá a la ecuación (9),

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt.$$

Si se permite que en ambos miembros n tienda a ∞, se obtiene

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{28}$$

Sería conveniente intercambiar las operaciones de integrar y tomar el límite en el segundo miembro de la ecuación (28) para obtener

$$\phi(x) = \int_0^x \lim_{n\to\infty} f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{29}$$

En general, este intercambio no es permisible (ver el problema 10, por ejemplo) pero, una vez más, el hecho de que la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ no sólo converja, que también lo haga de manera uniforme, permite realizar la operación de tomar límite dentro del signo de la integral. A continuación, se quiere tomar el límite dentro de la función f, lo que daría

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)]\, dt \tag{30}$$

y, de donde,

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{31}$$

La afirmación de que $\lim_{n\to\infty} f[t, \phi_n(t)] = f[t, \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)]$ es equivalente a la afirmación de que f es continua en su segunda variable, que se sabe es la hipótesis. De donde, la (31) es válida y la función ϕ satisface la ecuación integral (5). Por lo tanto, ϕ también es una solución del problema con valor inicial (2).

4. ¿Existen otras soluciones de la ecuación integral (5) además de $y = \phi(x)$? Para demostrar la unicidad de la solución $y = \phi(x)$ se puede proceder casi como se hizo en el ejemplo. En primer lugar se supone la existencia de otra solución $y = \psi(x)$. Entonces, es posible demostrar (ver el problema 15) que la diferencia $\phi(x) - \psi(x)$ satisface la desigualdad

$$|\phi(x) - \psi(x)| \le A \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt \tag{32}$$

para $0 \le x \le h$ y para un número positivo adecuado A. A partir de este punto, el argumento es idéntico al que se da en el ejemplo y se concluye que no existe otra solución del problema con valor inicial (2) que no sea la obtenida por el método de aproximaciones sucesivas.

Problemas

En los problemas 1 y 2, transforme el problema con valor inicial dado en un problema equivalente con el punto inicial en el origen.

1. $dy/dx = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$
2. $dy/dx = 1 - y^3, \quad y(-1) = 3$

En cada uno de los problemas 3 a 6 aplique el método de aproximaciones sucesivas para resolver el problema con valor inicial dado. Haga $\phi_0(x) = 0$ y determine $\phi_n(x)$ para un valor arbitrario de n. Si es posible, exprese $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ en términos de funciones elementales.

3. $y' = 2(y + 1), \quad y(0) = 0$
4. $y' = -y - 1, \quad y(0) = 0$
5. $y' = xy + 1, \quad y(0) = 0$
6. $y' = x^2y - x, \quad y(0) = 0$

En los problemas 7 y 8 aplique el método de aproximaciones sucesivas para obtener una aproximación de la solución del problema con valor inicial dado. Haga $\phi_0(x) = 0$ y calcule $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$

7. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ 8. $y' = 1 - y^3$, $y(0) = 0$

9. Haga $\phi_n(x) = x^n$ para $0 \le x \le 1$ y demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Este ejemplo demuestra que una sucesión de funciones continuas puede converger hacia una función límite que es discontinua.

10. Considere la sucesión $\phi_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $0 \le x \le 1$.
a) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$ para $0 \le x \le 1$ y, por lo tanto, que

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\, dx = 0.$$

b) Demuestre que $\int_0^1 2nxe^{-nx^2}\, dx = 1 - e^{-n}$ y, de donde, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)\, dx = 1.$$

Este ejemplo demuestra que no necesariamente es cierto que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\, dx,$$

aun cuando $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ exista y sea continuo.

En los problemas 11 a 14 se indica cómo probar que la sucesión $\{\phi_n(x)\}$, definida por las ecuaciones (6) a (9) converge.

11. Si $\partial f/\partial y$ es continua en el rectángulo D, demuestre que existe una constante positiva K tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2|,$$

en donde (x, y_1) y (x, y^2) son dos puntos cualesquiera en D que tienen la misma coordenada x.
Sugerencia: mantenga x fija y aplique el teorema del valor medio sobre f como función sólo de y. Elija K como el valor máximo de $\partial f/\partial y$ en D.

12. Si $\phi_{n-1}(x)$ y $\phi_n(x)$ son miembros de la sucesión $\{\phi_n(x)\}$, aplique el resultado del problema 11 para demostrar que

$$|f[x, \phi_n(x)] - f[x, \phi_{n-1}(x)]| \le K|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|.$$

13. a) Demuestre que si $x \le h$, entonces

$$|\phi_1(x)| \le M|x|,$$

en donde M se elige de modo que $f(x, y) \le M$ para (x, y) en D.

b) Aplique los resultados del problema 12 y del inciso a) del 13 para demostrar que

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq \frac{MK|x|^2}{2}.$$

c) Demuestre por inducción matemática que

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}|x|^n}{n!} \leq \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}.$$

14. Observe que

$$\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)].$$

a) Demuestre que

$$|\phi_n(x)| \leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x) - \phi_1(x)| + \cdots + |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|.$$

b) Aplique los resultados del problema 13 para demostrar que

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{M}{K}\left[Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Kh)^n}{n!}\right].$$

c) Demuestre que la suma del inciso b) converge cuando $n \to \infty$ y, en consecuencia demuestre que la suma del inciso a) también converge cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, concluya que la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ converge, dado que es la sucesión de las sumas parciales de una serie infinita convergente.

15. En este problema se aborda la cuestión de la unicidad de la solución de la ecuación integral (5)

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt.$$

a) Suponga que ϕ y ψ son dos soluciones de la ecuación (5). Demuestre que

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x \{f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]\}\, dt.$$

b) Demuestre que

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x |f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]|\, dt.$$

c) Aplique el resultado del problema 11 para demostrar que

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq K \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt,$$

en donde K es una cota superior de $|\partial f/\partial y|$ en D. Esto es lo mismo que la ecuación (32) y el resto de la demostración puede elaborarse como se indicó en el texto.

2.12 Ecuaciones en diferencias de primer orden

Aunque para muchos problemas resulta razonable y atractivo un modelo continuo que dé una ecuación diferencial, existen algunos casos en los que un modelo discreto puede ser más natural. Por ejemplo, el modelo continuo de interés compuesto que se usó en la sección 2.5 sólo es una aproximación del proceso discreto real. De manera semejante, a veces el crecimiento de una población puede describirse con mayor precisión mediante un modelo discreto en vez de uno continuo. Por ejemplo, esto es cierto para especies cuyas generaciones no se sobreponen y que se propagan a intervalos regulares, como en tiempos específicos del año natural. Entonces la población y_{n+1} de la especie en el año $n + 1$ es alguna función de n y de la población y_n del año anterior; es decir,

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

La ecuación (1) se llama **ecuación en diferencias de primer orden**. Es de primer orden porque el valor de y_{n+1} depende del valor de y_n pero no de los valores anteriores y_{n-1}, y_{n-2}, etc. Como para las ecuaciones diferenciales, la ecuación en diferencias (1) es **lineal** si f es una función lineal de y_n; en caso contrario, es **no lineal**. Una **solución** de la ecuación en diferencia (1) es una sucesión de números $y_0, y_1, y_2, \ldots$ que satisface la ecuación para cada n. Además de la propia ecuación en diferencias, también puede haber una **condición inicial**.

$$y_0 = \alpha \tag{2}$$

que prescriba al valor del primer término de la sucesión solución.

Supóngase ahora en forma temporal que la función f de (1) depende sólo de y_n, pero no de n. En este caso,

$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Si se da y_0, entonces a partir de la ecuación (3) pueden hallarse los términos sucesivos de la solución. Por tanto,

$$y_1 = f(y_0),$$

y

$$y_2 = f(y_1) = f[f(y_0)].$$

La cantidad $f[f(y_0)]$ recibe el nombre de segunda iteración de la ecuación en diferencias y algunas veces se denota por $f^2(y_0)$. De manera semejante, la tercera iteración y_3 se expresa por

$$y_3 = f(y_2) = f\{f[f(y_0)]\} = f^3(y_0),$$

etcétera. En general, la n-ésima iteración y_n es

$$y_n = f(y_{n-1}) = f^n(y_0).$$

Este procedimiento se conoce como iteración de la ecuación en diferencias. A menudo tiene un interés primordial la determinación del comportamiento de y_n cuando $n \to \infty$; en particular si y_n tiende a un límite y, en caso afirmativo, hallarlo.

Las soluciones para las que y_n tiene el mismo valor para toda n se llaman **soluciones de equilibrio**; que a menudo tienen una importancia especial, como en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Si existen soluciones de equilibrio, se les puede hallar al hacer y_{n+1} igual a y_n en la ecuación (3) y despejar y_n en la ecuación resultante

$$y_n = f(y_n) \tag{4}$$

Ecuaciones lineales. Suponga que la población de cierta especie en una región dada en el año $n + 1$, denotada por y_{n+1}, es un múltiplo positivo ρ_n de la población y_n en el año n; es decir,

$$y_{n+1} = \rho_n y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Observe que el índice de reproducción ρ_n puede variar de un año al otro. La ecuación en diferencias (5) es lineal y puede resolverse con facilidad por iteración. Se obtiene

$$y_1 = \rho_0 y_0,$$

$$y_2 = \rho_1 y_1 = \rho_1 \rho_0 y_0,$$

y, en general,

$$y_n = \rho_{n-1} \cdots \rho_0 y_0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Por tanto, si se da la población inicial y_0, entonces mendiante la ecuación (6) se determina la población de cada generación ulterior. Aunque para un problema de población ρ_n es intrínsecamente positiva, la solución (6) también es válida si ρ_n es negativa para algunos o todos los valores de n. Sin embargo, observe que si ρ_n es cero para alguna n, entonces y_{n+1} y todos los valores subsecuentes de y son cero; en otras palabras la especie se extinguió.

Si el índice de reproducción ρ_n tiene el mismo valor ρ para cada n, entonces la ecuación en diferencias (5) se transforma en

$$y_{n+1} = \rho y_n \tag{7}$$

y su solución es

$$y_n = \rho^n y_0. \tag{8}$$

La ecuación (7) también tiene una solución de equilibrio; a saber, $y_n = 0$ para toda n, correspondiente al valor inicial $y_0 = 0$. Puede determinarse con facilidad el comportamiento límite de y_n a partir de la ecuación (8). En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & \text{si } |\rho| < 1; \\ y_0, & \text{si } \rho = 1; \\ \text{no existe}, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{9}$$

En otras palabras, la solución de equilibrio $y_n = 0$ es asintóticamente estable para $|\rho| < 1$ y es inestable si $|\rho| > 1$.

Ahora se modificará el modelo de población representado por la ecuación (5) para incluir el efecto de inmigración o emigración. Si b_n es el crecimiento neto de la población en el año n, debido a la inmigración, entonces la población en el año $n + 1$ es la suma de los individuos debidos a la reproducción natural y los debidos a la inmigración. Por tanto,

$$y_{n+1} = \rho y_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

en donde ahora se supone que el índice de reproducción ρ es constante. La ecuación (9) puede resolverse por iteración como antes. Se tiene

$$y_1 = \rho y_0 + b_0,$$
$$y_2 = \rho(\rho y_0 + b_0) + b_1 = \rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1,$$
$$y_3 = \rho(\rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1) + b_2 = \rho^3 y_0 + \rho^2 b_0 + \rho b_1 + b_2,$$

etcétera. En general, se obtiene

$$y_n = \rho^n y_0 + \rho^{n-1} b_0 + \cdots + \rho b_{n-2} + b_{n-1} = \rho^n y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} b_j. \tag{10}$$

Observe que el primer término del segundo miembro de (10) representa los descendientes de la población original, mientras que los demás términos representan la población en el año n que resulta de la inmigración durante todos los años precedentes.

En el caso especial en donde $b_n = b$ para toda n, la ecuación en diferencias es

$$y_{n+1} = \rho y_n + b, \tag{11}$$

y por (10), su solución es

$$y_n = \rho^n y_0 + (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-1})b. \tag{12}$$

Si $\rho \neq 1$, esta solución puede escribirse en la forma más breve

$$y_n = \rho^n y_0 + \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} b, \tag{13}$$

en donde una vez más los dos términos del segundo miembro son los efectos de la población original y de la inmigración, respectivamente. Al volver a escribir la ecuación (13) como

$$y_n = \rho^n \left(y_0 - \frac{b}{1 - \rho} \right) + \frac{b}{1 - \rho}, \tag{14}$$

resulta más evidente el comportamiento a largo plazo de y_n. De la ecuación (14) se concluye que si $|\rho| < 1$, entonces $y_n \to b/(1 - \rho)$ y que, en cualquier otro caso, y_n no tiene límite. La cantidad $b/(1 - \rho)$ es una solución de equilibrio de la ecuación (11), como se ve con facilidad directamente de esa ecuación. Por supuesto, (13) no es válida para $\rho = 1$. Para tratar ese caso es necesario volver a la ecuación (12) y hacer $\rho = 1$; se concluye que

$$y_n = y_0 + nb, \tag{15}$$

de modo que en este caso y_n se vuelve no acotada cuando $n \to \infty$.

El mismo modelo también proporciona un marco de referencia para resolver muchos problemas de carácter financiero. En esos problemas y_n es el balance contable en el n-ésimo periodo, $\rho_n = 1 + r_n$, en donde r_n es la tasa de interés para ese periodo y b_n es la cantidad depositada o retirada. A continuación se da un ejemplo típico.

Ejemplo 1 Una persona pide un préstamo de $10 000 para comprar un automóvil. Si la tasa de interés es del 12%, ¿qué pago mensual es necesario para saldar el préstamo en cuatro años?

La ecuación en diferencias pertinente es la (11), en donde y_n es el balance pendiente del préstamo en el n-ésimo mes, ρ es la tasa de interés mensual y b es el pago mensual. Observe que b debe ser negativo y que $\rho = 1.01$, correspondiente a una tasa de interés mensual de 1%.

La solución de la ecuación en diferencias (11) con este valor de ρ y con la condición inicial $y_0 = 10\,000$ está dada por la ecuación (14); es decir,

$$y_n = (1.01)^n(10{,}000 + 100b) - 100b. \tag{16}$$

La mensualidad b necesaria para saldar el préstamo en cuatro años se encuentra al hacer $y_{48} = 0$ y despejar b; esto da

$$b = -100\frac{(1.01)^{48}}{(1.01)^{48} - 1} = -263.34. \tag{17}$$

La cantidad total pagada sobre el préstamo es 48 veces b, o sea, $12 640.32. De esta cantidad, $10 000 es el pago del principal y los restantes $2 640.32 son intereses.

Ecuaciones no lineales. Las ecuaciones no lineales en diferencias son mucho más complicadas y tiene soluciones mucho más variadas que las lineales. El análisis se restringirá a una sola ecuación, la ecuación logística en diferencias

$$y_{n+1} = \rho y_n\left(1 - \frac{y_n}{k}\right), \tag{18}$$

que es la análoga de la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{19}$$

que se estudió en la sección 2.6. Observe que si se sustituye la derivada dy/dt de la ecuación (19) por la diferencia $(y_{n+1} - y_n)/h$, entonces la (19) se reduce a la (18) con $\rho = 1 + hr$ y $k = (1 + hr)K/hr$. A fin de simplificar un poco más la (18) puede cambiarse la escala de la variable y_n mediante la introducción de la nueva variable $u_n = y_n/k$. Entonces, la ecuación (18) queda

$$u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n), \tag{20}$$

en donde ρ es un parámetro positivo.

Se inicia el estudio de la ecuación (20) al buscar las soluciones de equilibrio o constantes. Estas pueden hallarse al hacer u_{n+1} igual a u_n en la (20), lo cual corresponde a igualar a cero dy/dt en la (19). La ecuación resultante es

$$u_n = \rho u_n - \rho u_n^2, \tag{21}$$

de modo que se deduce que las soluciones de equilibrio de la (20) son

$$u_n = 0, \qquad u_n = \frac{\rho - 1}{\rho}. \tag{22}$$

La siguiente cuestión es si las soluciones de equilibrio son estables o inestables; es decir, para una condición inicial cerca de una de las soluciones de equilibrio, ¿la sucesión solución resultante se aproxima o se aleja de la solución de equilibrio? Una manera de examinar esta cuestión es aproximar la ecuación (20) por una ecuación lineal en la vecindad de una solución de equilibrio. Por ejemplo, cerca de la solución de equilibrio $u_n = 0$ la cantidad u_n^2 es pequeña en comparación con la propia u_n, de modo que se supone que se puede despreciar el término cuadrático de la ecuación (20) en comparación con los términos lineales; con ello queda la ecuación lineal en diferencias

$$u_{n+1} = \rho u_n, \tag{23}$$

que puede aceptarse en una buena aproximación para la ecuación (20), para u_n suficientemente cerca de cero. Sin embargo, la ecuación (23) es la misma que la (7) y ya se concluyó, en la (9), que $u_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ si y sólo si $|\rho| < 1$ o, dado que ρ debe ser positiva, para $0 < \rho < 1$. Por tanto, la solución de equilibrio $u_n = 0$ es asintóticamente estable para la aproximación lineal (23), para este conjunto de valores ρ, por lo que se concluye que también es asintóticamente estable para toda la ecuación no lineal (20). Esta conclusión es correcta, a pesar de que la argumentación no sea completa. Lo que falta es un teorema que afirme que las soluciones de la ecuación no lineal (20) se semejan a las soluciones de la ecuación lineal (23) cerca de la solución de equilibrio $u_n = 0$. Esta cuestión no se analizará aquí; en la sección 9.3 se trata lo mismo para las ecuaciones diferenciales.

Considérese ahora la otra solución de equilibrio, $u_n = (\rho - 1)/\rho$. Para estudiar las soluciones en la vecindad de este punto se escribe

$$u_n = \frac{\rho - 1}{\rho} + v_n, \tag{24}$$

en donde se supone que v_n es pequeño. Al sustituir la ecuación (24) en la (20) y simplificar la ecuación resultante, al final se obtiene

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n - \rho v_n^2. \tag{25}$$

Dado que v_n es pequeño, de nuevo se desprecia el término cuadrático en comparación con los términos lineales y en consecuencia se obtiene la ecuación lineal

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n. \tag{26}$$

Con referencia una vez más a la (9), se encuentra que $v_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ para $|2 - \rho| < 1$; es decir, para $1 < \rho < 3$. Por lo tanto, se concluye que, para este intervalo de valores de ρ, la solución de equilibrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$ es asintóticamente estable.

En la figura 2.12.1 se muestran las gráficas de las soluciones de la ecuación (20) para $\rho = 0.8$, $\rho = 1.5$ y $\rho = 2.8$, respectivamente. Obsérvese que la solución converge hacia cero para $\rho = 0.8$ y a la solución de equilibrio diferente de cero $\rho = 1.5$ y $\rho = 2.8$. La convergencia es monótona para $\rho = 0.8$ y para $\rho = 1.5$ y es oscilatoria para $\rho = 2.8$. Aunque las gráficas que se muestran son para condiciones iniciales particulares, las gráficas para otras condiciones iniciales son semejantes.

Otra manera de presentar la solución de una ecuación en diferencias se da en la figura 2.12.2. En cada parte de esta figura se muestran las gráficas de la parábola $y = \rho x(1 - x)$ y de la recta $y = x$. Las soluciones de equilibrio corresponden a los puntos de intersección de estas

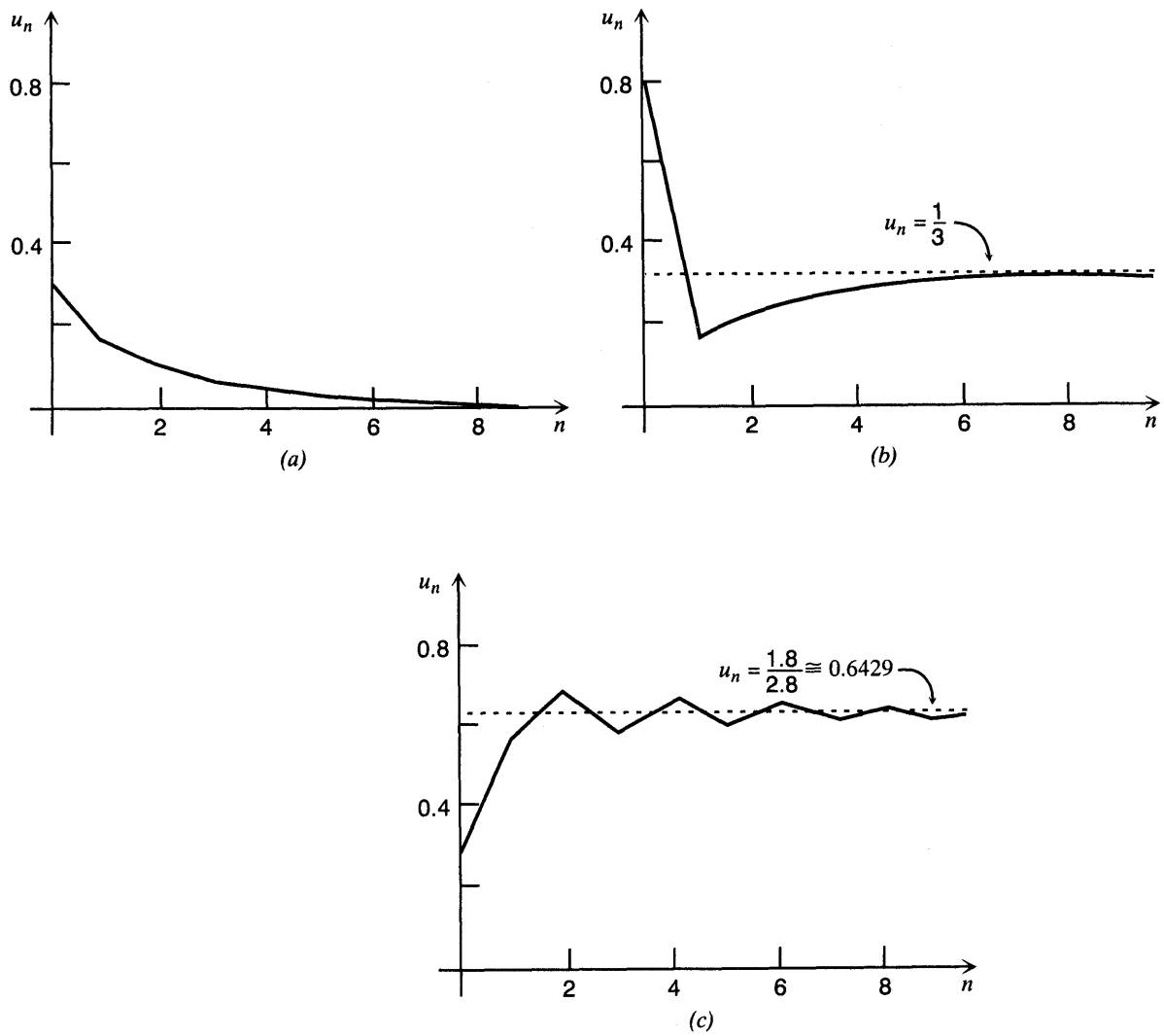


FIGURA 2.12.1 Soluciones de $u_{n+1} = \rho u_n(1-u_n)$, *a*) $\rho = 0.8$; *b*) $\rho = 1.5$; *c*) $\rho = 2.8$.

dos curvas. La gráfica seccionalmente lineal que consta de segmentos rectilíneos verticales y horizontales, algunas veces conocida como diagrama escalonado, representa la sucesión solución. La sucesión se inicia en el punto u_0 del eje x. El segmento rectilíneo vertical trazado hacia arriba en u_0 hasta la parábola corresponde al cálculo de $\rho u_0(1 - u_0) = u_1$. Entonces este valor se transfiere del eje y al eje x; este escalón queda representado por el segmento rectilíneo horizontal que va de la parábola hasta la recta $y = x$. En seguida, el proceso se repite una y otra vez. Es evidente que la sucesión converge al origen en la figura 2.12.2*a* y a la solución de equilibrio diferente de cero en los otros dos casos.

Como resumen de los resultados hasta el momento: la ecuación en diferencias (20) tiene dos soluciones de equilibrio, $u_n = 0$ y $u_n = (\rho - 1)/\rho$; la primera es estable para $0 \leq \rho < 1$ y

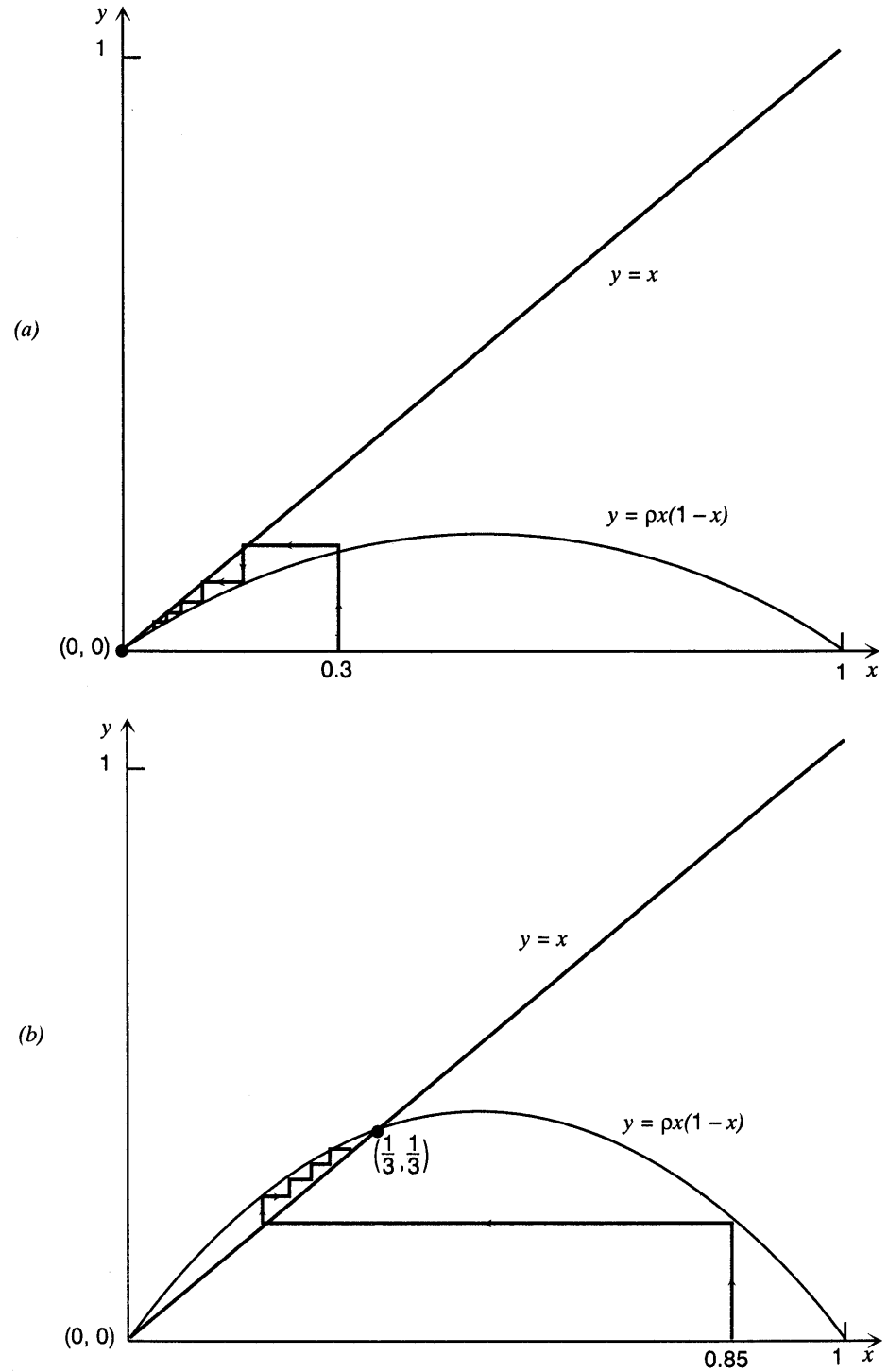
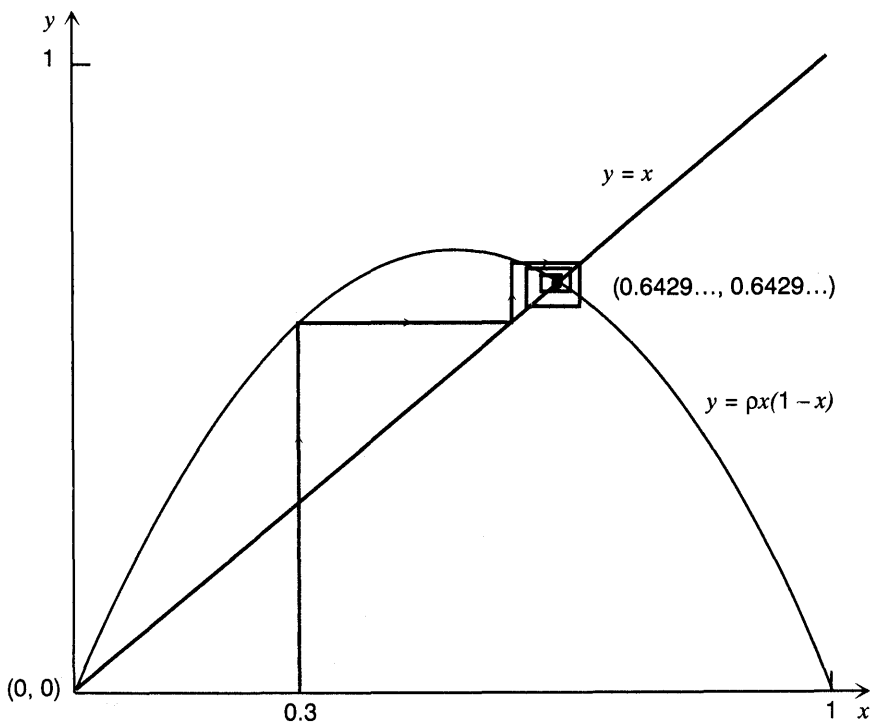


FIGURA 2.12.2 Iteraciones de $u_{n+1} = \rho u_n(1-u_n)$. *a*) $\rho = 0.8$; *b*) $\rho = 1.5$; *c*) $\rho = 2.8$.



(c)

FIGURA 2.12.2 (Continuación)

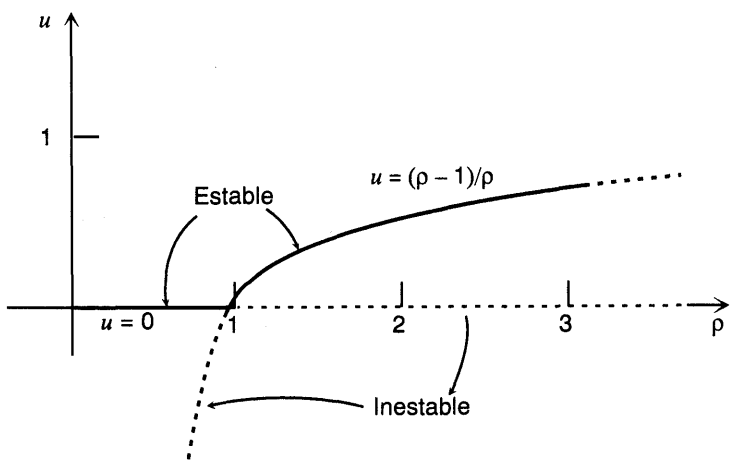
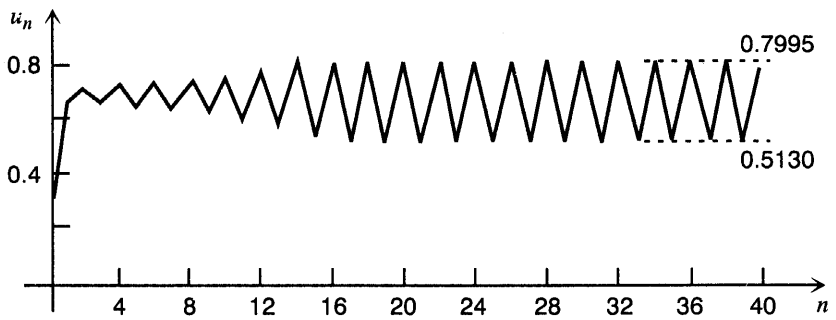
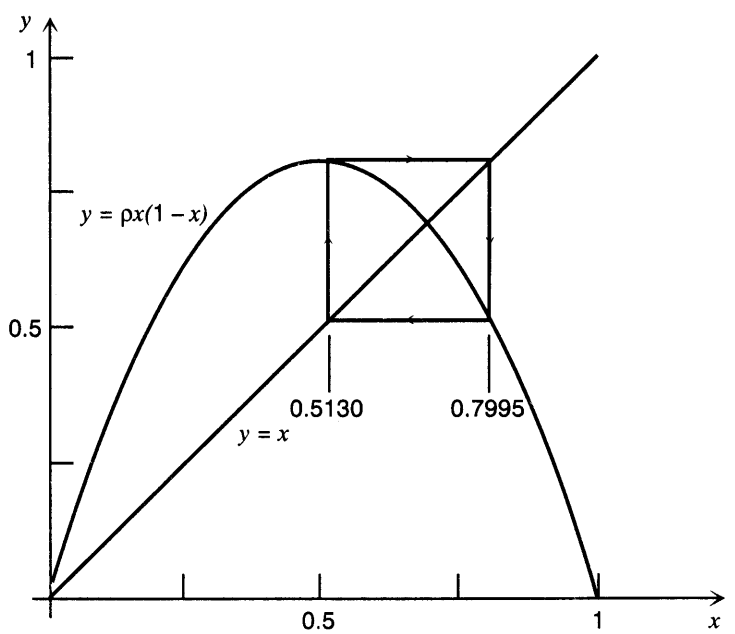


FIGURA 2.12.3 Cambio de estabilidad para $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

la segunda es estable para $1 < \rho < 3$. Esto puede presentarse como se da en la figura 2.12.3. El parámetro ρ se sitúa sobre el eje horizontal y u sobre el eje vertical. Se muestran las soluciones de equilibrio $u = 0$ y $u = (\rho - 1)/\rho$; los intervalos en los que cada una es estable se indican por las partes gruesas de las curvas. Observe que las dos curvas se intersecan en $\rho = 1$, en donde hay un **cambio de estabilidad** de una solución de equilibrio a la otra.



(a)



(b)

FIGURA 2.12.4 Una solución de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3.2$; periodo dos. *a*) u_n contra n; *b*) Una de dos ciclos.

Para $\rho > 3$ ninguna de las soluciones de equilibrio es estable y las soluciones de la ecuación (20) presentan una complejidad creciente a medida que aumenta ρ. Para ρ algo mayor que 3, la sucesión u_n tiende con rapidez a una oscilación estable de periodo 2; es decir, u_n oscila de un lado a otro entre dos valores distintos. Para $\rho = 3.2$, en la figura 2.12 y se muestra una solución. Para n mayor que alrededor de 20, la solución alterna entre los valores 0.5130 y 0.7995. La gráfica se trazó para la condición inicial particular $u_0 = 0.3$, pero es semejante para todos los demás valores iniciales entre 0 y 1. En la figura 2.12.4*b* también se muestra la misma oscilación estable como una trayectoria rectangular que se recorre repetidas veces en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. A alrededor de $\rho = 3.449$ cada estado de la oscilación de periodo dos se separa en dos estados distintos y la solución se vuelve periódica con periodo cuatro; vea la figura 2.12.5, en la que se muestra una solución de periodo cuatro para $\rho = 3.5$. A medida que ρ crece aun más, aparecen soluciones periódicas de periodo 8, 16, ... La aparición de una nueva solución en cierto valor del parámetro se llama **bifurcación**.

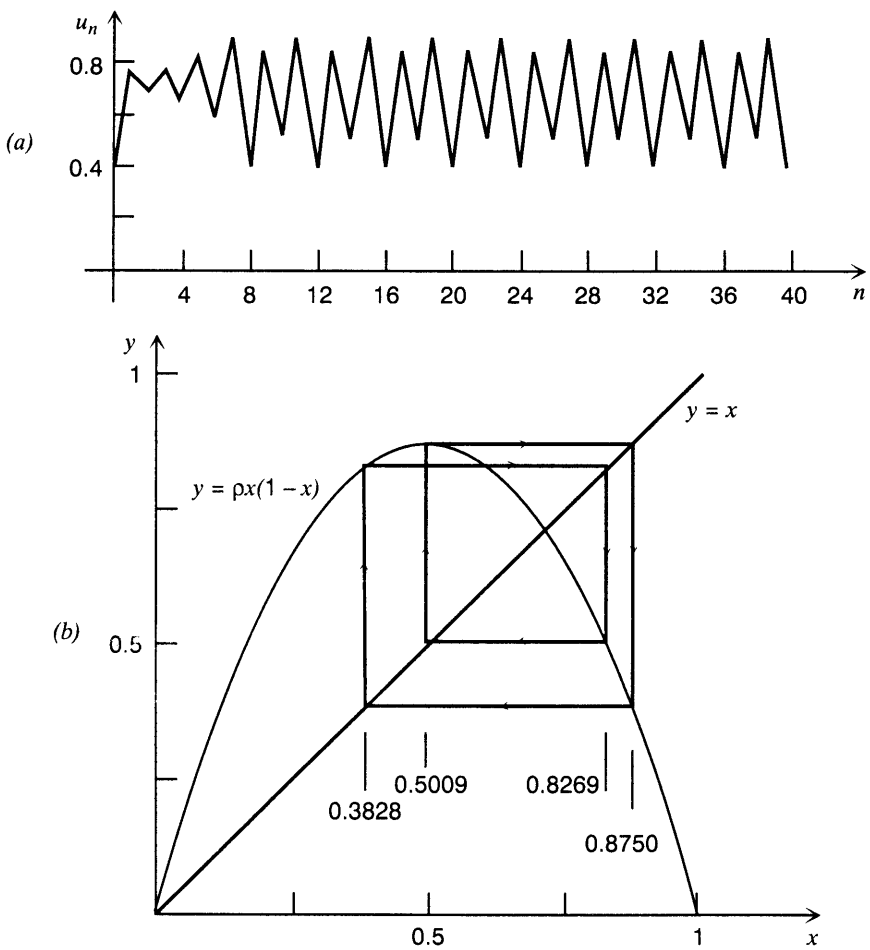


FIGURA 2.12.5 Una solución de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3.5$; periodo cuatro. *a*) u_n contra n; *b*) Una de cuatro ciclos.

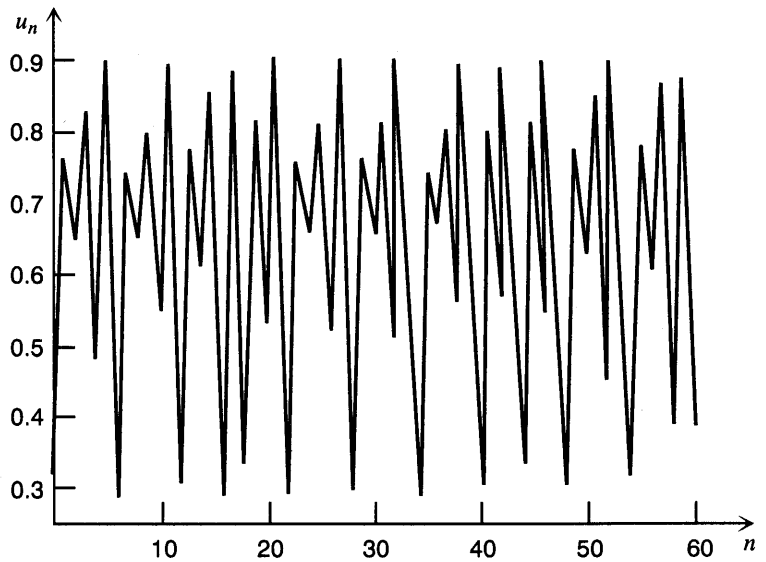


FIGURA 2.12.6 Una solución de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3.65$; una situación caótica.

Los valores de ρ a los cuales ocurren las duplicaciones sucesivas del periodo tienden a un límite que es aproximadamente 3.57. Para $\rho > 3.57$, las soluciones presentan cierta regularidad, pero no un patrón detallado discernible para la mayor parte de los valores de ρ. Por ejemplo, en la figura 2.12.6 se muestra una solución para $\rho = 3.65$. Esta solución

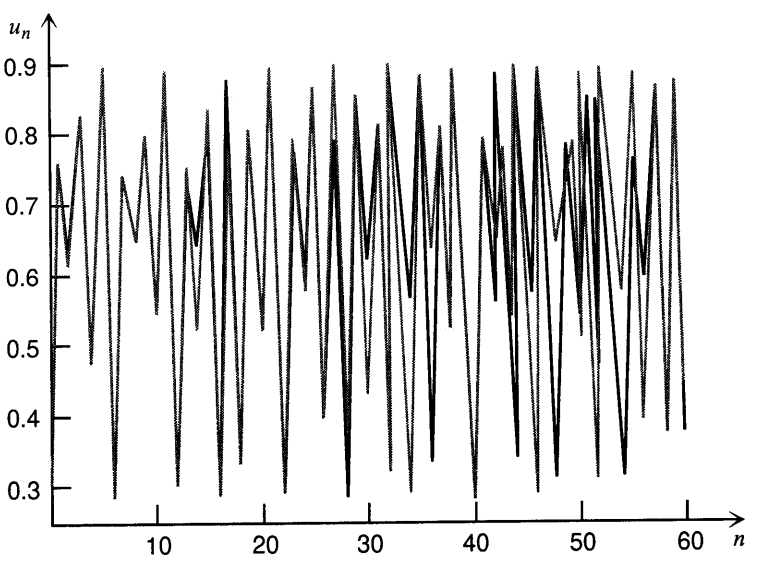


FIGURA 2.12.7 Dos soluciones de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3.65$; $u_0 = 0.3$ y $u_0 = 0.305$.

oscila aproximadamente entre 0.3 y 0.95, pero su fina estructura es impredecible. Se utiliza el término **caótica** para describir esta situación. Una de las características de las soluciones caóticas es que son sensibles en extremo a las condiciones iniciales. Esto se ilustra en la figura 2.12.7, en donde se muestran dos soluciones de la ecuación (20) para $\rho = 3.65$. Una solución es la misma que la de la figura 2.12.6 y tiene el valor inicial $u_0 = 0.3$, mientras que la otra solución tiene el valor inicial $u_0 = 0.305$. Para alrededor de quince iteraciones las dos soluciones permanecen próximas y es difícil distinguir una de la otra en la figura. Después de ello, aun cuando siguen rondando en torno aproximadamente al mismo conjunto de valores, sus gráficas son bastante distintas. Es evidente que no sería posible utilizar una de estas soluciones para estimar el valor de la otra, para valores de n mayores que alrededor de 15.

Las soluciones caóticas de las ecuaciones en diferencias y las diferenciales se han conocido con amplitud sólo desde hace pocos años. La ecuación (20) fue uno de los primeros ejemplos de caos matemático descubierto y estudiado con detalle por Robert May[21] en 1974. Con base en su análisis de esta ecuación, como un modelo de la población de ciertas especies de insectos, May sugirió que si la tasa de crecimiento ρ es demasiado grande, entonces es imposible hacer predicciones eficaces a largo plazo acerca de estas poblaciones de insectos. En los últimos años, la ocurrencia de soluciones caóticas en problemas simples ha estimulado una enorme cantidad de investigación, pero aún sin respuesta muchas preguntas. Sin embargo, cada vez es más evidente que las soluciones caóticas son mucho más comunes de lo que se creía al principio y que puede ser parte de la investigación de una amplia gama de fenómenos.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, resuelva la ecuación en diferencias dada en términos del valor inicial y_0. Describa el comportamiento de la solución cuando $n \to \infty$.

1. $y_{n+1} = -0.9y_n$
2. $y_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\, y_n$
3. $y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{n+3}{n+1}}\, y_n$
4. $y_{n+1} = (-1)^{n+1} y_n$
5. $y_{n+1} = 0.5y_n + 6$
6. $y_{n+1} = -0.5y_n + 6$

7. Halle el rendimiento anual efectivo de una cuenta bancaria que paga intereses a una tasa del 7% compuesto diariamente; es decir, encuentre la razón de la diferencia entre los saldos final e inicial dividida entre el saldo inicial.
8. Un inversionista deposita \$1 000 en una cuenta que paga intereses a una tasa del 8% compuesto mensualmente, y también hace depósitos adicionales de \$25 al mes. Encuentre el saldo de la cuenta después de tres años.

[21] R. M. May, "Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable points, Stable Cycles, and Chaos", *Science 186* (1974), pp. 645-647; — "Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", *Journal of Theoretical Biology 51*(1975), pp. 511-524.

9. Una persona logra un préstamo de \$8 000 para comprar un automóvil. El prestamista carga interés a una tasa anual del 10%. ¿Qué pago mensual es necesario para saldar el préstamo en tres años? Compare el resultado con el del problema 9 de la sección 2.5.
10. El comprador de una casa desea obtener una hipoteca de \$100 000 durante un periodo de 30 años. ¿Qué pago mensual es necesario si la tasa de interés es del
    a) 9% b) 10% c) 12%
11. El comprador de una casa obtiene una hipoteca de \$100 000 con una tasa de interés del 9%. ¿Qué pago mensual es necesario para saldar el préstamo en 30 años? ¿Y en 20 años? ¿Cuál es el monto total pagado durante el término del préstamo en cada uno de estos casos?
12. Si la tasa de interés de una hipoteca a 20 años se fija en el 10% y si el pago mensual máximo que puede efectuar al comprador es de \$1 000, ¿cuál es el máximo préstamo hipotecario que puede otorgarse en estas condiciones?
13. El comprador de una casa desea financiar la adquisición con una hipoteca de \$95 000 a un plazo de 20 años. ¿Cuál es la máxima tasa de interés que puede permitirse el comprador, si el pago mensual no debe exceder de \$900?

La ecuación logística en diferencias. Los problemas 14 y 19 están relacionados con la ecuación en diferencias (20), $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

14 Complete los detalles en el análisis de la estabilidad lineal de la solución de equilibrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$; es decir, deduzca la ecuación en diferencias (25) del texto para la perturbación v_n.
15. a) Para $\rho = 3.2$ trace la gráfica o calcule la solución de la ecuación logística (20) para varias condiciones iniciales, por ejemplo, $u_0 = 0.2$, 0.4, 0.6 y 0.8. Observe que en cada caso la solución tiende a una oscilación estable entre los dos mismos valores. Esto ilustra que el comportamiento a largo plazo de la solución es independiente de las condiciones iniciales.
    b) Efectúe cálculos semejantes y compruebe que la naturaleza de la solución para n grande es independiente de la condición inicial para otros valores de ρ, como 2.6, 2.8 y 3.4.
16. Suponga que $\rho > 1$ en la ecuación (20).
    a) Trace un diagrama escalonado cualitativamente correcto y, de ese modo, demuestre que si $u_0 < 0$, entonces $u_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.
    b) De manera semejante, determine qué sucede cuando $n \to \infty$ si $u_0 > 1$.
17. Las soluciones de la ecuación (20) cambian de sucesiones convergentes a oscilaciones periódicas de periodo 2 cuando el parámetro ρ pasa por el valor 3. A fin de ver con más claridad cómo sucede esto, efectúe los cálculos siguientes.
    a) Trace la gráfica o calcule la solución para $\rho = 2.9$, 2.95 y 2.99, respectivamente, usando un valor inicial u_0 que se desee en el intervalo (0, 1). En cada caso, estime cuántas iteraciones se requieren para que la solución se aproxime "bastante" al valor límite. Use cualquier interpretación conveniente del significado de "bastante" en la oración precedente.
    b) Trace la gráfica o calcule la solución para $\rho = 3.01$, 3.05 y 3.1, respectivamente, usando la misma condición inicial que en el inciso a). En cada caso, estime cuántas iteraciones se necesitan para llegar a una oscilación de estado estable. También encuentre o estime los dos valores en la oscilación de estado estable.
18. Mediante el cálculo o al trazar la gráfica de la solución de la ecuación (20) para diferentes valores de ρ, calcule el valor de ρ para el cual la solución cambia de una oscilación de periodo dos a una de periodo cuatro. De la misma manera, calcule el valor de ρ para el cual la solución cambia de periodo cuatro a periodo ocho.

19. Sea ρ_k el valor de ρ para el cual la solución de la ecuación (20) cambia de periodo 2^{k-1} a periodo 2^k. Por tanto, como se hizo notar en el texto $\rho_1 = 3$, $\rho_2 \cong 3.449$ y $\rho_3 \cong 3.544$.
a) Usando estos valores de ρ_1, ρ_2 y ρ_3 o los hallados en el problema 18, calcule $(\rho 2 - \rho_1)/(\rho_3 - \rho_2)$.
b) Sea $\delta_n = (\rho_n - \rho_{n-1})/(\rho_{n+1} - \rho_n)$. Se ha demostrado que δ_n tiende al límite δ cuando $n \to \infty$, en donde $\delta \cong 4.6692$ se conoce como número de Feigenbaum. Determine la diferencia porcentual entre el valor límite δ y δ_2, según se calculó en el inciso a).
c) Suponga que $\delta_3 = \delta$, y use esta relación para estimar ρ_4, el valor de ρ en el que aparecen soluciones de periodo dieciséis.
d) Mediante el trazado de la gráfica o el cálculo de soluciones próximas al valor de ρ_4 que se halló en el inciso c), intente detectar el surgimiento de una solución de periodo dieciséis.
*e) Observe que

$$\rho_n = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \cdots + (\rho_n - \rho_{n-1}).$$

Si se supone que $(\rho_4 - \rho_3) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-1}$, $(\rho_5 - \rho_4) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-2}$, etcétera, exprese ρ_n como una suma geométrica. Luego, halle el límite de ρ_n cuando $n \to \infty$. Esta es una estimación del valor de ρ en el que se inicia el caos en la solución de la ecuación logística (20).

BIBLIOGRAFÍA

Dos libros mencionados en la sección 2.6 son:

Bailey, N. T. J., *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications* (2a. ed.)(New York: Hafner Press).

Clark, Colin W., *Mathematical Bioeconomics* (2a ed.) (New York: Wiley-Interscience).

Una introducción a la dinámica de las poblaciones en general es:

Frauenthal, J. C., *Introduction to Population Modeling* (Boston: Birkhauser).

Puede hallarse un análisis más completo de la demostración del teorema fundamental de existencia y unicidad en muchos libros más avanzados sobre ecuaciones diferenciales. Dos de éstos razonablemente accesibles para los lectores principiantes son:

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall).

Brauer, F., y Nohel, J., *Ordinary Differential Equations* (2a ed.) (New York: Benjamin).

Un catálogo útil de ecuaciones diferenciales y sus soluciones está contenido en el siguiente libro:

Kamke, E., *Differentialgleichungen Lösungsmethoden un Lösungen* (New York: Chelsea).

Aunque el texto está en alemán, se requieren muy pocos conocimientos de este idioma para consultar la lista de problemas resueltos.

Un valioso compendio de métodos para resolver ecuaciones diferenciales es:

Zwillinger, D., *Handbook of Differential Equations* (San Diego: Academic Press).

Puede hallarse bastante material relacionado con aplicaciones elementales de las ecuaciones diferenciales en la biblioteca de los *UMAP* Modules y en el *UMAP Journal* producido por el *Consortium for Mathematics and Its Applications* (COMAP), Lexington, Massachusetts.

Una referencia general sobre ecuaciones diferenciales es:

Mickens, R. E., *Difference Equations, Theory and Applications* (2a ed.)(New York: Van Nostrand Reinhold).

Un tratado elemental de las soluciones caóticas de las ecuaciones en diferencias es:

Devaney, R. L., *Chaos Fractals, and Dynamics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley).

Capítulo 3 Ecuaciones lineales de segundo orden

Las ecuaciones lineales de segundo orden tienen una importancia primordial en el estudio de las ecuaciones diferenciales por dos razones principales. La primera es que las ecuaciones lineales poseen una rica estructura teórica que sustenta varios métodos sistemáticos de resolución. Además, una parte sustancial de esta estructura y estos métodos son comprensibles en un nivel matemático bastante elemental. A fin de presentar las ideas clave en el contexto más sencillo posible, se les estudia en este capítulo para las ecuaciones de segundo orden. Otra razón para estudiar las ecuaciones lineales de segundo orden es que son imprescindibles en cualquier investigación seria de las áreas clásicas de la física-matemática. No es posible avanzar mucho en el análisis de la mecánica de fluidos, la conducción del calor, el movimiento ondulatorio o los fenómenos electromagnéticos sin encontrar que es necesario resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

3.1 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

en donde f es alguna función dada. Se dice que la ecuación (1) es **lineal** si la función f puede escribirse como

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y, \tag{2}$$

en donde g, p y q son funciones especificadas de la variable independiente x. En este caso, la ecuación (1) queda

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{3}$$

en donde los apóstrofos denotan derivación con respecto a x. En vez de (3), a menudo se ve la ecuación

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x); \tag{4}$$

por supuesto, si (4) se divide en $P(x)$, entonces se reduce a la ecuación (3) con

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}, \qquad g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}. \tag{5}$$

Al analizar e intentar resolver (3), es necesario restringirse a intervalos en los cuales p, q y g son funciones continuas.

Si (1) no es de la forma (3) o (4), entonces se dice que es **no lineal**. Un análisis extenso de las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden es demasiado difícil para un texto de este nivel, por lo que se dirá relativamente poco acerca de ellas. Sin embargo, existen dos tipos especiales de ecuaciones no lineales de segundo orden que se pueden resolver mediante un cambio de variables que las reduce a ecuaciones de primer orden. En los problemas 17 a 32, se bosqueja este procedimiento.

Un problema con valor inicial consta de una ecuación diferencial como (1), (3) o (4) junto con un par de condiciones iniciales de la forma

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0', \tag{6}$$

en donde y_0 y y_0' son números dados. Observe que las condiciones iniciales para una ecuación de segundo orden prescriben no sólo un punto particular (x_0, y_0) por el que debe pasar la gráfica de la solución, también la pendiente y_0' de la gráfica en ese punto. Resulta razonable esperar que para una ecuación de segundo orden se necesiten dos condiciones iniciales porque, en términos generales, para hallar una solución se requieren dos integraciones y cada una introduce una constante arbitraria. Es de suponer que bastarán dos condiciones iniciales para determinar los valores de estas dos constantes.

Las ecuaciones lineales de segundo orden surgen en muchas aplicaciones importantes. Por ejemplo, el movimiento de una masa sujeta a un resorte y muchos otros sistemas oscilatorios simples, se describen por una ecuación de la forma

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t), \tag{7}$$

en donde m, c y k son constantes y F es una función prescrita. Esta ecuación se analiza en la sección 3.9. Otros ejemplos son la ecuación de Bessel[1] de orden ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{8}$$

[1] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) emprendió una carrera de administración en su juventud, pero pronto se interesó en la astronomía y las matemáticas. Fue designado director del observatorio de Königsberg en 1810, puesto que ocupó hasta su fallecimiento. Sus estudios de las perturbaciones planetarias lo llevaron en 1824 a efectuar el primer análisis sistemático de las soluciones, conocidas como funciones de Bessel, de la ecuación (8). También es famoso por haber realizado la primera determinación exacta (1838) de la distancia de la Tierra a una estrella.

y la ecuación de Legendre[2] de orden α,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{9}$$

en donde v y α son constantes. La ecuación de Bessel se presenta en muchas situaciones físicas con mayor frecuencia en problemas que comprenden geometría circular, como la determinación de la distribución de temperaturas en una placa circular. La ecuación de Legendre se encuentra frecuentemente en situaciones físicas que están relacionadas con geometría esférica.

Se dice que una ecuación lineal de segundo orden es **homogénea** si el término $g(x)$ de la ecuación (3), o el término $G(x)$ de la (4), es cero para toda x. En caso contrario, la ecuación es **no homogénea**. Como resultado, el término $g(x)$, o el $G(x)$, algunas veces se le nombra término no homogéneo. Se empezará el análisis con las ecuaciones homogéneas, las que se escribirán en la forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{10}$$

Más tarde, en las secciones 3.6 y 3.7, se demostrará que una vez que se resuelve la ecuación homogénea, siempre es posible resolver la ecuación no homogénea correspondiente (4), o por lo menos expresar la solución en términos de una integral. Por tanto, el problema de resolver la ecuación homogénea es el fundamental. En este capítulo[3], la atención se concentrará en las ecuaciones para las que las funciones P, Q y R son constantes. En este caso la ecuación (10) se transforma en

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{11}$$

en donde a, b y c son constantes dadas. Resulta que la ecuación (11) siempre puede resolverse con facilidad en términos de las funciones elementales de cálculo. Por otra parte, suele ser mucho más difícil resolver la ecuación (10) si los coeficientes no son constantes, y el tratamiento de ese caso se pospone hasta el capítulo 5.

Antes de abordas la ecuación (11), considérese en primer lugar un ejemplo especialmente sencillo, para adquirir cierta experiencia. Sea la ecuación

$$y'' - y = 0 \tag{12}$$

que es de la forma (11) con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1$. En palabras, la (12) pide que se busque una función con la propiedad de que la segunda derivada de esa función sea igual a ella misma. Al reflexionar un poco se recordará al menos una bien conocida función del cálculo con esta propiedad, a saber $y_1(x) = e^x$, la función exponencial. Con un poco más de reflexión también se puede llegar a una segunda función, $y_2(x) = e^{-x}$. Algunos ensayos más pueden revelar que los múltiplos de estas dos soluciones también son soluciones. Por ejemplo, las funciones $2e^x$ y $5e^{-x}$ también satisfacen la ecuación (12), como es posible comprobar si se calculan sus segundas derivadas. De la misma manera, las funciones $c_1y_1(x) = c_1e^x$ y $c_2y_2(x)$

[2] Adrien-Marie Legendre (1752–1833) ocupó varios puestos en la Academia Francesa de Ciencias a partir de 1783. Su trabajo principal lo realizó en los campos de las funciones elípticas y la teoría de los números. Las funciones de Legendre, soluciones de la ecuación (9), aparecieron por primera vez en 1784 en su estudio de la atracción de esferoides.

[3] En el capítulo 4 se presenta un tratamiento correspondiente de las ecuaciones lineales de orden superior. Si lo desea, puede leer las partes apropiadas del capítulo 4 en paralelo con el capítulo 3.

$= c_2e^{-x}$ satisfacen la ecuación diferencial (12) para todos los valores de las constantes c_1 y c_2. A continuación, es de suma importancia observar que cualquier suma de soluciones de la ecuación (12) también es una solución. En particular, dado que $c_1y_1(x)$ y $c_2y_2(x)$ son soluciones de (12), así también lo es de la función

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} \tag{13}$$

para valores cualesquiera de c_1 y c_2. Una vez más, esto puede verificarse al calcular la segunda derivada y'' a partir de (13). En efecto, se tiene $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$ y $y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}$; por tanto, y'' es igual a y, y se satisface la ecuación (12).

Ahora un resumen de lo que se ha hecho hasta el momento en este ejemplo. Una vez que se observa que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$, son soluciones de la ecuación (12), se concluye que la combinación lineal general (13) de estas funciones también es una solución. Dado que los coeficientes c_1 y c_2 de la ecuación (13) son arbitrarios, esta expresión representa una familia doblemente infinita de soluciones de la ecuación diferencial (12).

Ahora es posible considerar cómo elegir un miembro en particular de esta familia infinita de soluciones que también satisfaga un conjunto dado de condiciones iniciales. Por ejemplo, suponga que se busca la solución de la ecuación (12) que también satisfaga las condiciones iniciales

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1. \tag{14}$$

En otras palabras, se busca la solución que pasa por el punto (0,2) y que en ese punto tiene la pendiente –1. Primero, se hace $x = 0$ y $y = 2$ en la ecuación (13); con ello se obtiene

$$c_1 + c_2 = 2. \tag{15}$$

Luego, se deriva la ecuación (13), lo que da por resultado

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x}.$$

Entonces, al hacer $x = 0$ y $y' = -1$, se obtiene

$$c_1 - c_2 = -1. \tag{16}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (15) y (16) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$c_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad c_2 = \tfrac{3}{2}.$$

Por último, si se introducen estos valores en (13), se obtiene

$$y = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{3}{2}e^{-x}, \tag{17}$$

la solución del problema con valor inicial que consta de la ecuación diferencial (12) y las condiciones iniciales (14).

Ahora se regresará a la ecuación más general (11),

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

que tiene coeficientes constantes (reales) arbitrarios. Con base en la experiencia adquirida con (12), también se buscan las soluciones exponenciales de (11). Por tanto, se supone que

$y = e^{rx}$, en donde r es un parámetro por determinar. Luego, se sigue que $y' = re^{rx}$ y $y'' = r_2e^{rx}$. Al sustituir estas expresiones para y, y' y y'' en (11), se obtiene

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0,$$

o bien, dado que $e^{rx} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{18}$$

La ecuación (18) se llama **ecuación característica** de la ecuación diferencial (11). Su importancia reside en el hecho de que si r es una raíz de la ecuación polinomial (18), entonces $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación diferencial (11). Ya que (18) es una ecuación cuadrática con coeficientes reales, tiene dos raíces, que pueden ser reales y diferentes, reales pero repetidas, o complejas conjugadas. Por el momento se considerará el primer caso, y los dos últimos en las secciones 3.4 y 3.5.

Si se supone que las raíces de la ecuación característica (18) son reales y diferentes, denótense por r_1 y r_2, en donde, por supuesto, $r_1 \neq r_2$. Entonces $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ son dos soluciones de la ecuación (11). Así como en el ejemplo anterior, ahora se concluye que

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \tag{19}$$

también es una solución de (11). Para verificar este hecho, se puede derivar la expresión de la ecuación (19); de donde,

$$y' = c_1r_1e^{r_1x} + c_2r_2e^{r_2x} \tag{20}$$

y

$$y'' = c_1r_1^2e^{r_1x} + c_2r_2^2e^{r_2x}. \tag{21}$$

Si se sustituyen estas expresiones para y, y' y y'' en (11), se obtiene

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1x} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2x}. \tag{22}$$

La cantidad entre cada uno de los paréntesis del segundo miembro de la ecuación (22) es cero porque r_1 y r_2 son raíces de (18); por consiguiente, según está definida por (19), en efecto y es una solución de la ecuación (11), que era lo que se quería comprobar.

Ahora suponga que se desea encontrar el miembro particular de la familia de soluciones (19) que satisfaga las condiciones iniciales (6),

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'.$$

Al sustituir $x = x_0$ y $y = y_0$ en (19), se obtiene

$$c_1e^{r_1x_0} + c_2e^{r_2x_0} = y_0. \tag{23}$$

De manera semejante, al hacer $x = x_0$ y $y' = y_0'$ en (20), da

$$c_1r_1e^{r_1x_0} + c_2r_2e^{r_2x_0} = y_0'. \tag{24}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (23) y (24) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0r_2}{r_1 - r_2}e^{-r_1x_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0r_1 - y_0'}{r_1 - r_2}e^{-r_2x_0}. \tag{25}$$

Por tanto, no importa cuáles condiciones iniciales se asignen; es decir, sin importar los valores de x_0, y_0 y y_0' de (6), siempre es posible determinar c_1 y c_2 de modo que se satisfagan las condiciones iniciales; es más, sólo existe una elección posible de c_1 y c_2 para cada conjunto de condiciones iniciales. Con los valores de c_1 y c_2 dados por la ecuación (25), la expresión (19) es la solución del problema con valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{26}$$

Es posible demostrar, con base en el teorema fundamental que se cita en la siguiente sección, que todas las soluciones de (11) están incluidas en la expresión (19), al menos para el caso en el que las raíces de (18) son reales y diferentes. Por lo tanto, la ecuación (19) se le conoce como solución general de la ecuación (11). El hecho de que todas las condiciones iniciales posibles se puedan satisfacer al elegir de manera adecuada las constantes de la ecuación (19) hace más plausible la idea de que esta expresión en realidad incluye todas las soluciones de (11).

Ejemplo 1 Encontrar la solución general de

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \tag{27}$$

Se supone que $y = e^{rx}$ y se sigue que r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

Por tanto, los valores posibles de r son $r_1 = -2$ y $r_2 = -3$; la solución general de la ecuación (27) es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}. \tag{28}$$

Ejemplo 2 Hallar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \tag{29}$$

La solución general de la ecuación diferencial se encontró en el ejemplo 1 y está dada por la ecuación (28). Para satisfacer la primera condición inicial, se hace $x = 0$ y $y = 2$ en (28); por tanto, c_1 y c_2 deben satisfacer

$$c_1 + c_2 = 2. \tag{30}$$

Para usar la segunda condición inicial, primero debe derivarse la ecuación (28); esto da $y' = -2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x}$. Entonces, si se hace $x = 0$ y $y' = 3$, se obtiene

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \tag{31}$$

Al resolver las ecuaciones (30) y (31) se encuentra que $c_1 = 9$ y $c_2 = -7$. Si se usan estos valores en la expresión (28) se obtiene la solución

$$y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x} \tag{32}$$

del problema con valor inicial (29). En la figura 3.1.1 se muestra la gráfica de la solución

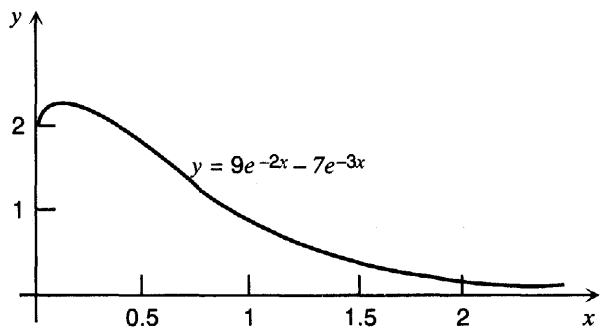


FIGURA 3.1.1 Solución de $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$.

Ejemplo 3 Hallar la solución del problema con valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}. \tag{33}$$

Si $y = e^{rx}$, entonces la ecuación característica es

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

y sus raíces son $r = 3/2$ y $r = 1/2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^{x/2}. \tag{34}$$

Si se aplican las condiciones iniciales se obtienen las dos ecuaciones siguientes para c_1 y c_2:

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad \tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 = \tfrac{1}{2}.$$

La solución de estas ecuaciones es $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{2}$, y la solución del problema con valor inicial (33) es

$$y = -\tfrac{1}{2}e^{3x/2} + \tfrac{5}{2}e^{x/2}. \tag{35}$$

En la figura 3.1.2 se muestra la gráfica de la solución.

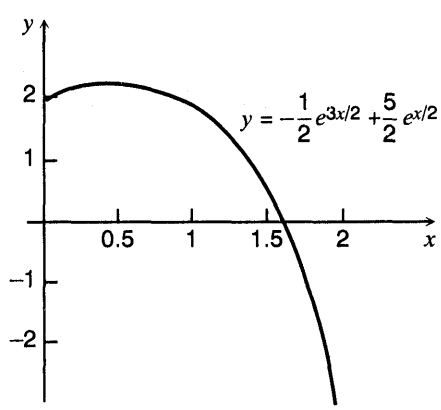


FIGURA 3.1.2 Solución de $4y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0.5$.

Ejemplo 4 Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + y' - 12y = 0, \qquad y(2) = 2, \quad y'(2) = 0. \tag{36}$$

La ecuación característica es

$$r^2 + r - 12 = 0$$

con las raíces $r_1 = 3$ y $r_2 = -4$, de modo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x} \tag{37}$$

Las condiciones iniciales requieren que c_1 y c_2 satisfagan

$$c_1 e^6 + c_2 e^{-8} = 2, \qquad 3c_1 e^6 - 4c_2 e^{-8} = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene

$$c_1 = \tfrac{8}{7} e^{-6}, \qquad c_2 = \tfrac{6}{7} e^8,$$

de modo que la solución del problema con valor inicial (36) es

$$y = \tfrac{8}{7} e^{-6} e^{3x} + \tfrac{6}{7} e^8 e^{-4x} = \tfrac{8}{7} e^{3(x-2)} + \tfrac{6}{7} e^{-4(x-2)}. \tag{38}$$

De manera alternativa, en vez de utilizar la ecuación (37), es posible escribir la solución general como

$$y = k_1 e^{3(x-2)} + k_2 e^{-4(x-2)}.$$

En esta forma es un poco más fácil aplicar las condiciones iniciales, con el resultado de que $k_1 = 8/7$, $k_2 = 6/7$, de modo que nuevamente se obtiene la solución (38). Este ejemplo hace ver que no hay dificultad en aplicar las condiciones iniciales en un valor de x que no sea cero.

Dado que la solución general (19) es la suma de dos funciones exponenciales, su comportamiento geométrico es relativamente sencillo: cuando x crece, la magnitud de la solución tiende a cero (si los dos exponentes son negativos) o bien, crece con rapidez (si por lo menos un exponente es positivo). Estos dos casos se ilustran por medio de las soluciones de los ejemplos 2 y 3, que se muestran en las figuras 3.1.1 y 3.1.2, respectivamente. También existe un tercer caso que ocurre menos a menudo; la solución tiende a una constante cuando uno de los exponentes es cero y el otro es negativo.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, halle la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

En cada uno de los problemas 9 a 14, encuentre la solución del problema con valor inicial dado. Trace la gráfica de la solución y describa su comportamiento al crecer x.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
14. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$

15. Encuentre α de modo que la solución del problema con valor inicial $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = \alpha, y'(0) = 2$ tienda a cero cuando $x \to \infty$.
16. Halle β de modo que la solución del problema con valor inicial $4y'' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \beta$ tienda a cero cuando $x \to \infty$.

Ecuaciones en las que falta y. En una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $y'' = f(x,y')$, la sustitución $v' = y'$, $v' = y''$ da una ecuación de primer orden de la forma $v' = f(x, v)$. Si es posible resolver esta ecuación para v entonces puede obtenerse y al integrar $dy/dx = v$. Observe que al resolver la ecuación de primer orden para v se obtiene una constante arbitraria y que en la integración para y se introduce una segunda constante arbitraria. En cada uno de los problemas 17 a 22 aplique esta sustitución para resolver la ecuación dada.

17. $x^2y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$
18. $xy'' + y' = 1, \quad x > 0$
19. $y'' + x(y')^2 = 0$
20. $2x^2y'' + (y')^3 = 2xy', \quad x > 0$
21. $y'' + y' = e^{-x}$
22. $x^2y'' = (y')^2, \quad x > 0$

Ecuaciones en las que falta x. Si una ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma $y'' = f(y,y')$, la variable independiente x no aparece explícitamente, sólo a través de la variable dependiente y. Si se hace $v = y'$, entonces se obtiene $dv/dx = f(y, v)$. Como el segundo miembro de esta ecuación depende de y y v, en lugar de x y v, esta ecuación no es de la forma de las ecuaciones de primer orden analizadas en el capítulo 2. Sin embargo, si se piensa en y como la variable independiente entonces, por la regla de la cadena, $dv/dx = (dv/dy)(dy/dx) = v(dv/dy)$. De donde, la ecuación diferencial original puede escribirse como $v(dv/dy) = f(y, v)$. En el supuesto de que sea posible resolver esta ecuación de primer orden, se obtiene v como una función de y. Al resolver $dy/dx = v(y)$ resulta una relación entre y y x. Una vez más, en el resultado final aparecen dos constantes arbitrarias. En cada uno de los problemas 23 a 28, aplique este método para resolver la ecuación diferencial dada.

23. $yy'' + (y')^2 = 0$
24. $y'' + y = 0$
25. $y'' + y(y')^3 = 0$
26. $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$
27. $yy'' - (y')^3 = 0$
28. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

Sugerencia: en el problema 28, la ecuación trasformada es una ecuación de Bernoulli. Ver el problema 27 de la sección 2.2.

En cada uno de los problemas 29 a 32, resuelva el problema con valor inicial dado, aplicando los métodos de los problemas 17 a 28.

29. $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
30. $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$
31. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 3x^{-2} = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$
32. $y'y'' - x = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$

La solución de una ecuación de segundo orden de la forma $y'' = f(x,y,y')$ suele comprender dos constantes arbitrarias. A la inversa, es posible demostrar que una familia dada de funciones que contiene dos constantes arbitrarias es la solución de alguna ecuación diferencial de segundo orden. En cada uno de los problemas 33 a 38 elimine las constantes c_1 y c_2 entre y, y' y y'', para encontrar la ecuación diferencial que satisface la familia dada de funciones.

33. $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$
34. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$
35. $y = c_1x + c_2 \operatorname{sen} x$
36. $y = (c_1 + c_2x)e^x$
37. $y = c_1x + c_2x^2$
38. $y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x$

3.2 Soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas

En la sección anterior se mostró cómo resolver algunas ecuaciones diferenciales de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

en donde a, b y c son constantes. Ahora se trabajará con esos resultados para dar una imagen más clara de la estructura de las soluciones de todas las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden. A su vez, este conocimiento será útil para hallar las soluciones de otros problemas que se encontrarán posteriormente.

En el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, ayuda a introducir la notación de un operador diferencial. Sean p y q funciones continuas sobre un intervalo abierto i; es decir, para $\alpha < x < \beta$. Se incluyen los casos $\alpha = -\infty$ o $\beta = \infty$, o los dos. Entonces, para cualquier función ϕ que sea dos veces diferenciable sobre I, se define el operador diferencial L por la ecuación

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \tag{1}$$

Observe que $L[\phi]$ es una función sobre I. El valor de $L[\phi]$ en un punto x es

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x).$$

Por ejemplo, si $p(x) = x^2$, $q(x) = 1 + x$ y $\phi(x) = \operatorname{sen} 3x$, entonces

$$\begin{aligned} L[\phi](x) &= (\operatorname{sen} 3x)'' + x^2(\operatorname{sen} 3x)' + (1 + x)\operatorname{sen} 3x \\ &= -9 \operatorname{sen} 3x + 3x^2 \cos 3x + (1 + x)\operatorname{sen} 3x. \end{aligned}$$

El operador L suele escribirse como $L = D^2 + pD + q$, en donde D es el operador derivada.

En esta sección se estudia la sección lineal homogénea de segundo orden $L[\phi](x) = 0$. Dado que se acostumbra usar el símbolo y para denotar $\phi(x)$, por lo general esta ecuación se escribirá en la forma

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

A la ecuación (2) se le asocia un conjunto de condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0, \tag{3}$$

en donde x_0 es cualquier punto en el intervalo I, y y_0 y y_0' son números reales dados. El resultado teórico fundamental para los problemas con valor inicial de las ecuaciones lineales de segundo orden se enuncia en el siguiente teorema, que es el análogo al teorema 2.2.1 para las ecuaciones lineales de primer orden. Este resultado se aplica con igual propiedad a las ecuaciones no homogéneas. por lo que el teorema se enuncia en esa forma.

Teorema 3.2.1 Considérese el problema con valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \tag{4}$$

en donde p, q y g son continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces existe exactamente una solución $y = \phi(x)$ de este problema y la solución existe en todo el intervalo I.

Se hace hincapié en que el teorema afirma tres cosas:

1. El problema con valor inicial *tiene* una solución; en otras palabras, *existe* una solución.
2. El problema con valor inicial tiene *una sola* solución; es decir, la solución es *única*.
3. La solución es una función por lo menos dos veces diferenciable *en todo el intervalo I* en donde los coeficientes son continuos.

Para algunos problemas, es fácil probar algunas de estas afirmaciones. Por ejemplo, en la sección 3.1 se encontró que el problema con valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \tag{5}$$

tiene una solución

$$y = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{3}{2}e^{-x}. \tag{6}$$

El hecho de que se encuentre una solución evidentemente establece que existe una solución para este problema con valor inicial. De manera semejante, la solución (6) es dos veces diferenciable, de hecho lo es cualquier número de veces, en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ en donde los coeficientes de la ecuación diferencial son continuos. Por otra parte, no es obvio, y es más difícil demostrar, que el problema con valor inicial (5) no tiene otras soluciones que no sean la dada por la ecuación (6). Sin embargo, el teorema 3.2.1 afirma que esta solución es única, de modo que (6) es, de hecho, la única solución del problema con valor inicial (5).

Para el problema más general (4) por lo común, es posible escribir una fórmula simple para la solución, Por lo tanto, todas las partes del teorema deben probarse por métodos generales que no entrañen el conocimiento de la solución en términos de funciones elementales. Ésta es una diferencia importante entre las ecuaciones lineales de primer orden y las de segundo. La demostración del teorema 3.2.1 es bastante difícil, por lo que no se abordará aquí. Sin embargo, se aceptará este teorema como verdadero y se aplicará siempre que sea necesario.

Ejemplo 1 Encontrar el intervalo más largo en el que se tiene la certeza de que existe la solución del problema con valor inicial

$$(x^2 - 3x)y'' + xy' - (x + 3)y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

Si la ecuación diferencial dada se escribe en la forma de la ecuación (4), entonces $p(x) = 1/(x-3)$, $q(x) = -(x + 3)/x(x - 3)$ y $g(x) = 0$. Los únicos puntos de discontinuidad de los coeficientes son $x = 0$ y $x = 3$. Por consiguiente, el intervalo abierto más largo que contiene el punto inicial $x = 1$, en el que todos los coeficientes son continuos es $0 < x < 3$. Por tanto, este es el intervalo más largo para el cual el teorema 3.2.1 garantiza la existencia de la solución.

Ejemplo 2 Hallar la solución única del problema con valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0,$$

en donde p y q son continuas en un intervalo abierto I que contiene a x_0.

La función $y = \phi(x) = 0$ para toda x en I evidentemente satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Por el teorema 3.2.1, es la única solución del problema dado.

Supóngase ahora que y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación (2); en otras palabras,

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \tag{7}$$

y de manera semejante para y_2. Entonces, así como en los ejemplos de la sección 3.1, es posible generar más soluciones mediante la formación de combinaciones lineales de y_1 y y_2. Se enunciará este resultado como un teorema.

Teorema 3.2.2 (Principio de superposición) Si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

entonces la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución para cualesquiera valores de las constantes c_1 y c_2.

Para demostrar el teorema 3.2.2 solamente es necesario sustituir y por

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{8}$$

en la (2); el resultado es

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2]. \end{aligned}$$

Dado que $L[y_1] = 0$ y $L[y_2] = 0$, se deduce que también $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$. Por lo tanto, sin importar los valores de c_1, c_2, según se da por la ecuación (8), y satisface la ecuación diferencial (2) y se ha completado la demostración del teorema 3.2.2.

Se tiene una caso especial del teorema 3.2.3 si c_1 o c_2 es cero. Entonces se concluye que cualquier múltiplo de una solución de la ecuación (2) también es una solución.

Ahora se regresará a la cuestión de si pueden elegirse las constantes c_1 y c_2 de modo que satisfagan las condiciones iniciales (3). Estas condiciones iniciales requieren que c_1 y c_2 satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y_0, \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= y_0'. \end{aligned} \tag{9}$$

Al resolver las ecuaciones (9) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_0y_2'(x_0) - y_0'y_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)}, \\ c_2 &= \frac{-y_0y_1'(x_0) + y_0'y_1(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)}, \end{aligned} \tag{10}$$

o bien, en términos de determinantes,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Con estos valores de c_1 y c_2, la expresión (8) satisface las condiciones iniciales (3), así como la ecuación diferencial (2).

A fin de que las expresiones para c_1 y c_2 de las ecuaciones (10) u (11) tengan sentido, es necesario que los denominadores sean diferentes de cero. Para las dos, c_1 y c_2, el denominador es el mismo; a saber, el determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0). \tag{12}$$

El determinante W se conoce como **determinante wronskiano**, o simplemente **wronskiano**[4], de las soluciones y_1 y y_2. Algunas veces se utiliza la notación más amplia $W(y_1, y_2)(x_0)$ para representar la expresión del segundo miembro de la ecuación (12), haciendo resaltar de esta manera que el wronskiano depende de las funciones y_1 y y_2, y que se evalúa en el punto x_0. La argumentación precedente basta para establecer el resultado siguiente.

[4] Los determinantes wronskianos deben su nombre a Józef Maria Hoëné-Wronski (1776–1853), quien nació en Polonia aunque pasó la mayor parte de su vida en Francia. Hombre talentoso pero inquieto, su vida estuvo marcada por disputas acaloradas frecuentes con otras personas e instituciones.

Teorema 3.2.3

Supóngase que y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

y que el wronskiano

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2$$

es diferente de cero en el punto x_0 donde se asignan las condiciones iniciales (3)

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'$$

Entonces existe una elección de las constantes c_1 y c_2 para la que $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ satisface la ecuación diferencial (2) y las condiciones iniciales (3).

Ejemplo 3

En el ejemplo 1 de la sección 3.1 se encontró que $y_1(x) = e^{-2x}$ y $y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Hallar el wronskiano de y_1 y y_2.

El wronskiano de estas dos funciones es

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}.$$

Dado que W es diferente de cero para todos los valores de x, pueden usarse las funciones y_1 y y_2 para construir soluciones de la ecuación diferencial dada, junto con condiciones iniciales prescritas en cualquier valor de x. En el ejemplo 2 de la sección 3.1 se resolvió un problema con un valor inicial de este tipo.

El siguiente teorema justifica la expresión "solución general" que se introdujo en la sección 3.1 para la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$.

Teorema 3.2.4

Si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

y si existe un punto x_0 en donde el wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero, entonces la familia de soluciones

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

con coeficientes arbitrarios c_1 y c_2 incluye toda solución de la ecuación (2).

Sea ϕ cualquier solución de la ecuación (2). Para probar el teorema es necesario demostrar que ϕ está incluida en la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$; es decir, para alguna elección de las constantes c_1 y c_2 la combinación lineal es igual a ϕ. Sea x_0 un punto en donde el

wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero. Entonces, evalúense ϕ y ϕ' en este punto y se llama a estos valores y_0 y y_0', respectivamente; por tanto,

$$y_0 = \phi(x_0), \qquad y_0' = \phi'(x_0).$$

A continuación, considérese el problema con valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{13}$$

La función ϕ evidentemente es una solución de este problema con valor inicial. Por otra parte, como $W(y_1, y_2)(x_0)$ es diferente de cero, es posible (por el teorema 3.2.3) elegir c_1 y c_2 de modo que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también sea una solución del problema con valor inicial (13). En efecto, los valores adecuados de c_1 y c_2 los dan las ecuaciones (10) u (11). La parte de unicidad del teorema 3.2.1 garantiza que estas dos soluciones del mismo problema con valor inicial en realidad son la misma función; por tanto, para la elección adecuada de c_1 y c_2,

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

y por lo tanto, ϕ está incluida en la familia de funciones $c_1y_1 + c_2y_2$. Por último, como ϕ es una solución *arbitraria* de (2), se concluye que *toda* solución de esta ecuación está incluida en esta familia. Esto completa la demostración del teorema 3.2.4.

El teorema 3.2.4 afirma que, en tanto que el wronskiano de y_1 y y_2 sea diferente de cero, la combinación lineal $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ contiene todas las soluciones de la ecuación (2). Por consiguiente, es natural (y ya se hizo esto en la sección precedente) llamar a la expresión

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

con coeficientes constantes arbitrarios, **solución general** de (2). Se dice que las soluciones y_1 y y_2, con wronskiano diferente de cero, forman un **conjunto fundamental de soluciones** de (2).

Puede reenunciarse el resultado del teorema 3.2.4 en un lenguaje ligeramente diferente: para encontrar la solución general y, por lo tanto, todas las soluciones de una ecuación de la forma (2), basta hallar dos soluciones de la ecuación dada cuyo wronskiano sea diferente de cero. Esto fue precisamente lo que se hizo en varios ejemplos de la sección 3.1, aunque ahí no se calcularon los wronskianos. Ahora el lector debe regresar y calcularlos y comprobar de esta manera que todas las soluciones de la sección 3.1 a los que se llamó "soluciones generales" en realidad satisfacen la condición necesaria del wronskiano. De manera alternativa, en el siguiente ejemplo se incluyen todos los que se mencionaron en la sección 3.1, así como muchos otros problemas de tipo semejante.

Ejemplo 4 Supóngase que $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ son dos soluciones de una ecuación de la forma (1). Demostrar que forman un conjunto fundamental de soluciones si $r_1 \neq r_2$.

Calcule el wronskiano de y_1 y y_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\exp[(r_1 + r_2)x].$$

Dado que la función exponencial nunca es cero y como $r_2 - r_1 \neq 0$ por la proposición del problema, se deduce que W es diferente de cero para todo valor de x. Como consecuencia, y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo Demostrar que $y_1(x) = x^{1/2}$ y $y_2(x) = x^{-1}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{14}$$

En la sección 5.5 se mostrará cómo resolver la ecuación (14); ver también el problema 32 en la sección 3.4. Sin embargo, en esta etapa es posible comprobar por sustitución directa que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Dado que $y_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $y_1''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, se tiene

$$2x^2(-\tfrac{1}{4}x^{-3/2}) + 3x(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}) - x^{1/2} = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} - 1)x^{1/2} = 0.$$

De modo semejante, $y_2'(x) = -x^{-2}$ y $y_2''(x) = 2x^{-3}$, así que

$$2x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)x^{-1} = 0.$$

A continuación calcule el wronskiano W de y_1 y y_2:

$$W = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\tfrac{3}{2}x^{-3/2}. \tag{15}$$

Como $W \neq 0$ para $x > 0$, se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones allí.

En varios casos ha sido posible hallar un conjunto fundamental de soluciones y, por lo tanto, la solución general de una ecuación diferencial dada. Sin embargo, a menudo esto es una tarea difícil y puede surgir la pregunta de si una ecuación diferencial de la forma (2) siempre tiene un conjunto fundamental de soluciones. El siguiente teorema da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Teorema 3.2.5 Considérese la ecuación diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

cuyos coeficientes p y q son continuos sobre algún intervalo abierto I. Elija algún punto x_0 en I. Sea y_1 la solución de la ecuación (2) que también satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = 1, \qquad y'(x_0) = 0,$$

y y_2 la solución de (2) que satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = 0, \qquad y'(x_0) = 1.$$

Entonces y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2).

Primero, observe que la *existencia* de las funciones y_1 y y_2 está asegurada por parte de la existencia del teorema 3.2.1. Para demostrar que forman un conjunto fundamental de soluciones, basta calcular su wronskiano en x_0:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ya que su wronskiano es diferente de cero en el punto x_0, las funciones y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, con lo que se completa la demostración del teorema 3.2.5.

Observe que se justifica la parte difícil de esta demostración, demostrar la existencia de un par de soluciones, con referencia al teorema 3.2.1. Observe también que el teorema 3.2.5 no está dirigido a cómo resolver los problemas con valor inicial especificados, de modo que puedan encontrarse las funciones y_1 y y_2 indicadas en el teorema. Empero, puede ser tranquilizador saber que siempre existe un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 6 Encuentre el conjunto fundamental de soluciones especificado por el teorema 3.2.5, para la ecuación diferencial

$$y'' - y = 0, \tag{16}$$

si se utiliza el punto inicial $x_0 = 0$.

En la sección 3.1 se señaló que dos soluciones de la ecuación (16) son $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$. El wronskiano de estas soluciones es $W = -2 \neq 0$, de modo que forman un conjunto fundamental de soluciones. Sin embargo, no son las soluciones fundamentales indicadas por el teorema 3.2.5 porque no satisfacen las condiciones iniciales mencionadas en ese teorema en el punto $x = 0$.

A fin de encontrar las soluciones fundamentales especificadas por el teorema es necesario hallar las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales adecuadas. Se denota por $y_3(x)$ la solución de la ecuación (16) que satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{17}$$

La solución general de la ecuación (16) es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \tag{18}$$

y se satisfacen las condiciones iniciales (17) si $c_1 = 1/2$ y $c_2 = 1/2$. Por tanto

$$y_3(x) = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x} = \cosh x.$$

De manera semejante, si $y_4(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \tag{19}$$

entonces

$$y_4(x) = \tfrac{1}{2}e^x - \tfrac{1}{2}e^{-x} = \operatorname{senh} x.$$

Como el wronskiano de y_3 y y_4 es

$$W = \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

entonces estas funciones también forman un conjunto fundamental de soluciones, como se afirma en el teorema 3.2.5. Por lo tanto, la solución general de (16) puede escribirse como

$$y = k_1 \cosh x + k_2 \operatorname{senh} x, \tag{20}$$

así como en la forma (18). Se han usado k_1 y k_2 para denotar las constantes arbitrarias de (20) porque no son las mismas que las constantes c_1 y c_2 de (18). Una de las finalidades de este ejemplo es aclarar que una ecuación diferencial dada tiene más de un conjunto fundamental de soluciones; de hecho tiene una infinidad. Como regla, debe elegirse el conjunto que resulte más conveniente.

El análisis de esta sección puede resumirse como sigue. Para encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta,$$

primero es necesario hallar dos funciones y_1 y y_2 que satisfagan la ecuación diferencial en el intervalo $\alpha < x < \beta$. En seguida, debe tenerse la seguridad de que existe un punto en el intervalo en el que el wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero. En estas circunstancias, y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Si se prescriben condiciones iniciales en un punto de $\alpha < x < \beta$, entonces pueden elegirse c_1 y c_2 de modo que satisfagan estas condiciones.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, encuentre el wronskiano del par dado de funciones

1. $e^{2x}, e^{-3x/2}$
2. $\cos x, \operatorname{sen} x$
3. e^{-2x}, xe^{-2x}
4. x, xe^{x}
5. $e^{x} \operatorname{sen} x, e^{x} \cos x$
6. $\cos^2 x, 1 + \cos 2x$

En cada uno de los problemas 7 a 12, determine el mayor intervalo en el que se tiene la certeza de que el problema con valor inicial dado posee una solución única dos veces diferenciable. No intente hallar la solución.

7. $xy'' + 3y = x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$
8. $(x - 1)y'' - 3xy' + 4y = \operatorname{sen} x, \quad y(-2) = 2, \quad y'(-2) = 1$
9. $x(x - 4)y'' + 3xy' + 4y = 2, \quad y(3) = 0, \quad y'(3) = -1$
10. $y'' + (\cos x)y' + 3(\ln |x|)y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 1$
11. $(x - 3)y'' + xy' + (\ln |x|)y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
12. $(x - 2)y'' + y' + (x - 2)(\tan x)y = 0, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 2$
13. Compruebe que $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) = x^{-1}$ son dos soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$ para $x > 0$. A continuación, demuestre que $c_1x^2 + c_2x^{-1}$ también es una solución de esta ecuación para cualesquiera c_1 y c_2.
14. Compruebe que $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = x^{1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $x > 0$. En seguida demuestre que $c_1 + c_2x^{1/2}$ no es, en general, una solución de esta ecuación. ¿Por qué no?
15. Demuestre que si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$, en donde $g(x)$ no siempre es cero, entonces $y = c\phi(x)$, en donde c es cualquier constante diferente de uno, no es una solución. ¿Por qué?
16. ¿Es posible que $y = \operatorname{sen}(x^2)$ sea una solución sobre un intervalo que contenga a $x = 0$ de una ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ con coeficientes continuos? Dé una explicación de la respuesta.
17. Si el wronskiano W de f y g es $3e^{4x}$ y si $f(x) = e^{2x}$, halle $g(x)$.
18. Si el wronskiano W de f y g es x^2e^{x} y si $f(x) = x$, halle $g(x)$.
19. Si $W(f, g)$ es el wronskiano de f y g y si $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, halle el wronskiano $W(u, v)$ de u y v en términos de $W(f, g)$.

20. Si el wronskiano de f y g es $x\cos x - \operatorname{sen} x$ y si $u = f + 3g$, $v = f - g$, halle el wronskiano de u y v.

En los problemas 21 y 22, encuentre el conjunto fundamental de soluciones especificado por el teorema 3.2.5 para la ecuación diferencial y el punto inicial dados.

21. $y'' + y' - 2y = 0, \quad x_0 = 0$ 22. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad x_0 = 1$

En cada uno de los problemas 23 a 26, verifique que las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada. ¿Constituyen un conjunto fundamental de soluciones?

23. $y'' + 4y = 0; \quad y_1(x) = \cos 2x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} 2x$
24. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x$
25. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = xe^x$
26. $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0, \quad 0 < x < \pi; \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x$

*27. **Ecuaciones exactas.** Se dice que la ecuación $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ es exacta si es posible escribirla en la forma $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$, en donde $f(x)$ debe determinarse en términos de $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$. La última ecuación puede integrarse una vez inmediatamente, con lo que se obtiene una ecuación lineal de primer orden para y que es posible resolver como en la sección 2.1. Al igualar los coeficientes de las ecuaciones precedentes y después eliminar $f(x)$, demuestre que una condición necesaria para la exactitud es $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. Es posible demostrar que ésta también es una condición suficiente.

En cada uno de los problemas 28 a 31, aplique el resultado del problema 27 para determinar si la ecuación dada es exacta. En caso afirmativo, resuélvala.

*28. $y'' + xy' + y = 0$ *29. $y'' + 3x^2y' + xy = 0$
*30. $xy'' - (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0, \quad x > 0$ *31. $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0$

*32. **La ecuación adjunta.** Si una ecuación lineal homogénea de segundo orden no es exacta, es posible hacerla exacta si se multiplican por un factor integrante apropiado $\mu(x)$. Por tanto, se requiere que $\mu(x)$ sea tal que $\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$ pueda escribirse en la forma $[\mu(x)P(x)y'] + [f(x)y]' = 0$. Al igualar los coeficientes de estas dos ecuaciones y eliminar $f(x)$, demuestre que la función μ debe satisfacer

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la adjunta de la ecuación original y es importante en la teoría avanzada de las ecuaciones diferenciales. En general, el problema de resolver la ecuación diferencial adjunta es tan difícil como el de resolver la ecuación original, de modo que sólo en ocasiones es posible hallar un factor integrante para una ecuación de segundo orden.

En cada uno de los problemas 33 a 35, aplique el resultado del problema 32 para hallar la adjunta de la ecuación diferencial dada.

*33. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$ Ecuación de Bessel
*34. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$ Ecuación de Legendre
*35. $y'' - xy = 0,$ Ecuación de Airy

*36. Para la ecuación lineal de segundo orden $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ demuestre que la adjunta de la ecuación adjunta es la ecuación original.

*37. Se dice que una ecuación lineal de segundo orden $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ es autoadjunta si su adjunta es la misma que la ecuación original. Demuestre que una condición necesaria para que esta ecuación sea autoadjunta es que $P'(x) = Q(x)$. Determine si cada una de las ecuaciones de los problemas 33 a 35 es autoadjunta.

3.3 Independencia lineal y el wronskiano

La representación de la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden como una combinación lineal de dos soluciones cuyo wronskiano es diferente de cero está estrechamente relacionada con el concepto de independencia lineal de dos funciones. Ésta es una idea muy importante y tiene un significado que rebasa con mucho el contexto actual; en esta sección se le analizará brevemente.

Se dice que dos funciones f y g son **linealmente dependientes** sobre un intervalo si existen dos constantes k_1 y k_2, no ambas cero, tales que

$$k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0 \tag{1}$$

para toda x en el intervalo. Se dice que las funciones f y g son **linealmente independientes** sobre un intervalo si no son linealmente dependientes; es decir, si la ecuación (1) se cumple para toda x en el intervalo sólo si $k_1 = k_2 = 0$. En la sección 4.1 estas definiciones se extienden a un número arbitrario de funciones. Aunque puede ser difícil determinar si un conjunto grande de funciones es linealmente dependiente o independiente, suele ser fácil dar respuesta a esta pregunta para un conjunto de sólo dos funciones: son linealmente dependientes si son proporcionales entre sí y linealmente independientes en caso contrario. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las definiciones que acaban de darse.

Ejemplo 1 Determinar si las funciones sen x y cos $(x - \pi/2)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes sobre un intervalo arbitrario.

Las funciones dadas son linealmente dependientes sobre cualquier intervalo ya que

$$k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

para toda x si se eligen $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$.

Ejemplo 2 Demostrar que las funciones e^x y e^{2x} son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.

A fin de establecer este resultado, se supone que

$$k_1 e^x + k_2 e^{2x} = 0 \tag{2}$$

para toda x en el intervalo; entonces, es necesario demostrar que $k_1 = k_2 = 0$. Elija dos puntos x_0 y x_1 en el intervalo, en donde $x_1 \neq x_0$. Si se evalúa (2) en estos puntos, se obtiene

$$\begin{aligned} k_1 e^{x_0} + k_2 e^{2x_0} &= 0, \\ k_1 e^{x_1} + k_2 e^{2x_1} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

El determinante de los coeficientes es

$$e^{x_0}e^{2x_1} - e^{2x_0}e^{x_1} = e^{x_0}e^{x_1}(e^{x_1} - e^{x_0}).$$

Dado que el determinante es diferente de cero, se concluye que la única solución de la ecuación (3) es $k_1 = k_2 = 0$. De donde, e^x y e^{2x} son linealmente independientes.

El siguiente teorema relaciona la independencia y dependencia lineales con el wronskiano.

Teorema 3.3.1 Si f y g son funciones diferenciables sobre un intervalo abierto I y si $W(f, g)(x_0) \neq 0$ para algún punto x_0 en I, entonces f y g son linealmente independientes sobre I. De manera alternativa, si f y g son linealmente dependientes sobre I, entonces $W(f, g)(x) = 0$ para toda x en I.

Para probar la primera proposición del teorema 3.3.1 considérese una combinación lineal $k_1f(x) + k_2g(x)$ y supóngase que esta expresión es cero en todo el intervalo. Si se evalúan la expresión y su derivada en x_0, se tiene

$$\begin{aligned} k_1 f(x_0) + k_2 g(x_0) &= 0, \\ k_1 f'(x_0) + k_2 g'(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

El determinante de los coeficientes de las ecuaciones (4) es precisamente $W(f, g)(x_0)$, que por hipótesis es diferente de cero. Por lo tanto, la única solución de las ecuaciones (4) es $k_1 = k_2 = 0$, de modo que f y g son linealmente independientes.

La segunda parte del teorema 3.3.1 se deduce de manera inmediata a partir de la primera. Sean f y g linealmente dependientes y supóngase que la conclusión es falsa; es decir, $W(f, g)$ no es cero en todo punto de I. Entonces, existe un punto x_0 tal que $W(f, g)(x_0) \neq 0$; por la primera parte del teorema 3.3.1, esto significa que f y g son linealmente independientes, lo cual es una contradicción, con lo que se completa la demostración.

Este resultado puede aplicarse a las dos funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{2x}$ analizadas en el ejemplo 2. Para cualquier punto x_0 se tiene

$$W(f, g)(x_0) = \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_0} & 2e^{2x_0} \end{vmatrix} = e^{3x_0} \neq 0. \tag{5}$$

Por consiguiente, las funciones e^x y e^{2x} son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.

Es necesario tener cuidado en no leer demasiado en el teorema 3.3.1. En particular, dos funciones f y g pueder ser linealmente independientes aun cuando $W(f, g)(x) = 0$ para toda x en el intervalo I. Este hecho se ilustra en el problema 23.

Ahora se analizarán todavía más las propiedades del wronskiano de dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. El siguiente teorema, que quizá sorprenda, da una fórmula explícita simple para el wronskiano de dos soluciones cualesquiera de cualquiera de esas ecuaciones.

Teorema 3.3.2 (Teorema de Abel)[5]

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6}$$

en donde p y q son continuas sobre un intervalo abierto I, entonces el wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ está dado por

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left[-\int p(x)\,dx\right], \tag{7}$$

en donde c es cierta constante que depende de y_1 y y_2, pero no de x. Es más, $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I (si $c = 0$), o bien, nunca es cero en I (si $c \neq 0$).

Para probar el teorema de Abel, nótese en principio que y_1 y y_2 satisfacen

$$\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Si se multiplica la primera ecuación por $-y_2$, la segunda por y_1 y se suman las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{9}$$

Si se hace $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$ y se observa que

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2, \tag{10}$$

es posible escribir la ecuación (9) en la forma

$$W' + pW = 0. \tag{11}$$

La ecuación (11) puede resolverse de inmediato, ya que es tanto una ecuación lineal de primer orden (sección 2.1) como una separable (sección 2.3). Por tanto,

$$W(x) = c \exp\left[-\int p(x)\,dx\right], \tag{12}$$

en donde c es una constante. El valor de c depende del par de soluciones de (6) que intervengan. Sin embargo, dado que la función exponencial nunca es cero, $W(x)$ no es cero a menos que $c = 0$, en cuyo caso $W(x)$ es cero para toda x, con lo que se completa la demostración del teorema 3.2.2.

Observe que los wronskianos de dos conjuntos fundamentales cualesquiera de soluciones de la misma ecuación diferencial sólo pueden diferir en una constante multiplicativa y

[5] El resultado del teorema 3.3.2 fue deducido por el matemático noruego Niels H. Abel (1802–1829) en 1827 y se conoce como fórmula de Abel. Abel también demostró que no existe fórmula general para resolver una ecuación de quinto grado en términos de operaciones algebraicas explícitas sobre los coeficientes del polinomio, resolviendo así una interrogante que había permanecido sin respuesta desde el siglo XVI. Sin embargo, sus contribuciones más importantes fueron en el análisis, en particular en el estudio de las funciones elípticas. Su trabajo no fue reconocido con amplitud hasta después de su muerte. El distinguido matemático francés Legendre lo llamó "monumento más duradero que el bronce".

que puede determinarse el wronskiano de cualquier conjunto fundamental de soluciones, hasta una constante multiplicativa, sin resolver la ecuación diferencial.

Ejemplo 3 En el ejemplo 5 de la sección 3.2 se comprobó que $y_1(x) = x^{1/2}$ y $y_2(x) = x^{-1}$ son soluciones de la ecuación

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{13}$$

Comprobar que el wronskiano de y_1 y y_2 está dado por la ecuación (12).

Con base en el ejemplo que acaba de citarse se sabe que $W(y_1, y_2)(x) = -(3/2)x^{-3/2}$. Para utilizar la ecuación (12) es necesario escribir la ecuación diferencial (13) en la forma estándar con el coeficiente de y'' igual a uno. Por tanto, se obtiene

$$y'' + \frac{3}{2x}y' - \frac{1}{2x^2}y = 0,$$

de modo que $p(x) = 3/2$. De donde,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= c\exp\left[-\int \frac{3}{2x}\,dx\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln x\right) \\ &= cx^{-3/2}. \end{aligned} \tag{14}$$

La ecuación (14) da el wronskiano de cualquier par de soluciones de (13). Para las soluciones particulares dadas en este ejemplo es necesario elegir $c = -3/2$.

Puede establecerse una versión más poderosa del teorema 3.3.1 si las dos funciones que intervienen son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

Teorema 3.3.3 Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación (6),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

en donde p y q son continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces, y_1 y y_2 son linealmente dependientes sobre I, si y sólo si $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I. De manera alternativa, y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre I si y sólo si $W(y_1, y_2)(x)$ nunca es cero en I.

Por supuesto, por el teorema 3.3.2 se sabe que $W(y_1, y_2)(x)$ es cero en todo punto de I, o bien, no es cero en ningún punto de I. Al probar el teorema 3.3.3, observe en primer lugar que si y_1 y y_2 son linealmente dependientes, entonces $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I, por el teorema 3.3.1. Queda por demostrar la inversa; es decir, si $W(y_1, y_2)(x)$ es cero en todo el intervalo I, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes. Sea x_0 cualquier punto en I; entonces necesariamente $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. Como consecuencia, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= 0, \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

para c_1 y c_2 tiene una solución no trivial. Si se usan estos valores de c_1 y c_2 sea $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Entonces ϕ es una solución de la ecuación (6), y, por las ecuaciones (15), Φ también satisface las condiciones iniciales

$$\phi(x_0) = 0, \qquad \phi'(x_0) = 0. \tag{16}$$

Por consiguiente, por la parte de unicidad del teorema 3.2.1, o por el ejemplo 2 de la sección 3.2, $\phi(x) = 0$ para toda x en I. Ya que $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, en donde c_1 y c_2 no son cero las dos, esto significa que y_1 y y_2 son linealmente dependientes. La proposición alternativa del teorema se deduce de inmediato.

Ahora es posible resumir los hechos acerca de los conjuntos fundamentales de soluciones, wronskianos e independencia lineal de la siguiente manera: sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación (6),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

en donde p y q son continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces, las cuatro proposiciones siguientes son equivalentes, en el sentido de que cada una incluye a las otras tres.

1. Las funciones y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones sobre I.
2. Las funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre I.
3. $W(y_1, y_2) \neq 0$ para algún x_0 en I.
4. $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para toda x en I.

Es interesante observar la semejanza entre la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden y el álgebra vectorial bidimensional. Se dice que dos vectores **a** y **b** son linealmente dependientes si existen dos escalares k_1 y k_2, no ambos cero, tales que $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$; en caso contrario, se dice que son linealmente independientes. Sean **i** y **j** vectores unitarios dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y, respectivamente. Como $k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} = 0$ sólo si $k_1 = k_2 = 0$, los vectores **i** y **j** son linealmente independientes. Además, se sabe que cualquier vector **a** con componentes a_1 y a_2 puede escribirse como $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$; es decir, como una combinación lineal de los dos vectores linealmente independiente **i** y **j**. No es difícil demostrar que cualquier vector en dos dimensiones puede representarse como una combinación lineal de dos vectores bidimensionales linealmente independientes cualesquiera (ver el problema 12). Se dice que ese par de vectores linealmente independientes forman una base para el espacio vectorial de los vectores bidimensionales.

La expresión **espacio vectorial** también se aplica a otras colecciones de objetos matemáticos que obedecen las mismas leyes de la adición y la multiplicación por escalares de los vectores geométricos. Por ejemplo, es posible demostrar que el conjunto de funciones que son dos veces diferenciables sobre el intervalo abierto I forma un espacio vectorial. De modo semejante, el conjunto V de funciones que satisfacen la ecuación (6) también forma un espacio vectorial.

Dado que todo miembro de V puede expresarse como una combinación lineal de dos miembros linealmente independientes y_1 y y_2, se dice que ese par forma una base para V. Por esto se concluye que V es bidimensional; por lo tanto, es análogo en muchos aspectos al espacio de los vectores geométricos en un plano. Después se verá que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden forma un espacio vectorial de dimensión n y que cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial forma una base para el espacio. Esta relación entre las

ecuaciones diferenciales y los vectores constituye una buena razón para el estudio del álgebra lineal abstracta.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6 , determine si el par de funciones dado es linealmente independiente o linealmente dependiente.

1. $f(x) = x^2 + 5x, \quad g(x) = x^2 - 5x$
2. $f(x) = \cos 3x, \quad g(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$
3. $f(x) = e^{\lambda x}\cos \mu x, \quad g(x) = e^{\lambda x}\operatorname{sen} \mu x, \quad \mu \neq 0$
4. $f(x) = e^{3x}, \quad g(x) = e^{3(x-1)}$
5. $f(x) = 3x - 5, \quad g(x) = 9x - 15$
6. $f(x) = x, \quad g(x) = x^{-1}$

7. El wronskiano de dos funciones es $W(x) = x\operatorname{sen}^2 x$. ¿Las funciones son linealmente independientes o linealmente dependientes? ¿Por qué?
8. El wronskiano de dos funciones es $x^2 - 4$. ¿Las funciones son linealmente independientes o linealmente dependientes? ¿Por qué?
9. Si las funciones y_1 y y_2, son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, demuestre que c_1y_1 y c_2y_2 también son soluciones linealmente independientes, siempre que ninguna de c_1 o c_2 sea cero.
10. Si las funciones y_1 y y_2, son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, demuestre que $y_3 = y_1 + y_2$ y $y_4 = y_1 - y_2$ también forman un conjunto linealmente independiente de soluciones. A la inversa, si y_3 y y_4 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial, demuestre que también y_1 y y_2 lo son.
11. Si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, determine en qué condiciones las funciones $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ y $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$ también forman un conjunto linealmente independiente de soluciones.
12. a) Demuestre que cualquier vector bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
    b) Demuestre que si los vectores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ son linealmente independientes, entonces cualquier vector $\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Observe que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente independientes, entonces $x_1y_2 - x_2y_2 \neq 0$. ¿Por qué?

En los problemas 13 y 14, encuentre el wronskiano de soluciones de la ecuación diferencial dada sin resolver ésta

13. $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0$
14. $(\cos x)y'' + (\operatorname{sen} x)y' - xy = 0$

15. Demuestre que si p es diferenciable y $p(x) > 0$, entonces el wronskiano $W(x)$ de dos soluciones de $[p(x)y']' + q(x)y = 0$ es $W(x) = c/p(x)$, en donde c es una constante.
16. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $xy'' + 2y' + xe^xy = 0$ y si $W(y_1, y_2)(1) = 2$, halle el valor de $W(y_1, y_2)(5)$.
17. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - 2y' + (3 + x)y = 0$ y si $W(y_1, y_2)(2) = 3$, encuentre el valor de $W(y_1, y_2)(4)$.

18. Si f, g y h son funciones diferenciables, demostrar que $W(fg, fh) = f^2W(g, h,)$.

En los problemas 19 a 21 suponga que p y q son continuas y que las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + p(x)y = 0$ sobre un intervalo abierto I.

19. Demuestre que si y_1 y y_2 son cero en el mismo punto en I, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.
20. Demuestre que si y_1 y y_2 tienen máximos y mínimos en el mismo punto en I, entonces sobre ese intervalo no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.
*21. Demuestre que si y_1 y y_2 tienen un punto de inflexión común x_0 en I, entonces no pueden ser un conjunto fundamental de soluciones.
22. Demuestre que x y x^2 son linealmente independientes sobre $-1 < x < 1$; de hecho, son linealmente independientes sobre todo intervalo. Demuestre también que $W(x, x^2)$ es cero en $x = 0$. ¿Qué se puede concluir a partir de esto acerca de la posibilidad de que x y x^2 sean soluciones de la ecuación $y'' + p(x)y' + p(x)y = 0$? Verifique que x y x^2 son soluciones de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. ¿Contradice esto la conclusión a la que se llegó? ¿El comportamiento del wronskiano de x y x^2 contradice el teorema 3.3.2?
23. Demuestre que las funciones $f(x) = x\,x$ y $g(x) = x^2$ son linealmente dependientes sobre $0 < x < 1$ y sobre $-1 < x < 0$. Aunque f y g son linealmente independientes allí, demuestre que $W(f, g)$ es cero para toda x en $-1 < x < 1$. De donde, f y g no pueden ser soluciones de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ con p y q continuas sobre $-1 < x < 1$.

3.4 Raíces complejas de la ecuación característica

En esta sección se continúa el análisis de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1}$$

en donde a, b y c son números reales dados. En la sección 3.1 se vio que si se buscan soluciones de la forma $y = e^{rx}$, entonces r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

Si las raíces r_1 y r_2 son reales y diferentes, lo que ocurre siempre que el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces la solución general de (1) es

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}. \tag{3}$$

Ahora, suponga que $b^2 - 4ac$ es negativo; entonces las raíces de (2) son números complejos conjugados; se les denota por

$$r_1 = \lambda + i\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\mu, \tag{4}$$

en donde λ y μ son reales. Las expresiones correspondientes para y son

$$y_1(x) = \exp[(\lambda + i\mu)x], \qquad y_2(x) = \exp[(\lambda - i\mu)x]. \tag{5}$$

La primera tarea es examinar el significado de estas expresiones, lo cual comprende la evaluación de la función exponencial para un número complejo. Por ejemplo, si $\lambda = -1$, $\mu = 2$ y $x = 3$; entonces, por la ecuación (5),

$$y_1(3) = e^{-3+6i}. \tag{6}$$

¿Qué significa elevar un número, como e, a una potencia compleja? La respuesta es proporcionada por una importante relación conocida como fórmula de Euler.

Fórmula de Euler. Para dar significado a las ecuaciones (5) es necesario contar con una definición de la función exponencial compleja. Por supuesto, se desea que la definición se reduzca a la función exponencial real conocida cuando el exponente es real. Existen varias maneras de realizar esta extensión de la función exponencial. Aquí se aplica un método basado en series infinitas, en el problema 24 se bosqueja un método alternativo.

Recuerde, por lo visto en cálculo elemental, que la serie de Taylor para e^x en torno a $x = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{7}$$

Si ahora se supone que x puede sustituirse por ix en (7), se tiene

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned} \tag{8}$$

en donde la suma se ha separado en sus partes real e imaginaria, aplicando el hecho de que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etcétera. La primera serie de la ecuación (8) es precisamente la serie de Taylor para $\cos x$ en torno a $x = 0$ y la segunda es la serie de Taylor para $\operatorname{sen} x$ en torno a $x = 0$. Por tanto, se tiene

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \tag{9}$$

La ecuación (9) se conoce como fórmula de Euler y es una relación matemática extremadamente importante. Aunque su deducción se basa en la suposición no verificada de que se puede usar la serie (7) para valores complejos, así como para valores reales, de la variable independiente, la intención es utilizar esta deducción solamente para que la ecuación (9) parezca razonable. Ahora los hechos se colocan sobre una base firme al adoptar la ecuación (9) como la *definición* de e^{ix}. En otras palabras, siempre que se escribe e^{ix} se refiere a la expresión del segundo miembro de (9).

Existen algunas variantes de la fórmula de Euler que también vale la pena hacer notar. Si en (9) se sustituye x por $-x$ y se recuerda que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, se tiene

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \tag{10}$$

Además, si en la ecuación (9) se sustituye x por μx, entonces se obtiene una versión generalizada de la fórmula de Euler; a saber,

$$e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x. \tag{11}$$

A continuación, se desea ampliar la definición de la función exponencial hacia exponentes complejos arbitrarios de la forma $(\lambda + i\mu)x$. Dado que se desea que las propiedades acostumbradas de la función exponencial se cumplan para los exponentes complejos, es evidente que se desea que $\exp[(\lambda + i\mu)x]$ satisfaga

$$e^{(\lambda + i\mu)x} = e^{\lambda x}e^{i\mu x}. \tag{12}$$

Entonces, si se sustituye esta expresión por $e^{i\mu x}$ en (11), se obtiene

$$\begin{aligned} e^{(\lambda + i\mu)x} &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= e^{\lambda x} \cos \mu x + ie^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x. \end{aligned} \tag{13}$$

Ahora se tomará a la ecuación (13) como la definición de $\exp[(\lambda + i\mu)x]$. El valor de la función exponencial con un exponente complejo es un número complejo cuyas partes real e imaginaria están dadas por los términos del segundo miembro de (13). Observe que las partes real e imaginaria de $\exp[(\lambda + i\mu)x]$ se expresan por completo en términos de funciones elementales con valores reales. Por ejemplo, la cantidad de la ecuación (6) tiene el valor

$$e^{-3+6i} = e^{-3} \cos 6 + ie^{-3} \operatorname{sen} 6 \cong 0.0478041 - 0.0139113i.$$

Con las definiciones (9) y (13) resulta directo demostrar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para la función exponencial compleja. También es fácil verificar que la fórmula de derivación

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = re^{rx} \tag{14}$$

también se cumple para valores complejos r.

Soluciones con valores reales. Las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dadas por las ecuaciones (5) y con el significado expresado por la (13), son soluciones de la ecuación (1) cuando las raíces de la ecuación característica (2) son los números complejos $\lambda \pm i\mu$. Desafortunadamente, las soluciones y_1 y y_2 son funciones con valores complejos, mientras que en general sería preferible tener soluciones con valores reales, en caso de ser posible. Pueden encontrarse estas soluciones como una consecuencia del teorema 3.2.2, el que afirma que si y_1 y y_2 son soluciones de (1), entonces cualquier combinación lineal de y_1 y y_2 también es una solución. En particular, al formar la suma y después la diferencia de y_1 y y_2, se tiene

$$\begin{aligned} y_1(x) + y_2(x) &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) + e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= 2e^{\lambda x} \cos \mu x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_2(x) &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) - e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= 2ie^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x. \end{aligned}$$

De donde, si se desprecian los factores constantes 2 y $2i$, respectivamente, se obtiene un par de soluciones con valores reales,

$$u(x) = e^{\lambda x} \cos \mu x, \qquad v(x) = e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x. \tag{15}$$

Observe que u y v son tan sólo las partes real e imaginaria, respectivamente, de y_1.

Por cálculo directo es posible demostrar que el wronskiano de u y v es

$$W(u, v)(x) = \mu e^{2\lambda x}. \tag{16}$$

Por tanto, mientras $\mu \neq 0$, el wronskiano W no es cero, de modo que u y v forman un conjunto fundamental de soluciones. (Por supuesto, si $\mu = 0$, entonces las raíces son reales y no es aplicable el análisis de esta sección). Como consecuencia, si las raíces de la ecuación característica son los números complejos $\lambda \pm i\mu$, con $\mu \neq 0$, entonces la solución general de la ecuación (1) es

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x, \tag{17}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Observe que la solución (17) puede escribirse tan pronto como se conocen los valores de λ y μ.

Ejemplo 1 Encontrar la solución general de

$$y'' + y' + y = 0. \tag{18}$$

La ecuación característica es

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

y sus raíces son

$$r = \frac{-1 \pm (1 - 4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, $\lambda = -1/2$ y $\mu = \sqrt{3}/2$, de modo que la solución general de la ecuación (18) es

$$y = c_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}x}{2}. \tag{19}$$

Ejemplo 2 Encontrar la solución general de

$$y'' + 9y = 0. \tag{20}$$

La ecuación característica es $r^2 + 9 = 0$ con las raíces $r = \pm 3i$; por tanto, $\lambda = 0$ y $\mu = 3$. La solución general es

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x; \tag{21}$$

observe que si la parte real de las raíces es cero, como en este ejemplo, entonces no hay factor exponencial en la solución.

Ejemplo 3 Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{22}$$

La ecuación característica es $16r^2 - 8r + 145 = 0$ y sus raíces son $r = 1/4 \pm 3i$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{x/4} \cos 3x + c_2 e^{x/4} \operatorname{sen} 3x. \tag{23}$$

Para aplicar la primera condición inicial se hace $x = 0$ en la ecuación (23); esto da

$$y(0) = c_1 = -2.$$

Para la segunda condición inicial es necesario derivar la (23) y después hacer $x = 0$. Así, se encuentra que

$$y'(0) = \tfrac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1,$$

de lo cual $c_2 = 1/2$. Si se usan estos valores de c_1 y c_2 en la (23), se obtiene

$$y = -2e^{x/4}\cos 3x + \tfrac{1}{2}e^{x/4}\operatorname{sen} 3x \tag{24}$$

como la solución del problema con valor inicial (22).

En la sección 3.8 se analizarán con más detalle las propiedades geométricas de las soluciones como estas, por lo que aquí se hará de manera muy breve. Cada una de las soluciones u y v de las ecuaciones (15) representa una oscilación, debido a los factores trigonométricos, y también crece o decae exponencialmente, dependiendo del signo de λ (a menos que $\lambda = 0$). En en ejemplo 1 se tiene $\lambda = -1/2 < 0$, por lo que las soluciones son oscilaciones que se extinguen. En la figura 3.4.1 se muestra la gráfica de una solución típica de la ecuación (18). Por otra parte, $\lambda = 1/4 > 0$ en el ejemplo 3, por lo que las soluciones de la ecuación diferencial (22) son oscilaciones crecientes. En la figura 3.4.2 se muestra la gráfica de la solución (24) del problema con valor inicial dado. El caso intermedio se ilustra en el ejemplo 2, en el que $\lambda = 0$. En este caso la solución no crece ni decrece exponencialmente, oscila de manera estable; en la figura 3.4.3 se muestra una solución típica de la ecuación (20).

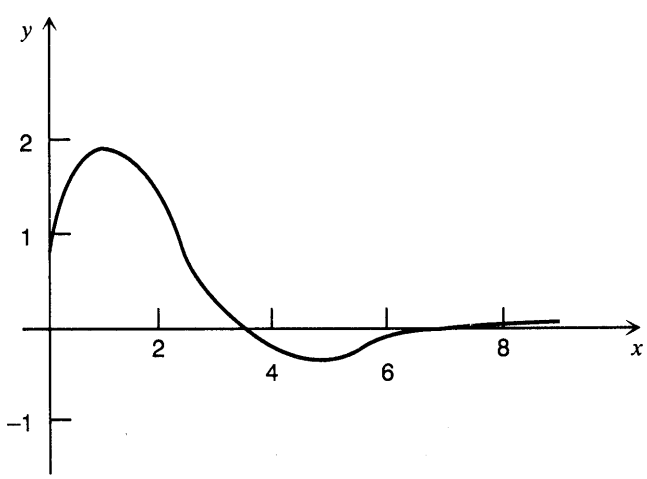


Figura 3.4.1 Una solución típica de $y'' + y' + y = 0$.

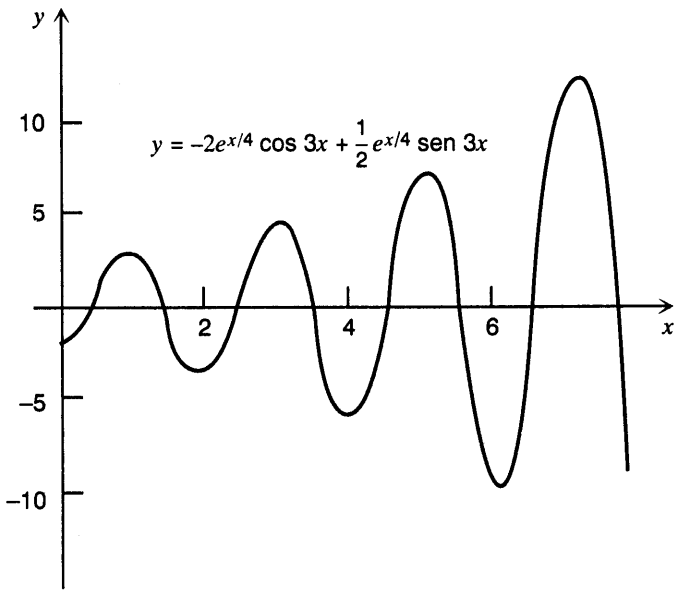


FIGURA 3.4.2 Solución de $16y'' - 8y' + 145y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

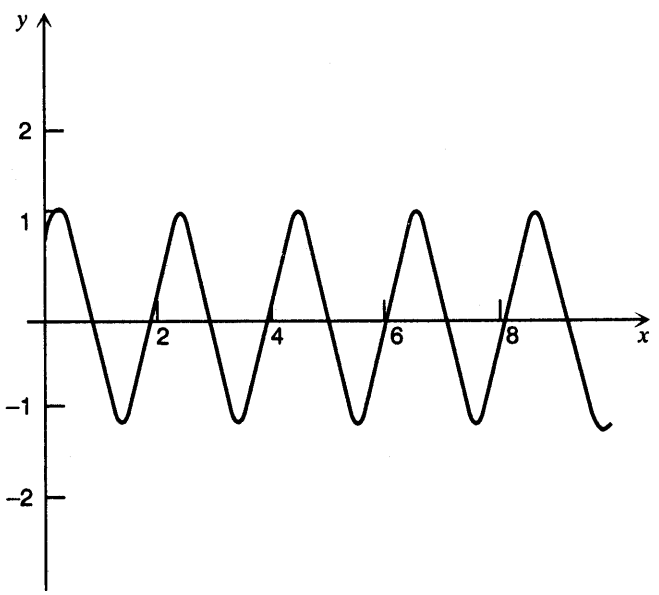


FIGURA 3.4.3 Una solución típica de $y'' + 9y = 0$.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, aplique la fórmula de Euler para escribir la expresión dada en la forma $a + ib$.

1. $\exp(1 + 2i)$
2. $\exp(2 - 3i)$
3. $e^{i\pi}$
4. $e^{2-(\pi/2)i}$
5. 2^{1-i}
6. π^{-1+2i}

En cada uno de los problemas 7 a 16, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$
8. $y'' - 2y' + 6y = 0$
9. $y'' + 2y' - 8y = 0$
10. $y'' + 2y' + 2y = 0$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$
12. $4y'' + 9y = 0$
13. $y'' + 2y' + 1.25y = 0$
14. $9y'' + 9y' - 4y = 0$
15. $y'' + y' + 1.25y = 0$
16. $y'' + 4y' + 6.25y = 0$

En cada uno de los problemas 17 a 22 halle la solución del problema con valor inicial dado. Trace la gráfica de la solución y describa su comportamiento para x creciente.

17. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
18. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$
20. $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -4$
21. $y'' + y' + 1.25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$

23. Demuestre que $W(e^{\lambda x}\cos \mu x, e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x) = \mu e^{2\lambda x}$.
24. En este problema se bosqueja una deducción diferente de la fórmula de Euler.
    a) Demuestre que $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ son un conjunto fundamental de soluciones de $y'' + y = 0$; es decir, demuestre que son soluciones y que su wronskiano no es cero.
    b) Demuestre (formalmente) que $y = e^{ix}$ también es una solución de $y'' + y = 0$. Por consiguiente,
    $$e^{ix} = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \qquad \text{(i)}$$
    para algunas constantes c_1 y c_2. ¿Por qué es así?
    c) Haga $x = 0$ en (i) para demostrar que $c_1 = 1$.
    d) Si se supone que (14) es verdadera, derive (i) y luego haga $x = 0$ para concluir que $c_2 = i$. Use los valores de c_1 y c_2 en (i) para llegar a la fórmula de Euler.
25. Con la aplicación de la fórmula de Euler demuestre que
    $$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2, \qquad \operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i.$$
26. Sean las funciones con valores reales p y q continuas sobre el intervalo abierto I y sea $y = \phi(x) = u(x) + iv(x)$ una solución con valores complejos de
    $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \text{(i)}$$
    en donde u y v son funciones con valores reales. Demuestre que u y v también son soluciones de (i). *Sugerencia*: Sustituya $y = \phi(x)$ en (i) y separe las partes real e imaginaria.

*27. Si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, demuestre que entre ceros consecutivos de y_1 existe uno y sólo un cero de y_2. Obser-

ve que este resultado queda ilustrado por las soluciones $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ de la ecuación $y'' + y = 0$.

Cambio de variables. A menudo una ecuación diferencial con coeficientes variables,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{i}$$

puede escribirse en una forma más adecuada para hallar una solución al hacer un cambio de las variables independientes o de la dependiente o las dos cosas. Estas ideas se examinan en los problemas 28 a 36. En particular, en el problema 28 se determinan las condiciones en las que la ecuación (i) puede transformarse en una ecuación diferencial con coeficientes constantes, con lo cual se puede resolver con facilidad. En los problemas 29 a 36 se dan aplicaciones específicas de este procedimiento.

*28. En este problema se determinan condiciones sobre p y q tales que, por un cambio de la variable independiente, la ecuación (i) puede transformarse en una ecuación con coeficientes constantes. Sea $z = u(x)$ la nueva variable independiente, con la relación entre z y x que se especificará posteriormente.

a) Demuestre que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dy}{dz}.$$

b) Demuestre que la ecuación diferencial (i) queda

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz} + q(x)y = 0. \tag{ii}$$

c) Para que la ecuación (ii) tenga coeficientes constantes, los coeficientes de d^2y/dz^2 y de y deben ser proporcionales. Si $q(x) > 0$, entonces es posible elegir que la constante de proporcionalidad sea uno; de donde

$$z = u(x) = \int [q(x)]^{1/2}\,dx. \tag{iii}$$

d) Con la z elegida en el inciso c), demuestre que el coeficiente de dy/dz de (ii) también es una constante, siempre que la expresión

$$\frac{q'(x) + 2p(x)q(x)}{2[q(x)]^{3/2}} \tag{iv}$$

sea constante. Por tanto, (ii) puede transformarse en una ecuación con coeficientes constantes por un cambio de la variable independiente, suponiendo que la función $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ es constante. ¿Cómo debe modificarse este resultado si $q(x) < 0$?

En cada uno de los problemas 29 a 31, intente transformar la ecuación dada en una con coeficientes constantes por el método del problema 28. En caso de ser posible, halle la solución general de la ecuación dada.

*29. $y'' + xy' + e^{-x^2}y = 0, \qquad -\infty < x < \infty$

*30. $y'' + 3xy' + x^2y = 0, \qquad -\infty < x < \infty$

*31. $xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3y = 0, \qquad 0 < x < \infty$

*32. **Ecuaciones de Euler.** En una ecuación de la forma

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \qquad x > 0,$$

en donde α y β son constantes reales, se conoce como ecuación de Euler. Demuestre que la sustitución $z = \ln x$ transforma una ecuación de Euler en una ecuación con coeficientes constantes. Las ecuaciones de Euler se analizan con detalle en la sección 5.5.

En cada uno de los problemas 33 a 36 aplique el resultado del problema 32 para resolver la ecuación dada, para $x > 0$.

*33. $x^2y'' + xy' + y = 0$
*34. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
*35. $x^2y'' + 3xy' + 1.25y = 0$
*36. $x^2y'' - 4xy' - 6y = 0$

3.5 Raíces repetidas; reducción de orden

En secciones anteriores se mostró cómo resolver la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

cuando las raíces de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

son reales y diferentes, o bien, complejas conjugadas. Ahora se considerará la tercera posibilidad; a saber, que las dos raíces r_1 y r_2 son iguales. Este caso se presenta cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es cero y, por la fórmula cuadrática, se deduce que

$$r_1 = r_2 = -b/2a. \tag{3}$$

La dificultad salta a la vista inmediatamente; las dos raíces dan la misma solución

$$y_1(x) = e^{-bx/2a} \tag{4}$$

de la ecuación diferencial (1), y no es obvio cómo hallar una segunda solución.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \tag{5}$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Por lo tanto, una solución de la ecuación (5) es $y_1(x) = e^{-2x}$. Para encontrar la solución general de (5) se necesita una segunda solución que no sea un múltiplo de y_1. Puede hallarse esta segunda solución por un método ideado por D'Alembert[6] en el siglo XVIII. Recuerde que como $y_1(x)$ es una solución de (1), también lo es $cy_1(x)$ para cualquier

[6] Jean D'Alembert (1717–1783), matemático francés, fue contemporáneo de Euler y de Daniel Bernoulli, y se le conoce principalmente por su trabajo en la mecánica y las ecuaciones diferenciales. El principio de D'Alembert de la mecánica y la paradoja de D'Alembert de la hidrodinámica recibieron su nombre en honor a él y la ecuación de onda apareció por primera vez en su artículo sobre cuerdas vibrantes en 1747. En sus últimos años se dedicó esencialmente a la filosofía y a sus actividades como editor de ciencias de la *Encyclopédie de Diderot*.

constante c. La idea básica es generalizar esta observación al sustituir c por una función $v(x)$ y luego intentar determinar $v(x)$ de modo que el producto $v(x)y_1(x)$ sea una solución de la ecuación (1).

A fin de realizar este procedimiento se sustituye $y = v(x)y_1(x)$ en (1) y se usa la ecuación resultante para hallar $v(x)$. Si parte de

$$y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-2x}, \tag{6}$$

se tiene

$$y' = v'(x)e^{-2x} - 2v(x)e^{-2x} \tag{7}$$

y

$$y'' = v''(x)e^{-2x} - 4v'(x)e^{-2x} + 4v(x)e^{-2x}. \tag{8}$$

Al sustituir las expresiones de las ecuaciones (6), (7) y (8) en (5) y agrupar términos, se obtiene

$$[v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) + 4v'(x) - 8v(x) + 4v(x)]e^{-2x} = 0,$$

que se simplifica a

$$v''(x) = 0. \tag{9}$$

Por consiguiente,

$$v'(x) = c_1$$

y

$$v(x) = c_1x + c_2, \tag{10}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Por último, al sustituir $v(x)$ de la ecuación (6) por la expresión dada en la (10), se obtiene

$$y = c_1xe^{-2x} + c_2e^{-2x}. \tag{11}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (11) corresponde a la solución original $y_1(x) = \exp(-2x)$, pero el primer término surge de una segunda solución a saber, $y_2(x) = x\exp(-2x)$. Es evidente que estas dos soluciones no son proporcionales, pero puede verificarse que son linealmente independientes al calcular su wronskiano:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x} \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y_1(x) = e^{-2x}, \qquad y_2(x) = xe^{-2x} \tag{12}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (5), y la solución general de esa ecuación queda dada por (11).

El procedimiento utilizado en el ejemplo 1 puede extenderse a una ecuación general cuya ecuación característica tiene raíces repetidas. Es decir, se supone que los coeficientes de la ecuación (1) satisfacen $b^2 - 4ac = 0$, en cuyo caso

$$y_1(x) = e^{-bx/2a}$$

es una solución. Entonces se supone que

$$y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-bx/2a} \tag{13}$$

y se sustituye en (1) para determinar $v(x)$. Se tiene

$$y' = v'(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-bx/2a} \tag{14}$$

y

$$y'' = v''(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{a}v'(x)e^{-bx/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(x)e^{-bx/2a}. \tag{15}$$

Entonces, al sustituir en (1) se obtiene

$$\left\{a\left[v''(x) - \frac{b}{a}v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}v(x)\right] + b\left[v'(x) - \frac{b}{2a}v(x)\right] + cv(x)\right\}e^{-bx/2a} = 0. \tag{16}$$

Si se cancela el factor $\exp(-bx/2a)$, que es diferente de cero, y se reagrupan los demás términos, se encuentra que

$$av''(x) + (-b + b)v'(x) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(x) = 0. \tag{17}$$

Es obvio que el término en que aparece $v'(x)$ es cero. Además, el coeficiente de $v(x)$ es $c - (b^2/4a)$, que también es cero porque $b^2 - 4ac = 0$ en el problema que se está considerando. Por tanto, como en el ejemplo 1, la ecuación (17) se reduce a

$$v''(x) = 0;$$

por consiguiente,

$$v(x) = c_1x + c_2.$$

De donde, por la ecuación (13), se tiene

$$y = c_1xe^{-bx/2a} + c_2e^{-bx/2a}. \tag{18}$$

Por tanto, y es una combinación lineal de las dos soluciones

$$y_1(x) = e^{-bx/2a}, \qquad y_2(x) = xe^{-bx/2a}. \tag{19}$$

El wronskiano de estas soluciones es

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-bx/2a} & xe^{-bx/2a} \\ -\dfrac{b}{2a}e^{-bx/2a} & \left(1 - \dfrac{bx}{2a}\right)e^{-bx/2a} \end{vmatrix} = e^{-bx/a}. \tag{20}$$

Dado que $W(y_1, y_2)(x)$ nunca es cero, las soluciones y_1 y y_2 dadas por la ecuación (19) son un conjunto fundamental de soluciones. Además, la ecuación (18) es la solución general de

(1) cuando las raíces de la ecuación característica son iguales. En otras palabras, en este caso existe una solución exponencial correspondiente a la raíz repetida, mientras que se obtiene una segunda solución al multiplicar la solución exponencial por x. En los problemas 15 a 17 se describen otros métodos que conducen a la forma de la segunda solución.

Ejemplo 2

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{3}. \tag{21}$$

La ecuación característica es

$$r^2 - r + 0.25 = 0,$$

de modo que las raíces son $r_1 = r_2 = 1/2$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2}. \tag{22}$$

La primera condición inicial exige que

$$y(0) = c_1 = 2.$$

Para satisfacer la segunda condición inicial en primer lugar se deriva la ecuación (22) y se hace $x = 0$; esto da

$$y'(0) = \tfrac{1}{2}c_1 + c_2 = \tfrac{1}{3},$$

de modo que $c_2 = -2/3$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial es

$$y = 2e^{x/2} - \tfrac{2}{3}xe^{x/2}. \tag{23}$$

En este caso, el comportamiento geométrico de las soluciones es semejante al del caso en el que las raíces son reales y diferentes. Si los exponentes son positivos o negativos, entonces la magnitud de la solución crece o decrece en consecuencia; el factor lineal x tiene poca influencia. En la figura 3.5.1 se muestra una solución decreciente, en donde se ha trazado la gráfica de una solución típica de la ecuación (5). Una solución creciente queda ilustrada por la solución del problema con valor inicial del ejemplo 2, cuya gráfica se muestra en la figura 3.5.2. Por último, si la raíz repetida es cero, entonces la ecuación diferencial es $y'' = 0$ y la solución general es una función lineal de x.

Resumen. Ahora es posible resumir los resultados que se obtuvieron para las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{1}$$

Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio característico correspondiente

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

Si r_1 y r_2 son reales pero no iguales, entonces la solución general de la ecuación diferencial (1) es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \tag{24}$$

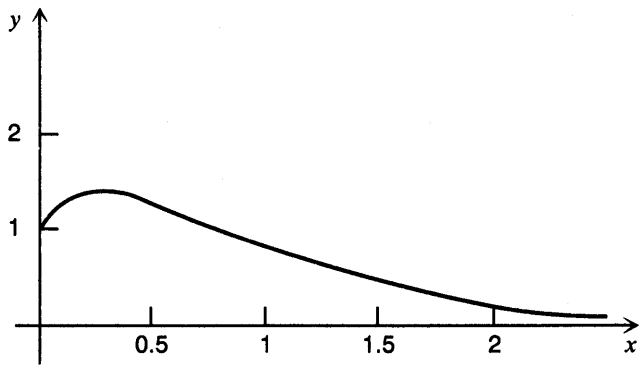


FIGURA 3.5.1 Una solución típica de $y'' + 4y' + 4y = 0$.

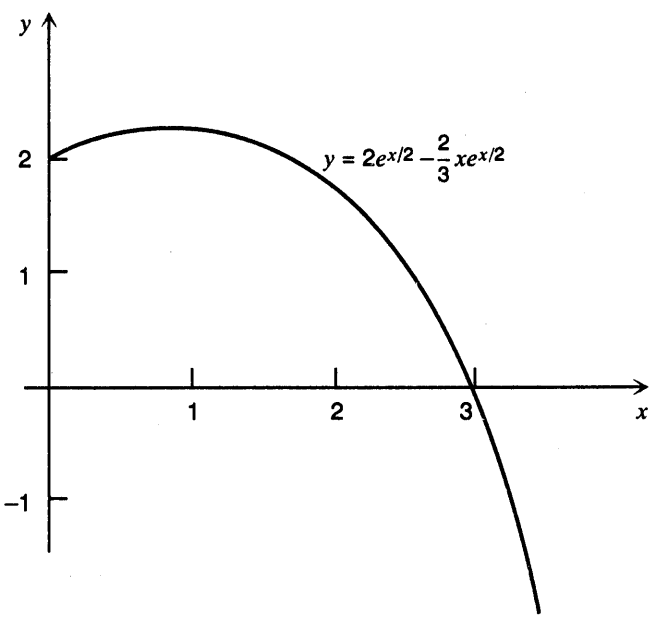


FIGURA 3.5.2 Solución de $y'' - y' + 0.25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$.

Si r_1 y r_2 son complejas conjugadas, $\lambda \pm i\mu$, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x. \tag{25}$$

Si r_1 y r_2, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}. \tag{26}$$

Reducción de orden. Vale la pena hacer notar que el primer procedimiento utilizado en esta sección para las ecuaciones con coeficientes constantes es de aplicación más general. Supóngase que se conoce una solución $y_1(x)$, que no sea cero en todo punto, de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{27}$$

Para encontrar una segunda solución, sea

$$y = v(x)y_1(x); \tag{28}$$

entonces

$$y' = v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x),$$
$$y'' = v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x).$$

Si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (27) por sus expresiones que acaban de darse y se agrupan los términos, se encuentra que

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0. \tag{29}$$

Dado que y_1 es una solución de (27), el coeficiente de v en la (29) es cero, de modo que la ecuación (29) queda

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0. \tag{30}$$

A pesar de su apariencia, la ecuación (30) es en realidad una ecuación de primer orden para la función v' y es posible resolverla como una ecuación lineal de primer orden o como una ecuación separable. Una vez que se encuentra v', entonces se obtiene v por integración. Finalmente, y se determina a partir de la ecuación (28). Este procedimiento se llama método de reducción de orden porque el paso decisivo es la solución de una ecuación diferencial de primer orden para v', en vez de la ecuación original de segundo orden para y. Aunque es posible escribir una fórmula para $v(x)$, en vez de ello se ilustrará la manera en que funciona este método con algunos ejemplos.

Ejemplo 3 Dado que $y_1(x) = x^{-1}$ es una solución de

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0 \tag{31}$$

hallar una segunda solución linealmente independiente.

Se hace $y = v(x)x^{-1}$; entonces

$$y' = v'x^{-1} - vx^{-2}, \qquad y'' = v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}.$$

Si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (31) y se agrupan términos se obtiene

$$2x^2(v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}) + 3x(v'x^{-1} - vx^{-2}) - vx^{-1}$$
$$= 2xv'' + (-4 + 3)v' + (4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1})v$$
$$= 2xv'' - v' = 0. \tag{32}$$

Observe que el coeficiente de v es cero, como debe ser; esto permite tener una útil comprobación de los pasos algebraicos.

Si se separan las variables en la ecuación (32) y se despeja $v'(x)$, se encuentra que

$$v'(x) = cx^{1/2}$$

entonces

$$v(x) = \tfrac{2}{3}cx^{3/2} + k.$$

Se concluye que

$$y = \tfrac{2}{3}cx^{1/2} + kx^{-1}, \tag{33}$$

en donde c y k son constantes arbitrarias. El segundo término del segundo miembro de (33) es un múltiplo de $y_1(x)$ y se puede cancelar, pero el primer término proporciona una nueva solución independiente. Si se desprecia la constante multiplicativa arbitraria, se tiene $y_2(x) = x^{1/2}$.

Ejemplo 4 Comprobar que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{34}$$

y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

Si $y = x$, entonces $y' = 1$ y $y'' = 0$. Si se sustituyen estas cantidades en la ecuación (34) se ve que $y = x$ es una solución de esa ecuación. Para encontrar una segunda solución, sea $y = xv(x)$; entonces

$$y' = xv' + v, \qquad y'' = xv'' + 2v'.$$

Entonces, si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (34), se obtiene

$$(1 - x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0,$$

o bien,

$$x(1 - x^2)v'' + (2 - 4x^2)v' = 0. \tag{35}$$

Al separar las variables, es posible escribir la ecuación (35) en la forma

$$\frac{(v')'}{v'} = -\frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2},$$

de lo cual se deduce que

$$v'(x) = \frac{c}{x^2(1 - x^2)}, \tag{36}$$

en donde c es una constante arbitraria. Como consecuencia,

$$v(x) = c\int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} = c\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 - x^2}\right) dx = c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Por lo tanto, si se suprime el multiplicador constante, se encuentra que una segunda solución de (34) es

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \tag{37}$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 10, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $9y'' + 6y' + y = 0$
3. $4y'' - 4y' - 3y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' + 10y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$
7. $4y'' + 17y' + 4y = 0$
8. $16y'' + 24y' + 9y = 0$
9. $25y'' - 20y' + 4y = 0$
10. $2y'' + 2y' + y = 0$

En cada uno de los problemas 11 a 14, resuelva el problema con valor inicial dado. Trace la gráfica de la solución y describa su comportamiento para x creciente.

11. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13. $9y'' + 6y' + 82y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
14. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$

En los problemas 15 a 17 se indican otras maneras de encontrar la segunda solución cuando la ecuación característica tiene raíces repetidas.

15. a) Considere la ecuación $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Demuestre que las raíces de la ecuación característica son $r_1 = r_2 = -a$, de modo que una solución de la ecuación es e^{-ax}.
    b) Aplique la fórmula de Abel [ecuación (7) de la sección 3.3] para demostrar que el wronskiano de dos soluciones cualesquiera de la ecuación dada es

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = c_1e^{-2ax},$$

    en donde c_1 es una constante.
    c) Haga $y_1(x) = e^{-ax}$ y aplique el resultado del inciso b) para demostrar que una segunda solución es $y_2(x) = e^{-ax}$.

*16. Suponga que r_1 y r_2 son raíces de $ar^2 + br + c = 0$ y que $r_1 \neq r_2$; entonces $\exp(r_1x)$ y $\exp(r_2x)$ soluciones de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Demuestre que $\phi(x; r_1, r_2) = [\exp(r_2x) - \exp(r_1x)]/(r_2 - r_1)$ también es una solución de la ecuación para $r_2 \neq r_1$. Entonces considere r_1 como fija y aplique la regla de L'Hospital para evaluar el límite de $\phi(x; r_1, r_2)$ cuando $r_2 \to r_1$, obteniéndose de esta manera la segunda solución en el caso de raíces iguales.

*17. a) Si $ar^2 + br + c = 0$ tiene las raíces iguales r_1, demuestre que

$$L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = a(r - r_1)^2e^{rx}. \tag{i}$$

    Dado que el segundo miembro de (i) es cero cuando $r = r_1$, se concluye que $\exp(r_1x)$ es una solución de $L[y] = ay'' + by' + cy = 0$.

b) Derive (i) con respecto a r e intercambie la derivación con respecto a r y con respecto a x demostrando en consecuencia que

$$\frac{\partial}{\partial r} L[e^{rx}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r} e^{rx}\right] = L[xe^{rx}] = axe^{rx}(r - r_1)^2 + 2ae^{rx}(r - r_1). \qquad \text{(ii)}$$

Dado que el segundo miembro de (ii) es cero cuando $r = r_i$, concluya que $x \exp(r_1 x)$ también es una solución de $L[y] = 0$.

En cada uno de los problemas 18 a 25, aplique el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución de la ecuación diferencial dada.

18. $x^2y'' + 2xy' = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = 1$
19. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x$
20. $x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1}$
21. $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x$
22. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$
23. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
24. $x^2y'' - (x - 0.1875)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$
25. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2} \operatorname{sin} x$

26. La ecuación diferencial

$$xy'' - (x + N)y' + Ny = 0,$$

en donde N es un entero no negativo, ha sido analizada por varios autores.[7] Una de las razones por las que resulta interesante es que tiene una solución exponencial y una solución polinomial.

a) Verifique que una solución es $y_1(x) = e^x$.

b) Demuestre que una segunda solución tiene la forma $y_2(x) = ce^x \int x^N e^{-x}\, dx$. Calcule $y_2(x)$ para $N = 1$ y $N = 2$; compruebe que, con $c = -1/N!$,

$$y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}.$$

Observe que $y_2(x)$ es exactamente los $N + 1$ primeros términos de la serie de Taylor en torno a $x = 0$ para e^x, es decir, para $y_1(x)$.

27. La ecuación diferencial

$$y'' + \delta(xy' + y) = 0$$

se presenta en el estudio del flujo turbulento de una corriente uniforme que pasa en torno a un cilindro circular. Verifique que $y_1(x) = \exp(-\delta x^2/2)$ es una solución, y luego encuentre la solución general en forma de integral.

28. El método del problema 15 puede extenderse a las ecuaciones de segundo orden con coeficientes variables. Si y_1 es una solución conocida que no se anula de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, demuestre que una segunda solución y_2 satisface $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$, en donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de y_1 y y_2. A continuación, aplique la fórmula de Abel [ecuación (7) de la sección 3.3] para determinar y_2.

[7] T. A. Newton, "On Using a Differential Equation to Generate Polynomials", *American Mathematical Monthly 81* (1974), pp. 592-601. Ver también la bibliografía ahí proporcionada.

En cada uno de los problemas 29 a 32, aplique el método del problema 28 para hallar una segunda solución independiente de la ecuación dada.

29. $x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1}$
30. $xy'' - y + 4x^3y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = \operatorname{sen}(x^2)$
31. $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
32. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

Comportamiento de las soluciones cuando $x \to \infty$. Los problemas 33 a 35 se refieren al comportamiento de las soluciones en el límite cuando $x \to \infty$.

33. Si a, b y c son constantes positivas, demuestre que todas las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ tienden a cero cuando $x \to \infty$.
34. a) Si $a > 0$ y $c > 0$, pero $b = 0$, demuestre que el resultado del problema 33 deja de ser verdadero, pero que todas las soluciones son acotadas cuando $x \to \infty$.
    b) Si $a > 0$ y $b > 0$, pero $c = 0$, demuestre que el resultado del problema 33 deja de ser cierto, pero que todas las soluciones tienden a una constante que depende de las condiciones iniciales cuando $x \to \infty$. Determine esta constante para las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$.
35. Demuestre que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución de

$$y'' + (k\operatorname{sen}^2 x)y' + (1 - k\cos x \operatorname{sen} x)y = 0$$

para cualquier valor de la constante k. Si $0 < k < 2$, demuestre que $1 - k\cos x \operatorname{sen} x > 0$ y $k^2 \operatorname{sen}^2 x \geq 0$. Por tanto, observe que aun cuando los coeficientes de esta ecuación diferencial con coeficientes variables son no negativos (y el coeficiente de y' es cero sólo en los puntos $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$), tiene una solución que no tiende a cero cuando $x \to \infty$. Compare esta situación con el resultado del problema 33. Por tanto, se observa una situación que no es extraña en la teoría de las ecuaciones diferenciales: ecuaciones aparentemente muy semejantes pueden tener propiedades bastante diferentes.

Ecuaciones de Euler. Aplique la sustitución presentada en el problema 32 de la sección 3.4 para resolver cada una de las ecuaciones de los problemas 36 y 37.

36. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad x > 0$

37. $x^2y'' + 2xy' + 0.25y = 0, \quad x > 0$

3.6 Ecuaciones no homogéneas; método de los coeficientes indeterminados

Ahora se regresará a la ecuación no homogénea

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{1}$$

en donde p, q y g son funciones (continuas) dadas sobre el intervalo abierto I. La ecuación

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

en la que $g(x) = 0$ y p y q son las mismas de (1), se llama ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (1). Los dos resultados siguientes describen la estructura de las soluciones de la ecuación no homogénea (1) y proporcionan una base para construir su solución general.

Teorema 3.6.1 Si Y_1 y Y_2 son dos soluciones de la ecuación no homogénea (1), entonces su diferencia $Y_1 - Y_2$ solución de la ecuación homogénea correspondiente (2). Si, además y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de (2), entonces

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{3}$$

en donde c_1 y c_2 son ciertas constantes.

Para probar este resultado, observe que Y_1 y Y_2 satisfacen las ecuaciones

$$L[Y_1](x) = g(x), \qquad L[Y_2](x) = g(x). \tag{4}$$

Si se resta la segunda de estas ecuaciones de la primera, se tiene

$$L[Y_1])(x) - L[Y_2](x) = g(x) - g(x) = 0 \tag{5}$$

Sin embargo,

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2]$$

porque L es un operador lineal, de modo que (5) queda

$$L[Y_1 - Y_2](x) = 0. \tag{6}$$

La ecuación (6) establece que Y_1 y Y_2 es una solución de la ecuación (2). Por último, dado que todas las soluciones de (2) pueden expresarse como combinaciones lineales de un conjunto fundamental de soluciones, por el teorema 3.2.4, se deduce que la solución $Y_1 - Y_2$ puede escribirse de esa manera. De donde, la ecuación (3) se cumple y demostración queda completa.

Teorema 3.6.2 La solución general de la ecuación no homogénea (1) puede escribirse de la forma

$$y = \phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \tag{7}$$

en donde y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de ecuación homogénea correspondiente (2), c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y Y es alguna solución específica de la ecuación no homogénea (1).

La demostración del teorema 3.6.2 se deduce de inmediato a partir del teorema precedente. Observe que (3) se cumple si Y_1 se identifica con una solución arbitraria ϕ de (1) y Y_2 se identifica con la solución específica Y. A partir de (3) se obtiene en consecuencia

$$\phi(x) - Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{8}$$

que es equivalente a la ecuación (7). Dado que ϕ es una solución arbitraria de (1), la expresión del segundo miembro de (7) incluye todas las soluciones de (1); por tanto, es natural darle el nombre de solución general de la ecuación (1).

En palabras algo diferentes, el teorema 3.6.2 afirma que para resolver la ecuación no homogénea (1) es necesario realizar tres cosas:

1. Hallar la solución general $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente. Esta solución suele denominarse solución complementaria y puede denotarse por $y_c(x)$.
2. Encontrar alguna solución sencilla $Y(x)$ de la ecuación no homogénea. A menudo a esta solución se le menciona como solución particular.
3. Sumar las funciones encontradas en los dos pasos precedentes.

Ya se analizó cómo hallar $y_c(x)$, por lo menos cuando la ecuación homogénea (2) tiene coeficientes constantes. Por lo tanto, en el resto de esta sección y en la siguiente, se enfocará la atención en encontrar una solución particular $Y(x)$ de la ecuación no homogénea (1). Son dos los métodos que se analizarán. Se conocen como método de los coeficientes indeterminados y método de variación de parámetros, respectivamente. Cada uno tiene algunas ventajas y algunos defectos posibles.

Método de los coeficientes indeterminados. Este método requiere que se haga una suposición inicial acerca de la forma de la solución particular $Y(x)$, pero se dejan los coeficientes sin especificar. La expresión supuesta se sustituye en la ecuación (1) y se intenta determinar los coeficientes de manera que esa ecuación se satisfaga. En caso de buen resultado se encontró una solución de la ecuación diferencial (1) y es posible usarla como la solución particular $Y(x)$. Si no es posible determinar los coeficientes, significa que no existe solución de la forma supuesta. En este caso puede modificarse la suposición inicial e intentar una vez más.

La ventaja más importante del método de los coeficientes indeterminados es que su ejecución es directa una vez que se hace la suposición acerca de la forma de $Y(x)$. Su principal limitación es que es útil fundamentalmente para ecuaciones en las que es fácil escribir de antemano la forma correcta de la solución particular. Por esta razón, este método suele usarse sólo para problemas en los que la ecuación homogénea tiene coeficientes constantes y el término no homogéneo se restringe a una clase relativamente pequeña de funciones. En especial, sólo se consideran términos homogéneos que constan de polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos. A pesar de estas limitaciones, el método de los coeficientes indeterminados es útil para resolver muchos problemas que tienen aplicaciones importantes. Este método se ilustrará con varios ejemplos y luego se resumirán las reglas para aplicarlo.

Ejemplo 1 Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}. \tag{9}$$

Se busca una función Y tal que la combinación $Y''(x) - 3Y'(x) - 4Y(x)$ sea igual a $3e^{2x}$. Como la función exponencial se reproduce por medio de la derivación, la forma más razonable de lograr el resultado que se desea es suponer que $Y(x)$ es algún múltiplo de e^{2x}; es decir,

$$Y(x) = Ae^{2x},$$

en donde el coeficiente A aún está por determinarse. Para encontrar A se calculan

$$Y'(x) = 2Ae^{2x}, \qquad Y''(x) = 4Ae^{2x},$$

y se sustituye en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (9). Se obtiene

$$(4A - 6A - 4A)e^{2x} = 3e^{2x}.$$

De donde, $-6A = 3$, de modo que $A = -1/2$. Por tanto, una solución particular es

$$Y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x}. \tag{10}$$

Ejemplo 2 Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} x. \tag{11}$$

Por analogía con el ejemplo 1, suponga primero que $Y(x) = A \operatorname{sen} x$, en donde A es una constante por determinar. Al sustituir en (11) y reordenar los términos se obtiene

$$-5A \operatorname{sen} x - 3A \cos x = 2 \operatorname{sen} x. \tag{12}$$

No existe elección de la constante A que satisfaga la ecuación (12) para toda x, por lo que se concluye que la suposición referente a $Y(x)$ es incorrecta. La aparición del término coseno en (12) sugiere modificar la suposición original para incluir un término cosenoidal en $Y(x)$; es decir,

$$Y(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x,$$

en donde deben determinarse A y B. Entonces,

$$Y'(x) = A \cos x - B \operatorname{sen} x, \qquad Y''(x) = -A \operatorname{sen} x - B \cos x.$$

Al sustituir estas expresiones en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (11) y agrupar términos se obtiene

$$(-A + 3B - 4A)\operatorname{sen} x + (-B - 3A - 4B)\cos x = 2 \operatorname{sen} x. \tag{13}$$

Para satisfacer la ecuación (13) es necesario hacer corresponder los coeficientes de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ de cada miembro de la ecuación; por tanto, A y B deben satisfacer las ecuaciones

$$-5A + 3B = 2, \qquad -3A - 5B = 0.$$

De donde, $A = -5/17$ y $B = 3/17$, de manera que una solución particular de la ecuación (11) es

$$Y(x) = -\tfrac{5}{17} \operatorname{sen} x + \tfrac{3}{17} \cos x.$$

Ejemplo 3 Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2. \tag{14}$$

Como el segundo miembro de la ecuación (14) es un polinomio, es natural suponer que Y también es un polinomio del mismo grado o superior. En esta sección se demostrará después que (con ciertas excepciones) basta suponer que Y es un polinomio del mismo grado que el término no homogéneo; por lo tanto, se supone que

$$Y(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Se sigue que

$$Y'(x) = 2Ax + B, \qquad Y''(x) = 2A.$$

Si se sustituyen estas expresiones en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (14) y se agrupan términos, se obtiene

$$-4Ax^2 + (-6A - 4B)x + (2A - 3B - 4C) = 4x^2.$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, se encuentra que A, B y C deben satisfacer

$$-4A = 4, \qquad -6A - 4B = 0, \qquad 2A - 3B - 4C = 0.$$

Por tanto, $A = -1$, $B = 3/2$ y $C = -13/8$; de donde, una solución particular de (14) es

$$Y(x) = -x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{13}{8}.$$

Los resultados de los ejemplos anteriores sugieren el siguiente principio: si el término no homogéneo $g(x)$ de la ecuación (11) es una función exponencial de $e^{\alpha x}$, supóngase que $Y(x)$ es proporcional a la misma función exponencial; si $g(x)$ es sen βx o cos βx, supóngase que $Y(x)$ es una combinación lineal de sen βx y cos βx; si $g(x)$ es un polinomio, supóngase que $Y(x)$ es un polinomio del mismo grado. El mismo principio se aplica al caso en el que $g(x)$ es un producto de cualesquiera dos o de los tres, de estos tipos de funciones, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Hallar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x. \tag{15}$$

En este caso se supone que $Y(x)$ es el producto de e^x y una combinación lineal de cos $2x$ y sen $2x$; es decir,

$$Y(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x \operatorname{sen} 2x.$$

En este ejemplo el álgebra es más tediosa, pero se concluye que

$$Y'(x) = (A + 2B)e^x \cos 2x + (-2A + B)e^x \operatorname{sen} 2x$$

y

$$Y''(x) = (-3A + 4B)e^x \cos 2x + (-4A - 3B)e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (15) se encuentra que A y B deben satisfacer

$$10A + 2B = 8, \qquad 2A - 10B = 0.$$

De donde, $A = 10/13$ y $B = 2/13$; por consiguiente, una solución particular de (15) es

$$Y(x) = \tfrac{10}{13}e^x \cos 2x + \tfrac{2}{13}e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Ahora se supondrá que $g(x)$ es la suma de dos términos, $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ y que Y_1 y Y_2 son soluciones de las ecuaciones

$$ay'' + by' + cy = g_1(x) \tag{16}$$

y

$$ay'' + by' + cy = g_2(x), \tag{17}$$

respectivamente. Entonces, $Y_1 + Y_2$ es una solución de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = g(x). \tag{18}$$

Para probar esta proposición sustituya y por $Y_1(x) + Y_2(x)$ en la ecuación (18) y aplíquense las ecuaciones (16) y (17). Se cumple una conclusión semejante si $g(x)$ es la suma de cualquier número finito de términos. El significado práctico de este resultado es que para una ecuación cuya función no homogénea $g(x)$ pueda expresarse como una suma, en vez de ella se pueden considerar varias ecuaciones más simples y después sumar los resultados. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

Ejemplo 5 Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2 \operatorname{sen} x - 8e^{x} \cos 2x. \tag{19}$$

Al descomponer el segundo miembro de la ecuación (19), se obtienen las tres ecuaciones

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x},$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} x,$$

y

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{x} \cos 2x.$$

En los ejemplos 1, 2 y 4, respectivamente, se han encontrado las soluciones de estas tres ecuaciones. Por lo tanto, una solución particular de (19) es su suma; a saber,

$$Y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + \tfrac{3}{17} \cos x - \tfrac{5}{17} \operatorname{sen} x + \tfrac{10}{13}e^{x} \cos 2x + \tfrac{2}{13}e^{x} \operatorname{sen} 2x.$$

El procedimiento que acaba de describirse e ilustrarse en los ejemplos anteriores permite resolver una gran clase de problemas de manera razonablemente eficiente. Sin embargo, existe una dificultad que se presenta algunas veces. En el siguiente ejemplo se ilustra cómo surge esta dificultad.

Ejemplo 6 Hallar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}. \tag{20}$$

Procediendo como en el ejemplo 1, se supone que $Y(x) = Ae^{-x}$. Al sustituir en la ecuación (20), se obtiene

$$(A + 3A - 4A)e^{-x} = e^{-x}. \tag{21}$$

Dado que el coeficiente de e^{-x} del primer miembro de (21) es cero, es imposible resolver esta ecuación para A. Por consiguiente, se concluye que no existe solución de la ecuación (20) con la forma supuesta. Se aclara la razón de este resultado posiblemente inesperado si se resuelve la ecuación homogénea

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \tag{22}$$

que corresponde a la (20). Las raíces de la ecuación característica asociada son $r_1 = 4$ y $r_2 = -1$, por lo que un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (22) son $y_1(x) = e^{4x}$ y $y_2(x) = e^{-x}$.

Ahora se ve que la solución particular supuesta de la ecuación no homogénea (20) es en realidad una solución de la ecuación homogénea (22). Como se vio, la sustitución de esa función en el primer miembro de la ecuación (20) da cero, lo que imposibilita balancear el término diferente de cero del segundo miembro de la (20).

Por lo tanto, para encontrar una solución de (20) se necesita considerar funciones de una forma algo diferente. La función más simple, aparte de la propia e^{-x} que al ser derivada produce un término e^{-x}, es ex^{-x}.Por tanto, podría intentarse con $Y(x) = (Ax + B)e^{-x}$. Sin embargo, no es necesario el término Be^{-x}, ya que es una solución de la ecuación homogénea correspondiente y no ayuda a resolver la ecuación no homegénea. De donde, se supone que $Y(x) = Axe^{-x}$. Entonces,

$$Y'(x) = (A - Ax)e^{-x}, \qquad Y''(x) = (-2A + Ax)e^{-x}.$$

Si se sustituyen estas expresiones en la ecuación (20) y se agrupan términos, se encuentra que

$$[(Ax + 3Ax - 4Ax) + (-2A - 3A)]e^{-x} = e^{-x}.$$

Por consiguiente, $A = -1/5$ y una solución particular de (20) es

$$Y(x) = -\tfrac{1}{5}xe^{-x}.$$

El resultado del ejemplo 6 sugiere una modificación del principio antes enunciado: si al forma supuesta de la solución duplica a una solución de la ecuación homogénea correspondiente, entonces modifique la solución particular supuesta multiplicándola por x. Algunas veces esta modificación es insuficiente para eliminar todas las duplicaciones de las soluciones de la ecuación homogénea, en cuyo caso es necesario multiplicar por x por segunda vez. Para una ecuación de segundo orden, jamás será necesario llevar el proceso más adelante de lo expuesto.

A continuación se resumen los pasos que intervienen en la solución general de una ecuación no homogénea de la forma

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{23}$$

en donde los coeficientes a, b, y c son constantes.

1. Encontrar la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.
2. Comprobar que la función $g(x)$ de la ecuación (23) pertenece a la clase de funciones analizadas en esta sección; es decir, que sólo contenga funciones exponenciales, senos, cosenos, polinomios o sumas o productos de estas funciones. Si este no es el caso, aplicar el método de variación de parámetros (que se analiza en la siguiente sección).
3. Si $g(x) = g_1(x) + \cdots + g_n(x)$; es decir, si $g(x)$ es una suma de n términos, entonces forma n subproblemas, cada uno de los cuales contenga sólo uno de los términos $g_1(x), \ldots g_n(x)$. El i-ésimo subproblema consiste en la ecuación

   $$ay'' + by' + cy = g_i(x),$$

   en donde i va de 1 hasta n.
4. Para el i-ésimo subproblema, suponer una solución particular $Y_i(x)$ que conste de la función exponencial, seno, coseno, polinomio adecuado o una combinación de ellos. Si en la forma supuesta de $Y_i(x)$ existe alguna duplicación de las soluciones de la ecuación homogénea (halladas en el paso 1), multiplicar $Y_i(x)$ por x, o (si es necesario) por x^2, para eliminar la duplicación. Ver la tabla 3.6.1.

TABLA 3.6.1 SOLUCIÓN PARTICULAR DE $ay'' + by' + cy = g_i(x)$

$g_i(x)$	$Y_i(x)$
$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\sin \beta x \\ \cos \beta x\end{cases}$	$x^s[(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha x}\cos \beta x + (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n)e^{\alpha x}\sin \beta x]$

Notas: Aquí es el menor entero no negativo ($s = 0, 1$ ó 2) que asegura que ningún término de $Y_i(x)$ sea una solución de la ecuación homogénea correspondiente. De manera equivalente, para los tres casos, s es el número de veces que 0 es una raíz de la ecuación característica, α es una raíz de esa ecuación y $\alpha + i\beta$ es una raíz de la misma, respectivamente.

5. Hallar una solución particular $Y_i(x)$ para cada uno de los subproblemas. Entonces, la suma $Y_1(x) + \cdots + Y_n(x)$ es una solución particular de toda la ecuación no homogénea (23).
6. Formar la suma de la solución general de la ecuación homogénea (paso 1) y la solución particular de la ecuación no homogénea (paso 5). Esta es la solución general de la ecuación no homogénea.

El método de los coeficientes indeterminados es autocorrectivo en el sentido de que si se supone demasiado poco respecto a $Y(x)$, pronto se llega a una contradicción que suele indicar el camino hacia la modificación necesaria en la forma supuesta. Por otra parte, si se supone demasiado, entonces se realiza innecesariamente algún trabajo adicional y algunos coeficientes resultan ser cero, pero por lo menos se obtiene la respuesta correcta.

Ejemplo 7 Escribir la forma de una solución particular de

$$y'' + 4y = x^2e^{-3x}\operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} 2x. \tag{24}$$

En primer lugar se observa que la solución de la ecuación homogénea correspondiente $y'' + 4y = 0$ es

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x. \tag{25}$$

Luego se observa que el segundo miembro de la ecuación (24) cae en lo que cubre el método de los coeficientes indeterminados, como se presentó en el texto. Se forman los dos subproblemas

$$y'' + 4y = x^2e^{-3x}\operatorname{sen} x \tag{26}$$

y

$$y'' + 4y = -x \operatorname{sen} 2x. \tag{27}$$

El segundo miembro de la (26) consta de un producto de un polinomio cuadrático, la misma función exponencial y un seno, por lo que se supone una solución particular $Y_1(x)$ en la forma de un producto de un polinomio cuadrático, la misma función exponencial y una combinación lineal de los correspondientes seno y coseno. Por tanto, se supone que

$$Y_1(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-3x}\cos x + (Dx^2 + Ex + F)e^{-3x}\operatorname{sen} x. \tag{28}$$

Ninguno de estos términos duplica la solución (25) de la ecuación homogénea, por lo que no es necesario modificar la suposición inicial.

El segundo miembro de la ecuación (27) es un producto de un polinomio de primer grado y un seno, de modo que inicialmente se supone una solución particular $Y_2(x)$ para esta ecuación de la forma

$$Y_2(x) = (Gx + H)\cos 2x + (Jx + K)\operatorname{sen} 2x. \tag{29}$$

Sin embargo, algunos de los términos de esta $Y_2(x)$ son los mismos que los de la solución (25) de la ecuación no homogénea, de manera que es necesario multiplicar por x a fin de obtener la forma correcta para la solución particular de la ecuación (27); a saber,

$$Y_2(x) = (Gx^2 + Hx)\cos 2x + (Jx^2 + Kx)\operatorname{sen} 2x. \tag{30}$$

Los coeficientes $A, \ldots, K$ de $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ se encuentran como de costumbre, al sustituir las expresiones de las ecuaciones (28) y (30) en las (26) y (27), respectivamente. Una vez que se han determinado los coeficientes, la solución general de la ecuación (24) es la suma de las funciones dadas por las ecuaciones (25), (28) y (30). Pueden elegirse las constantes arbitrarias c_1 y c_2 de esta solución de modo que satisfagan cualquiera de las condiciones iniciales dadas.

Demostración del método de los coeficientes indeterminados. En el análisis anterior se describió el método de los coeficientes indeterminados con base en varios ejemplos. Para probar que el procedimiento siempre funciona como se afirmó, a continuación se da un argumento general en el que se consideran varios casos correspondientes a formas diferentes del término no homogéneo $g(x)$.

$\boldsymbol{g(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}$. En este caso, la ecuación (23) queda

$$ay'' + by' + cy = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{31}$$

Para obtener una solución particular se supone que

$$Y(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n. \tag{32}$$

Si se sustituye en la ecuación (31), se obtiene

$$\begin{aligned} a[n(n-1)A_0x^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}] + b(nA_0x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}) \\ + c(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n) = a_0x^n + \cdots + a_n. \end{aligned} \tag{33}$$

Si se igualan los coeficientes de las potencias iguales da

$$\begin{aligned} cA_0 &= a_0, \\ cA_1 + nbA_0 &= a_1, \\ &\vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} &= a_n. \end{aligned}$$

Siempre que $c \neq 0$, la solución de la primera ecuación es $A_0 = a_0/c$, y las ecuaciones restantes determinan $A_1, \ldots, A_n$ de manera sucesiva. Si $c = 0$, pero $b \neq 0$, entonces el polinomio del primer miembro de la ecuación (33) es de grado $n - 1$ y no es posible que esta ecuación se satisfaga. A fin de tener la certeza de que $aY''(x) + bY'(x)$ es un polinomio de grado n, debe elegirse $Y(x)$ para que sea un polinomio de grado $n + 1$. De donde, se supone

$$Y(x) = x(A_0x^n + \cdots + A_n).$$

En esta expresión no hay término constante para $Y(x)$, pero no es necesario incluir ese término, ya que, cuando $c = 0$, una solución de la ecuación homogénea es una constante. Como $b \neq 0$, se tiene que $A_0 = a_0/b(n+1)$, y pueden determinarse los demás coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ de manera semejante. Si c y b son cero, se supone que

$$Y(x) = x^2(A_0x^n + \cdots + A_n).$$

El término $aY''(x)$ da lugar a un término de grado n y es posible proceder como antes. Una vez más, se omiten los términos constante y lineal de $Y(x)$, ya que en este caso los dos son soluciones de la ecuación homogénea.

$g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$. El problema de determinar una solución particular de

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x}P_n(x) \tag{34}$$

puede reducirse al caso precedente por simple sustitución. Sea

$$Y(x) = e^{\alpha x}u(x);$$

entonces

$$Y'(x) = e^{\alpha x}[u'(x) + \alpha u(x)]$$

y

$$Y''(x) = e^{\alpha x}[u''(x) + 2\alpha u'(x) + \alpha^2 u(x)].$$

Si se sustituyen en lugar de y, y' y y'' de la ecuación (34), se cancela el factor $e^{\alpha x}$ y se agrupan términos, se obtiene

$$au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(x) = P_n(x). \tag{35}$$

La determinación de una solución particular de la ecuación (35) es precisamente el mismo problema, excepto por las denominaciones de las constantes, que el de resolver la (31). Por lo tanto, si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ es diferente de cero, se supone que $u(x) = A_0x^n + \cdots + A_n$; de donde, una solución particular de la ecuación (34) es de la forma

$$Y(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n). \tag{36}$$

Por otra parte, si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ es cero, pero $2a\alpha + b$ no lo es, debe tomarse $u(x)$ con la forma $x(A_0x^n + \cdots + A_n)$. La forma correspondiente de $Y(x)$ es x veces la expresión del segundo miembro de (36). Debe hacerse notar que si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ es cero, entonces $e^{\alpha x}$ es una solución de la ecuación homogénea. Si tanto $a\alpha^2 + b\alpha + c$ como $2a\alpha + b$ son cero (y esto implica que $e^{\alpha x}$ y $xe^{\alpha x}$ son soluciones de la ecuación homogénea), entonces la forma correcta de $u(x)$ es $x^2(A_0x^n + \cdots + A_n)$; de donde, $Y(x)$ es x^2 veces la expresión del segundo miembro de (36).

$g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\cos \beta x$ o $e^{\alpha x}P_n(x)\operatorname{sen} \beta x$. Estos dos casos son semejantes, de modo que sólo se considerará el último. Este problema puede reducirse al precedente si se observa que, como consecuencia de la fórmula de Euler, $\operatorname{sen} \beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})/2i$. De donde, $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = P_n(x)\frac{e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}}{2i}$$

y debe elegirse

$$Y(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}(A_0x^n + \cdots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)x}(B_0x^n + \cdots + B_n),$$

o, de manera equivalente,

$$Y(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + \cdots + A_n)\cos \beta x + e^{\alpha x}(B_0x^n + \cdots + B_n)\operatorname{sen} \beta x.$$

Por lo general, se prefiere la última forma. Si $\alpha \pm i\beta$ satisface al ecuación característica correspondiente a la ecuación homogénea, por supuesto es necesario multiplicar cada uno de los polinomios por x para incrementar sus grados en uno.

Si la función no homogénea comprende tanto a cos βx como a sen βx, suele ser conveniente tratar juntos estos términos, ya que cada uno por separado puede dar a lugar a la misma forma de una solución particular. Por ejemplo, si $g(x) = x + 2\cos x$, μ(entonces la forma de $Y(x)$ sería

$$Y(x) = (A_0x + A_1)\operatorname{sen} x + (B_0x + B_1)\cos x,$$

en el supuesto de que sen x y cos x no sean soluciones de la ecuación homogénea.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 12, halle la solución de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 3 \operatorname{sen} 2x$
3. $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$
4. $y'' + 2y' = 3 + 4 \operatorname{sen} 2x$
5. $y'' + 9y = x^2e^{3x} + 6$
6. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
7. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3 \operatorname{sen} x$
8. $y'' + y = 3 \operatorname{sen} 2x + x \cos 2x$
9. $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega x, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2$
10. $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega_0 x$
11. $y'' + y' + 4y = 2 \operatorname{senh} x$ *Sugerencia*: $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$
12. $y'' - y' - 2y = \cosh 2x$ *Sugerencia*: $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$

En cada uno de los problemas 13 a 18, encuentre la solución del problema con valor inicial dado.

13. $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' + 4y = x^2 + 3e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
15. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
16. $y'' - 2y' - 3y = 3xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
17. $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
18. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

En cada uno de los problemas 19 a 26, determine una forma adecuada para $Y(x)$ si ha de aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. No evalúe las constantes.

19. $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2e^{-3x} + \operatorname{sen} 3x$
20. $y'' + y = x(1 + \operatorname{sen} x)$
21. $y'' - 5y' + 6y = e^x \cos 2x + e^{2x}(3x + 4)\operatorname{sen} x$
22. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x} \cos x + 4e^{-x}x^2 \operatorname{sen} x$
23. $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x \operatorname{sen} 2x$
24. $y'' + 4y = x^2 \operatorname{sen} 2x + (6x + 7)\cos 2x$

25. $y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1)\operatorname{sen} 2x + 3e^{-x}\cos x + 4e^x$
26. $y'' + 2y' + 5y = 3xe^{-x}\cos 2x - 2xe^{-2x}\cos x$

27. Determine la solución general de

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \operatorname{sen} m\pi x,$$

en donde $\lambda > 0$ y $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, \ldots, N$.

28. En muchos problemas físicos la función de entrada (es decir, el término no homogéneo) puede especificarse mediante diferentes fórmulas en distintos periodos. Como ejemplo, determine la solución $y = \phi(t)$ de

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ \pi e^{\pi - t}, & t > \pi, \end{cases}$$

que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$. Suponga que y y y' también son continuas en $t = \pi$. Trace la gráfica del término no homogéneo y de solución como funciones del tiempo. *Sugerencia*: Primero resuelva el problema con valor inicial para $t \leq \pi$; luego para $y > \pi$, determinando las constantes de la última solución a partir de las condiciones de continuidad en $t = \pi$.

29. Aplique el método indicado en el problema 28 para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi/2, \\ 0, & t > \pi/2 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$.

Comportamiento de las soluciones cuando $x \to \infty$. En los problemas 30 y 31 se continúa el análisis iniciado con los problemas 33 a 35 de la sección 3.5. Considere la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{i}$$

en donde a, b y c son positivos.

30. Si $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son soluciones de la ecuación (i), demostrar que $Y_1(x) - Y_2(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. ¿Es verdadero este resultado si $b = 0$?
31. Si $g(x) = d$, una constante, demostrar que toda solución de (i) tiende a d/c cuando $x \to \infty$. ¿Qué sucede si $c = 0$? ¿Qué sucede si también $b = 0$?
32. En este problema se indica un procedimiento alternativo[8] para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + by' + cy = (D^2 + bD + c)y = g(x), \tag{i}$$

en donde b y c son constantes y D denota derivación con respecto a x. Sean r_1 y r_2 los ceros del polinomio característico de la ecuación homogénea correspondiente. Estas raíces pueden ser números reales y diferentes, reales e iguales o complejos conjugados.

[8] R. S. Luthar, "Another Approach to a Standard Differential Equation", *Two Year College Mathematics Journal 10* (1979), pp. 200-201; ver también el artículo de D. C. Sandell y F. M. Stein, "Factorization of Operators of Second Order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations", *Two Year College Mathematics Journal 8* (1977), pp. 132-141, respecto a un análisis más general de la factorización de operadores.

a) Compruebe que (i) puede escribirse en la forma factorizada

$$(D - r_1)(D - r_2)y = g(x),$$

en donde $r_1 + r_2 = -b$ y $r_1 r_2 = c$.
b) Sea $u = (D - r_2)y$. Demuestre que la solución de (i) puede encontrarse al resolver las dos ecuaciones de primer orden siguientes:

$$(D - r_1)u = g(x), \qquad (D - r_2)y = u(x).$$

En cada uno de los problemas 33 a 36, aplique el método del problema 32 para resolver la ecuación diferencial dada.

33. $y'' - 3y - 4y = e^{2x}$ (ver el ejemplo 1)
34. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3 \operatorname{sen} x$ (ver el problema 7)
35. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ (ver el problema 6)
36. $y'' + 2y' = 3 + 4 \operatorname{sen} 2x$ (ver el problema 4)

3.7 Variación de parámetros

En esta sección se describe otro método para hallar una solución particular de una ecuación no homogénea. Este método, conocido como **variación de parámetros**, se debe a Lagrange y complementa bastante bien el método de los coeficientes indeterminados. La ventaja más importante de la variación de parámetros es que se trata de *método general*; en principio, por lo menos, es posible aplicarlo a cualquier ecuación y no requiere suposiciones detalladas respecto a la forma de la solución. De hecho, más tarde en esta sección se aplica este método con el fin de obtener una fórmula para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal no homogénea arbitraria de segundo orden. Por otra parte, el método de variación de parámetros al final requiere la evaluación de ciertas integrales en las que interviene el término no homogéneo de la ecuación diferencial, lo cual puede presentar dificultades. Antes de considerar este método en el caso general, se ilustrará su aplicación con un ejemplo.

Ejemplo 1 Encontrar un solución particular de

$$y'' + 4y = 3 \csc x. \tag{1}$$

Observe que este problema no cae dentro de los límites del método de los coeficientes indeterminados porque el término no homogéneo $g(x) = 3 \csc x$ contiene un cociente (en vez de una suma o un producto) de $\operatorname{sen} x$ o de $\cos x$. Por consiguiente, se necesita un enfoque diferente. Observe también que la ecuación homogénea correspondiente a (1) es

$$y'' + 4y = 0, \tag{2}$$

y que la solución general de (2) es

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x. \tag{3}$$

La idea básica en el método de variación de parámetros es sustituir las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (3) por las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, respectivamente, y después determinar estas funciones de modo que la expresión resultante

$$y = u_1(x) \cos 2x + u_2(x) \operatorname{sen} 2x \tag{4}$$

sea una solución de la ecuación no homogénea (1).

Para determinar u_1 y u_2 es necesario sustituir y de la ecuación (1) por su expresión dada en (4). Sin embargo, incluso sin llevar a cabo esta sustitución es posible anticipar que el resultado será una sola ecuación que comprenda alguna combinación de u_1 y u_2 y sus dos primeras derivadas. Dado que se tiene una sola ecuación y dos funciones desconocidas, es de esperar que existan muchas posibilidades para u_1 y u_2 que satisfagan las necesidades. Un punto de vista alternativo es que puede imponerse una segunda condición que se desee, para obtener así dos ecuaciones para las dos funciones desconocidas u_1 y u_2. Pronto se demostrará (siguiendo a Lagrange) que es posible elegir esta segunda condición de una manera que se hagan a los cálculos marcadamente más eficientes.

Si se regresa ahora a la ecuación (4), se deriva y se reagrupan los términos, se obtiene

$$y' = -2u_1(x) \operatorname{sen} 2x + 2u_2(x) \cos 2x + u_1'(x) \cos 2x + u_2'(x) \operatorname{sen} 2x \tag{5}$$

Si se tiene presente la posibilidad de elegir una segunda condición sobre u_1 y u_2, se requiere que los dos últimos términos del segundo miembro de (5) sean cero; es decir, que

$$u_1'(x) \cos 2x + u_2'(x) \operatorname{sen} 2x = 0. \tag{6}$$

Entonces, de la ecuación (5) se concluye que

$$y' = -2u_1(x) \operatorname{sen} 2x + 2u_2(x) \cos 2x. \tag{7}$$

Aunque el efecto final de la condición (6) aún no es evidente, por lo menos se simplificó la expresión para y'. Además, al derivar la ecuación (7) se obtiene

$$y'' = -4u_1(x) \cos 2x - 4u_2(x) \operatorname{sen} 2x - 2u_1'(x) \operatorname{sen} 2x + 2u_2'(x) \cos 2x. \tag{8}$$

Entonces, si se sustituyen y y y'' de la ecuación (1) por sus expresiones dadas en (4) y (8), respectivamente, se encuentra que u_1 y u_2 deben satisfacer

$$-2u_1'(x) \operatorname{sen} 2x + 2u_2'(x) \cos 2x = 3 \csc x. \tag{9}$$

Resumiendo los resultados hasta este momento, se desea elegir u_1 y u_2 de modo que se satisfagan las ecuaciones (6) y (9). Estas ecuaciones pueden considerarse como un par de ecuaciones *algebraicas* lineales para las dos cantidades desconocidas $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$. (6) y (9) pueden resolverse de varias maneras. Por ejemplo, si se despeja $u_2'(x)$ en (6), se tiene

$$u_2'(x) = -u_1'(x) \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} \tag{10}$$

Luego, si se sustituye $u_2'(x)$ de la (9) por esta expresión y se simplifica, se obtiene

$$u_1'(x) = -\frac{3 \csc x \operatorname{sen} 2x}{2} = -3 \cos x. \tag{11}$$

Además, si se sustituye esta expresión para $u_1'(x)$ en la ecuación (10) y se aplican las fórmulas para el doble de un ángulo, se encuentra que

$$u_2'(x) = \frac{3\cos x \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{3(1 - 2\operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen} x} = \frac{3}{2}\csc x - 3\operatorname{sen} x \tag{12}$$

Una vez que se obtuvieron $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, el paso siguiente es integrar para obtener $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$. El resultado es

$$u_1(x) = -3\operatorname{sen} x + c_1 \tag{13}$$

y

$$u_2(x) = \tfrac{3}{2}\ln|\csc x - \cot x| + 3\cos x + c_2. \tag{14}$$

Por último, al sustituir estas expresiones en la ecuación (4), se tiene

$$y = -3\operatorname{sen} x \cos 2x + \tfrac{3}{2}\ln|\csc x - \cot x|\operatorname{sen} 2x + 3\cos x \operatorname{sen} 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x \tag{15}$$

Los términos de la ecuación (15) en los que aparecen las constantes arbitrarias c_1 y c_2 son la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, mientras que los demás términos son una solución particular de la ecuación no homogénea (1). Por lo tanto, (15) es la solución general de la ecuación (1).

En el ejemplo anterior pudo aplicarse bien el método de variación de parámetros en la determinación de una solución particular y, por lo tanto, de la solución general de la ecuación (1). La siguiente pregunta es si este método puede aplicarse de manera eficaz a una ecuación arbitraria. Como consecuencia, se considera

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{16}$$

en donde p, q y g son funciones continuas dadas. Como punto de partida, se supone que se conoce la solución general

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{17}$$

de la ecuación homogénea correspondiente

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{18}$$

Esta es una suposición importante porque hasta el momento se ha mostrado cómo resolver la ecuación (18) sólo si tiene coeficientes constantes. Si tiene coeficientes que dependen de x entonces, por lo general, para obtener $y_c(x)$ deben aplicarse los métodos que se describen en el capítulo 5.

La idea decisiva, como se ilustra en el ejemplo 1, es sustituir las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (17) por las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, respectivamente; esto da

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \tag{19}$$

A continuación se intenta determinar $u_1(x)$ y $u_2(x)$ de manera que la expresión de (19) sea una solución de la ecuación no homogénea (16), en lugar de serlo de la ecuación homogénea (18). Por tanto, se deriva la (19) y se obtiene

$$y' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{20}$$

Como en el ejemplo 1, ahora se igualan a cero los términos de la ecuación (20) en los que aparecen $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$; es decir, se requiere que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{21}$$

En seguida, con base en (20), se tiene

$$y' = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{22}$$

Además, al derivar una vez más se obtiene

$$y'' = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x). \tag{23}$$

Ahora se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (16) por sus expresiones dadas en (19), (22) y (23), respectivamente. Después de reordenar los términos de la ecuación resultante se encuentra que

$$\begin{aligned} &u_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] \\ &\quad + u_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] \\ &\quad + u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x). \end{aligned} \tag{24}$$

Cada una de las expresiones entre corchetes de la ecuación (24) es cero porque tanto y_1 como y_2 son soluciones de la ecuación homogénea (18). Por consiguiente, (24) se reduce a

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x). \tag{25}$$

Las ecuaciones (21) y (25) forman un sistema de dos ecuaciones algebraicas lineales para las derivadas $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ de las funciones desconocidas. Estas ecuaciones corresponden exactamente a las (6) y (9) del ejemplo 1.

Al resolver el sistema (21), (25) se obtiene

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}, \qquad u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}, \tag{26}$$

en donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de y_1 y y_2. Observe que es permisible dividir entre W, porque y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones y, por lo tanto, su wronskiano es diferente de cero. Al integrar las ecuaciones (26) se encuentran las funciones deseadas $u_1(x)$ y $u_2(x)$; a saber,

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\,dx + c_1, \qquad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\,dx + c_2. \tag{27}$$

Por último, si se sustituyen las expresiones (27) en la ecuación (19) da la solución general de la ecuación (16). Este resultado se enuncia como un teorema.

Teorema 3.7.1 Si las funciones p, q y g son continuas sobre un intervalo abierto I y si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (18) correspondientes a la ecuación no homogénea (16),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

entonces una solución particular de (16) es

$$Y(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\,dx, \tag{28}$$

y la solución general es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + Y(x), \tag{29}$$

según se prescribe en el teorema 3.6.2.

Al examinar la expresión (28) y repasar el proceso mediante el cual se obtuvo, es posible observar que pueden presentarse dos dificultades importantes al aplicar el método de variación de parámetros. Como ya se mencionó, una es la determinación $y_1(x)$ y $y_2(x)$, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (18), cuando los coeficientes de esa ecuación no son constantes. La otra dificultad posible está en la evaluación de las integrales que aparecen en la ecuación (28). Esto depende por completo de la naturaleza de las funciones y_1, y_2 y g. Por supuesto, aun si no es posible evaluar las integrales por métodos analíticos elementales, por lo común es posible calcularlas de manera aproximada mediante la regla de Simpson o algún otro procedimiento numérico. Al aplicar el método de variación de parámetros se recomienda seguir el procedimiento que acaba de presentarse, en vez de intentar memorizar la ecuación (28). Por otra parte, si se usa esta fórmula, es necesario tener la seguridad de que la ecuación diferencial es exactamente de la forma (16); en caso contrario, no se identificará de manera correcta el término no homogéneo $g(x)$.

En el ejemplo siguiente se ilustra nuevamente el método de variación de parámetros.

Ejemplo 2 Comprobar que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = 1/x$ son soluciones de

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \tag{30}$$

y, a continuación determine la solución general de

$$x^2y'' + xy' - y = x \ln x \tag{31}$$

para $x > 0$.

Para comprobar que las funciones dadas son soluciones de la ecuación (30), pueden sustituirse simplemente estas funciones en la ecuación y observar si se satisface. Por ejemplo, para $y_2(x) = 1/x$, se tiene $y_2'(x) = -1x^2$ y $y_2''(x) = 2/x^3$. Si se sustituyen estas expresiones en (30) se encuentra que $(2/x) - (1/x) - (1/x) = 0$, lo cual evidentemente es cierto para toda x, excepto $x = 0$. De manera semejante, es fácil comprobar que y_1 también es una solución.

Si se regresa ahora a la ecuación no homogénea (31), primero se observa que no es de la forma (16) porque el coeficiente de y'' no es uno. Por tanto, se divide la ecuación entre x^2 y vuelve a escribirse como

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x}, \qquad x > 0. \tag{32}$$

Ahora es posible identificar $(\ln x)/x$ con el término no homogéneo $g(x)$ de la ecuación (16). Para resolver (32) se supone que

$$y = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1} \tag{33}$$

y se procede como en el ejemplo 1 y el análisis general que sigue a la ecuación (16). Las ecuaciones que determinan a $u_1'(x)$ y a $u_2'(x)$ son

$$\begin{aligned} u_1'(x)x + u_2'(x)x^{-1} &= 0, \\ u_1'(x) + u_2'(x)(-x^{-2}) &= \frac{\ln x}{x}. \end{aligned} \tag{34}$$

La solución del sistema de ecuaciones (34) es

$$u_1'(x) = \frac{\ln x}{2x}, \qquad u_2'(x) = -\frac{x \ln x}{2}. \tag{35}$$

Entonces, se concluye que

$$u_1(x) = \frac{(\ln x)^2}{4} + c_1, \qquad u_2(x) = -\frac{x^2(2 \ln x - 1)}{8} + c_2. \tag{36}$$

Por último, si se sustituyen estas expresiones en la ecuación (33) se obtiene la solución general de la (32); a saber,

$$y = \tfrac{1}{4}x(\ln x)^2 - \tfrac{1}{4}x \ln x + c_1x + c_2x^{-1}. \tag{37}$$

Observe que en el producto $u_2(x)x^{-1}$ hay un término $x/8$ que quedó absorbido en el término c_1x.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4 aplique el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada. A continuación, compruebe la respuesta mediante la aplicación del método de los coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$
4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{x/2}$

En cada uno de los problemas 5 a 12, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada. En los problemas 11 y 12, $g(x)$ es una función continua arbitraria.

5. $y'' + y = \tan x, \qquad 0 < x < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9 \sec^2 3x, \qquad 0 < x < \pi/6$
7. $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}, \qquad x > 0$
8. $y'' + 4y = 3 \csc 2x, \qquad 0 < x < \pi/2$
9. $4y'' + y = 2 \sec(x/2), \qquad -\pi < x < \pi$
10. $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$
11. $y'' - 5y' + 6y = g(x)$
12. $y'' + 4y = g(x)$

En cada uno de los problemas 13 a 20 compruebe que las funciones dadas y_1 y y_2 satisfacen la ecuación homogénea correspondiente; entonces encuentre una solución particular de la ecuación no homogénea dada. En los problemas 19 y 20, $g(x)$ es una función continua arbitraria.

13. $x^2y'' - 2y = 3x^2 - 1, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-1}$
14. $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 2x^3, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = xe^x$
15. $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}, \quad x > 0; \quad y_1(x) = 1 + x, \quad y_2(x) = e^x$
16. $(1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2e^{-x}, \quad 0 < x < 1; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x$
17. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 \ln x$
18. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 3x^{3/2} \operatorname{sen} x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2} \operatorname{sen} x,$ $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$
19. $(1 - x)y'' + xy' - y = g(x), \quad 0 < x < 1; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x$
20. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = g(x), \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x,$ $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$

21. Demuestre que la solución del problema con valor inicial

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{i}$$

puede escribirse como $y = u(x) + v(x)$, en donde u y v son soluciones de los dos problemas con valor inicial

$$L[u] = 0, \qquad u(x_0) = y_0, \qquad u'(x_0) = y'_0, \tag{ii}$$

$$L[v] = g(x), \qquad v(x_0) = 0, \qquad v'(x_0) = 0, \tag{iii}$$

respectivamente. En otras palabras, las no homogeneidades de la ecuación diferencial y de las condiciones iniciales pueden tratarse por separado. Observe que es fácil hallar u si se conoce un conjunto fundamental de soluciones de $L[y] = 0$.

22. Mediante la elección del límite inferior de integración de la ecuación (28) del texto como el punto inicial x_0, demuestre que $Y(x)$ queda

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)}\, g(t)\, dt.$$

Demuestre que $Y(x)$ es una solución del problema con valor inicial

$$L[y] = g(x), \qquad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0.$$

Por tanto, Y puede identificarse con v del problema 21.

23. a) Aplique el resultado del problema 22 para demostrar que la solución del problema con valor inicial

$$y'' + y = g(x), \qquad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \tag{i}$$

es

$$y = \int_{x_0}^{x} \operatorname{sen}(x - t)\, g(t)\, dt. \tag{ii}$$

b) Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$y'' + y = g(x), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

24. Aplique el resultado del problema 22 para encontrar la solución del problema con valor inicial

$$L[y] = (D - a)(D - b)y = g(x), \qquad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0,$$

en donde a y b son números reales con $a \neq b$.

25. Use el resultado del problema 22 para encontrar la solución del problema con valor inicial

$$L[y] = [D^2 - 2\lambda D + (\lambda^2 + \mu^2)]y = g(x), \qquad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0.$$

Observe que las raíces de la ecuación característica son $\lambda \pm i\mu$.

26. Use el resultado del problema 22 para encontrar la solución del problema con valor inicial

$$L[y] = (D - a)^2 y = g(x), \qquad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0,$$

en donde a es cualquier número real.

27. Mediante la combinación de los resultados de los problemas 24 a 26, demuestre que la solución del problema con valor inicial

$$L[y] = (aD^2 + bD + c)y = g(x), \qquad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0,$$

en donde a, b y c son constantes, tiene la forma

$$y = \phi(x) = \int_{x_0}^{x} K(x - t)g(t)\,dt. \tag{i}$$

La función K depende sólo de las soluciones y_1 y y_2 de la ecuación homogénea correspondiente y es independiente del término no homogéneo. Una vez que se determina K, todos los problemas no homogéneos que comprenden el mismo operador diferencial L se reducen a la evaluación de una integral. Observe también que aun cuando K depende tanto de x como de t, solamente aparece la combinación $x - t$, de modo que K en realidad es una función de una sola variable. Si se considera que $g(x)$ es la entrada del problema y que $\phi(x)$ es la salida, de la ecuación (i) se deduce que la salida depende de la entrada sobre todo el intervalo, desde el punto inicial x_0 hasta el valor en curso x. La integral de la ecuación (i) se llama **convolución** de K y g, y K recibe el nombre **kernel**.

28. El método de reducción de orden (sección 3.5) también puede aplicarse para la ecuación no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{i}$$

siempre que se conozca una solución y_1 de la ecuación homogénea correspondiente. Haga $y = v(x)y_1(x)$ y demuestre que y satisface la ecuación (i) si v es una solución de

$$y_1(x)v'' + [2y_1'(x) + p(x)y_1(x)]v' = g(x). \tag{ii}$$

La ecuación (ii) es una ecuación lineal de primer orden para v'. Si se resuelve esta ecuación, se integra el resultado y luego se multiplica por $y_1(x)$ se llega a la solución general de (i).

En cada uno de los problemas 29 a 32, aplique el método descrito en el problema 28 para resolver la ecuación diferencial dada.

29. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2, \qquad x > 0; \qquad y_1(x) = x$
30. $x^2y'' + 7xy' + 5y = x, \qquad x > 0; \qquad y_1(x) = x^{-1}$
31. $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}, \qquad x > 0; \qquad y_1(x) = 1 + x$ (ver Problema 15)
32. $(1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2e^{-x}, \qquad 0 < x < 1; \qquad y_1(x) = e^x$ (ver problema 16)

3.8 Vibraciones mecánicas y eléctricas

Una de las razones por las que vale la pena estudiar las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes es porque sirven como modelos matemáticos de algunos procesos físicos importantes. Dos importantes áreas de aplicación son los campos de las oscilaciones mecánicas eléctricas. Por ejemplo, el movimiento de una masa de un resorte vibrante, las oscilaciones de torsión de un árbol con un volante, el flujo de la corriente eléctrica en un circuito simple en serie y muchos otros problemas físicos, todos se describen por la solución de un problema con valor inicial de la forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \tag{1}$$

Esto ilustra una relación fundamental entre las matemáticas y la física: *muchos problemas físicos, al ser planteados matemáticamente, son idénticos.* Por tanto, una vez que se sabe cómo resolver el problema con valor inicial (1), sólo es necesario realizar las interpretaciones adecuadas de las constantes a, b y c y de las funciones y y g, para obtener soluciones de diferentes problemas físicos.

Se estudiará con detalle el movimiento de una masa de un resorte, porque comprender el comportamiento de este sencillo sistema es el primer paso en la investigación de sistemas vibrantes más complicados. Además, los principios que intervienen son comunes a muchos problemas. Considere una masa m suspendida en el extremo de un resorte vertical de longitud original l, como se muestra en la figura 3.8.1. La masa provoca un alargamiento L del resorte en la dirección hacia abajo (positiva). Existen dos fuerzas que actúan en el punto en el que la masa está sujeta al resorte: ver la figura 3.8.2. La fuerza gravitacional, o peso de la masa, actúa hacia abajo y tiene una magnitud mg, en donde g es la aceleración debida a la gravedad. También hay una fuerza F_s, debida al resorte, que actúa hacia arriba. Si se supone que el alargamiento L del resorte es pequeño, la fuerza del resorte es casi proporcional a L; este se conoce como ley de Hooke[9]. Por tanto, se escribe $F_s = -kL$, en donde la constante de proporcionalidad k se llama constante de resorte y el signo negativo se debe al hecho de que

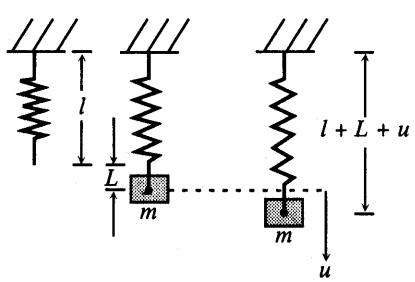


FIGURA 3.8.1 Un sistema resorte-masa.

[9] Robert Hooke (1635–1703) fue un científico inglés con intereses bastante amplios. Su libro más importante, *Micrographia*, fue publicado en 1665 y en él describió diversas observaciones microscópicas. Hooke publicó por primera vez su ley del comportamiento elástico en 1676 como un anagrama: *ceiiinosssttuv*; en 1678 dio la solución *ut tensio sic vis*, que aproximadamente significa "como la fuerza, así es el desplazamiento".

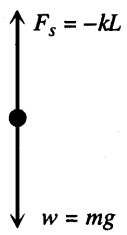


FIGURA 3.8.2 Diagrama de fuerzas de un sistema resorte-masa.

la fuerza del resorte actúa en la dirección hacia arriba (negativa). Como la masa está en equilibrio, las dos fuerzas se equilibran entre sí, lo cual significa que

$$mg - kL = 0. \tag{2}$$

Para un peso dado $w = mg$, es posible medir L y, a continuación usar la ecuación (2) para determinar k. Observe que las unidades de k son fuerza/longitud.

En el problema dinámico correspondiente, se tiene interés en estudiar el movimiento de la masa, si ésta recibe la acción de una fuerza externa o está inicialmente desplazada. Supóngase que $u(t)$, medido positivo hacia abajo, denota el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio en el instante t; ver la figura 3.8.1. Entonces $u(t)$ está relacionado con las fuerzas que actúan sobre la masa mediante la ley de Newton del movimiento,

$$mu''(t) = f(t), \tag{3}$$

en donde u'' es la aceleración de la masa y f es la fuerza neta que actúa sobre ésta. Observe que tanto u como f son funciones del tiempo. En la determinación de f hay cuatro fuerzas separadas que es necesario considerar:

1. El peso $w = mg$ de la masa siempre actúa hacia abajo.
2. La fuerza del resorte, Fs, se supone proporcional al alargamiento total $L + u$ del resorte y siempre actúa para regresar el resorte a su posición natural. Si $L + u > 0$, entonces el resorte está extendido y la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba. En este caso,

$$F_s = -k(L + u). \tag{4}$$

   Por otra parte, si $L + u < 0$, entonces el resorte está comprimido en una distancia $|L + u|$ y la fuerza del resorte, que ahora está dirigida hacia abajo, queda dada por $F_s = k|L + u|$. Sin embargo, si $L + u < 0$, se concluye que $|L + u| = -(L + u)$, de modo que nuevamente F_s queda dada por la ecuación (4). Por tanto, sin importar la posición de la masa, la fuerza ejercida por el resorte siempre queda expresada por la ecuación (4).
3. La fuerza de amortiguamiento o de resistencia F_d siempre actúa en dirección opuesta a la dirección del movimiento de la masa. Esta fuerza puede deberse a las propiedades viscosas del medio en el que la masa se está moviendo (resistencia del aire, por ejemplo) o a que la masa puede estar sujeta a un dispositivo mecánico, como un amortiguador, que imparte una fuerza de resistencia al resorte. Un dispositivo así a menudo se denomina amortiguador viscoso. En todo caso, se supone que la fuerza resistencia es proporcional a la magnitud de la velocidad $|du/dt|$ de la masa. Los resultados experimentales verifican que esta suposición es razonablemente exacta para objetos en la

atmósfera que no se está moviendo demasiado rápido. Si $du/dt > 0$, entonces u es creciente, de modo que la masa se está desplazando hacia abajo. Entonces, F_d está dirigida hacia arriba y queda dada por

$$F_d(t) = -\gamma u'(t), \tag{5}$$

en donde γes una constante positiva de proporcionalidad conocida como constante de amortiguamiento. Por otra parte, si $du/dt < 0$, entonces u es decreciente, la masa se está moviendo hacia arriba y F_d está dirigida hacia abajo. En este caso, $F_d = \gamma|u'(t)|$; como $|u'(t)| = -u'(t)$, se concluye que $F_d(t)$ de nuevo queda expresada por la ecuación (5).

Por tanto, sin importar la dirección del movimiento de la masa, la fuerza de amortiguamiento siempre se expresa por la ecuación (5).

4. Una fuerza externa aplicada $F(t)$ está dirigida hacia abajo o hacia arriba según $F(t)$ sea positiva o negativa. Esta podría ser una fuerza debida al movimiento del montaje al que está sujeto el resorte o podría ser una fuerza aplicada directamente a la masa. A menudo la fuerza externa es periódica.

Tomando en consideración estas fuerzas, ahora es posible volver a escribir la ley de Newton (3) como

$$\begin{aligned} mu''(t) &= mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t) \\ &= mg - k[L + u(t)] - \gamma u'(t) + F(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Dado que $mg - kL = 0$, por la ecuación (2), se concluye que la ecuación del movimiento de la masa es

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t), \tag{7}$$

en donde las constantes m, γ y k son positivas. Observe que la ecuación (7) tiene la misma forma que la (1).

Es importante comprender que (7) sólo es una ecuación aproximada para el desplazamiento $u(t)$. Las dos ecuaciones, (4) y (5), deben considerarse como aproximaciones para la fuerza del resorte y la fuerza de amortiguamiento, respectivamente, aunque suelen ser satisfactorias en la medida en que $u(t)$ y $u'(t)$ no sean demasiado grandes. En la deducción también se ha despreciado la masa del resorte en comparación con la masa del cuerpo sujeto.

El planteamiento completo del problema de vibración requiere que se especifiquen dos condiciones iniciales; a saber, la posición inicial u_0 y la velocidad inicial u_0' de la masa:

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_0'. \tag{8}$$

Con base en el razonamiento físico puede no ser obvio que sólo es posible especificar dos condiciones iniciales o que éstas son las dos que es necesario especificar. Sin embargo, por el teorema 3.2.1 se concluye que estas condiciones dan lugar a un problema matemático que tiene una solución única. Esto es coherente con la intuición física de que si la masa se pone en movimiento con un desplazamiento y una velocidad iniciales dados, entonces su posición quedará determinada de manera única en todos los instantes futuros. La posición de la masa queda dada (aproximadamente) por la solución de la ecuación (7) sujeta a las condiciones iniciales prescritas (8).

Ejemplo 1 Una masa que pesa 4 libras estira 2 pulgadas un resorte. Suponga que la masa se desplaza 6 pulgadas en la dirección positiva y que después se suelta. La masa está en un medio que ejerce una resistencia viscosa de 6 libras cuando la velocidad de esa masa es de 3 pies por segundo. Con las suposiciones analizadas en esta sección, formule el problema con valor inicial que rige el movimiento de la masa.

El problema con valor inicial requerido consta de la ecuación diferencial (7) y las condiciones iniciales (8), por lo que la tarea es determinar las diversas constantes que aparecen es estas ecuaciones. El primer paso es elegir las unidades de medición. Con base en el planteamiento del problema, es natural utilizar el sistema inglés de unidades, en vez del sistema métrico. La única unidad de tiempo mencionada es el segundo, por lo que t se medirá en segundos. Por otra parte, en el planteamiento aparecen el pie y la pulgada como unidades de longitud; no tiene importancia cual se use, pero una vez hecha la elección es importante ser coherente. Para concretar, el desplazamiento u se medirá en pies.

Dado que en el planteamiento del problema nada se dice acerca de una fuerza externa, se supone que $F(t) = 0$. Para determinar m nótese que

$$m = \frac{w}{g} = \frac{4\ \text{lb}}{32\ \text{pie/seg}^2} = \frac{1}{8}\frac{\text{lb-seg}^2}{\text{pie}}.$$

El coeficiente de amortiguamiento γ queda determinado por la afirmación de que $\gamma u'$ es igual a 6 libras cuando u' es de 3 pies por segundo. Por lo tanto,

$$\gamma = \frac{6\ \text{lb}}{3\ \text{pie/seg}} = 2\frac{\text{lb-seg}}{\text{pie}}.$$

La constante del resorte k se encuentra a partir de la afirmación de que la masa alarga el resorte en 2 pulgadas o 1/6 pie; por tanto,

$$k = \frac{4\ \text{lb}}{1/6\ \text{pie}} = 24\frac{\text{lb}}{\text{pie}}.$$

Como consecuencia, la ecuación (7) se queda

$$\tfrac{1}{8}u'' + 2u' + 24u = 0,$$

o bien,

$$u'' + 16u' + 192u = 0. \tag{9}$$

Las condiciones iniciales son

$$u(0) = \tfrac{1}{2}, \qquad u'(0) = 0. \tag{10}$$

La segunda condición inicial se da implícitamente por la expresión "se suelta" en el planteamiento del problema, la cual se interpreta como que la masa se deja en movimiento sin velocidad inicial.

Vibraciones libres no amortiguadas. Si no existe fuerza externa, entonces $F(t) = 0$ en la ecuación (7). Supóngase también que no hay amortiguamiento, de modo que $\gamma = 0$; ésta es una configuración idealizada del sistema, rara vez (si es que es posible) alcanzable por completo en la práctica. Entonces la ecuación del movimiento (7) se reduce a

$$mu'' + ku = 0. \tag{11}$$

La solución general de (11) es

$$u = A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t, \tag{12}$$

en donde

$$\omega_0^2 = k/m. \tag{13}$$

Pueden determinarse las constantes arbitrarias A y B si se dan condiciones iniciales de la forma (8).

Al analizar la solución de la ecuación (11) es conveniente volver a escribir la (12) en la forma

$$u = R \cos(\omega_0 t - \delta), \tag{14}$$

o bien,

$$u = R \cos \delta \cos \omega_0 t + R \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{15}$$

Al comparar la ecuación (15) con la (12), se encuentra que A, B, R y δ están relacionadas por las ecuaciones

$$A = R \cos \delta, \qquad B = R \operatorname{sen} \delta \tag{16}$$

Por tanto,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan \delta = B/A. \tag{17}$$

Al calcular δ es necesario tener cuidado en elegir el cuadrante correcto; puede lograrse esto si se comprueban los signos de cos δ y sen δ de las ecuaciones (16).

La gráfica de la ecuación (14), o de la equivalente (12), para un conjunto típico de condiciones iniciales, se muestra en la figura 3.8.3. La gráfica es una onda cosenoidal desplazada que describe un movimiento periódico, o armónico simple, de la masa. El **periodo** del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

La frecuencia circular $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, medida en radianes por unidad de tiempo, se llama **frecuencia natural** de la vibración. El desplazamiento máximo R de la masa con respecto al equilibrio es la **amplitud** del movimiento. El parámetro adimensional δ se llama **fase**, o

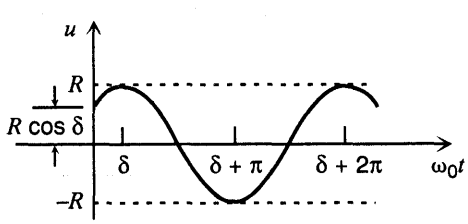


FIGURA 3.8.3 Movimiento armónico simple $u = R \cos(\omega_0 t - \delta)$.

ángulo de fase, y mide el desplazamiento (en el tiempo) de la onda con respecto a su posición normal correspondiente a $\delta = 0$.

Observe que el movimiento descrito por la ecuación (14) tiene una amplitud constante que no disminuye con el tiempo. Esto refleja el hecho de que en ausencia de amortiguamiento no hay manera de que el sistema disipe la energía que se le imparte por el desplazamiento y la velocidad iniciales. Además, para una masa m y una constante del resorte k dadas, el sistema siempre vibra con la misma frecuencia ω_0, sin importar las condiciones iniciales. Sin embargo, las condiciones iniciales ayudan a determinar la amplitud del movimiento. Por último, observe con base en la ecuación (18) que T aumenta al crecer m, de modo que las masas más grandes vibran con mayor lentitud. Por otra parte, T disminuye al crecer k, lo que significa que los resortes más rígidos hacen vibrar más rápido al sistema.

Ejemplo 2 Suponga que una masa que pesa 10 lb alarga 2 pulgadas un resorte. Si la masa se desplaza otras 2 pulgadas y entonces se pone en movimiento con una velocidad inicial hacia arriba de un pie por segundo, determinar la posición de la masa en cualquier instante posterior. Determinar también el periodo, la amplitud y la fase del movimiento.

La constante de resorte es $k = 10$ lb/2 pulg. = 60 lb/pie y la masa es $m = w/g = 10/32$ lb-s^2/pie. De donde, la ecuación del movimiento se reduce a

$$u'' + 192u = 0 \tag{19}$$

y la solución general es

$$u = A\cos(8\sqrt{3}\,t) + B\,\text{sen}(8\sqrt{3}\,t).$$

La solución que satisface las condiciones iniciales $u(0) = 1/6$ pie y $u'(0) = -1$ pie/s es

$$u = \frac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}\,t) - \frac{1}{8\sqrt{3}}\text{sen}(8\sqrt{3}\,t). \tag{20}$$

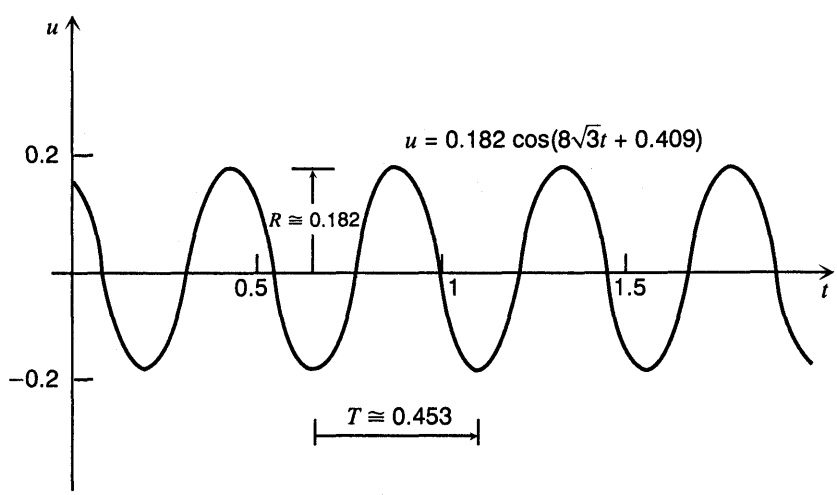


FIGURA 3.8.4 Vibración libre no amortiguada; $u'' + 192u = 0$, $u(0) = 1/6$, $u'(0) = -1$.

La frecuencia natural es $\omega_0 = \sqrt{192} \cong 13.856$ rad/s, de modo que el periodo es $T = 2\pi/\omega_0 \cong 0.45345$ s. La amplitud R y la fase δ se encuentran a partir de las ecuaciones (17); se tiene

$$R^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{192} = \frac{19}{576}, \quad \text{de modo que } R \cong 0.18162 \text{ pies}$$

La segunda de las ecuaciones (17) conduce a $\tan \delta = -\sqrt{3}/4$. Existen dos soluciones de esta ecuación: una en el segundo cuadrante y otra en el cuarto. En este problema $\cos \delta > 0$ y $\operatorname{sen} \delta < 0$, por lo que δ está en el cuarto cuadrante; a saber,

$$\delta = -\arctan(\sqrt{3}/4) \cong -0.40864 \text{ rad.}$$

En la figura 3.8.4 se muestra la gráfica de la solución (20).

Vibraciones libres amortiguadas. Si se incluye el efecto del amortiguamiento, la ecuación diferencial que rige el movimiento de la masa es

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0. \tag{21}$$

Se tiene interés especial en examinar el efecto de las variaciones en el coeficiente de amortiguamiento γ para valores dados de la masa m y la constante de resorte k. Las raíces de la ecuación característica correspondiente son

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} = \frac{\gamma}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}}\right). \tag{22}$$

Dependiendo del signo de $\gamma^2 - 4km$, la solución u tiene alguna de las formas siguientes:

$$\gamma^2 - 4km > 0, \qquad u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}; \tag{23}$$

$$\gamma^2 - 4km = 0, \qquad u = (A + Bt)e^{-\gamma t/2m}; \tag{24}$$

$$\gamma^2 - 4km < 0, \quad u = e^{-\gamma t/2m}(A \cos \mu t + B \operatorname{sen} \mu t), \quad \mu = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}}{2m} > 0. \tag{25}$$

Como m, γ y k son positivos, entonces $\gamma^2 - 4km$ siempre es menor que γ^2. Por tanto, si $\gamma^2 - 4km \geq 0$, entonces los valores de r_1 y r_2 dados por la ecuación (22) son *negativos*. Si $\gamma^2 - 4km < 0$, entonces los valores de r_1 y r_2 son complejos, pero con la parte real *negativa*. De donde, en todos los casos, la solución u tiende a cero cuando $t \to \infty$; esto ocurre sin importar los valores de las constantes arbitrarias A y B; es decir, sin importar las condiciones iniciales. Esto confirma la expectativa intuitiva; a saber, que el amortiguamiento disipa de manera gradual la energía impartida inicialmente al sistema y, en consecuencia, el movimiento se extingue al transcurrir el tiempo.

El caso más importante es el tercero, que ocurre cuando el amortiguamiento es pequeño. Si se hace $A = R \cos \delta$ y $B = R \operatorname{sen} \delta$ en la ecuación (25), entonces se obtiene

$$u = Re^{-\gamma t/2m} \cos(\mu t - \delta).$$

El desplazamiento u está entre las curvas $u = \pm Re^{-\gamma t/2m}$; de donde, se semeja a una onda cosenoidal cuya amplitud disminuye cuando t crece. En la figura 3.8.5 tiene la gráfica de un ejemplo típico. El movimiento se denomina oscilación amortiguada o vibración amortiguada.

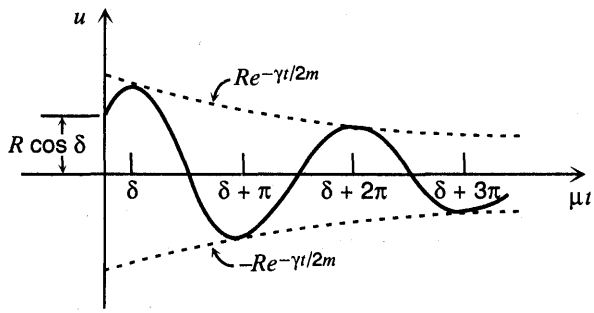


FIGURA 3.8.5 Vibración amortiguada; $u = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta)$.

Aunque el movimiento no es periódico, el parámetro μ determina la frecuencia a la que la masa oscila de un lado a otro; como consecuencia μ se llama **cuasifrecuencia**. Al comparar μ con la frecuencia ω_0 del movimiento no amortiguado, se encuentra que

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}/2m}{\sqrt{k/m}} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{\gamma^2}{8km}, \tag{26}$$

en donde la última aproximación es válida para γ pequeño. Por tanto, el efecto de un amortiguamiento pequeño es reducir ligeramente la frecuencia de la oscilación. Por analogía con la ecuación (18), la cantidad $T_d = 2\pi/\mu$ recibe el nombre de **cuasiperiodo**, y es el tiempo que transcurre entre máximos o mínimos sucesivos de la posición de la masa, o entre pasos sucesivos de la masa por su posición de equilibrio al ir en la misma dirección. La relación entre T_d y T se expresa por

$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega_0}{\mu} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{-1/2} \cong \left(1 + \frac{\gamma^2}{8km}\right). \tag{27}$$

Por tanto, el amortiguamiento pequeño incrementa el cuasiperiodo.

Las ecuaciones (26) y (27) también refuerzan el significado de la razón adimensional $\gamma^2/4km$. No es sólo la magnitud de γ lo que determina si el amortiguamiento es grande o pequeño, sino la magnitud de γ^2 en comparación con $4km$. Si $\gamma^2/4km$ es pequeña, entonces es posible despreciar el efecto del amortiguamiento al calcular la cuasifrecuencia y el cuasiperiodo del movimiento. Por otra parte, si se desea estudiar el movimiento detallado de la masa para todo el tiempo, entonces *nunca* es posible despreciar la fuerza de amortiguamiento, sin importar cuán pequeña sea.

Cuando $\gamma^2/4km$ crece, la cuasifrecuencia decrece, el cuasiperiodo aumenta y la amplitud $R\exp(-\gamma t/2m)$ disminuye cada vez con mayor rapidez. Como lo indican las ecuaciones (23), (24) y (25), la naturaleza de la solución cambia cuando γ alcanza el valor de $2\sqrt{km}$. Este valor se conoce como **amortiguamiento crítico**, mientras que para valores mayores de γ se dice que el movimiento es **sobreamortiguado**. En estos casos, dados por las ecuaciones (24) y (23), respectivamente, la masa regresa lentamente a su posición de equilibrio, pero no oscila alrededor de ésta, como sucede para γ pequeño. En la figura 3.8.6 se muestran dos ejemplos típicos del movimiento críticamente amortiguado y en los problemas 21 y 22 se analiza la situación con más profundidad.

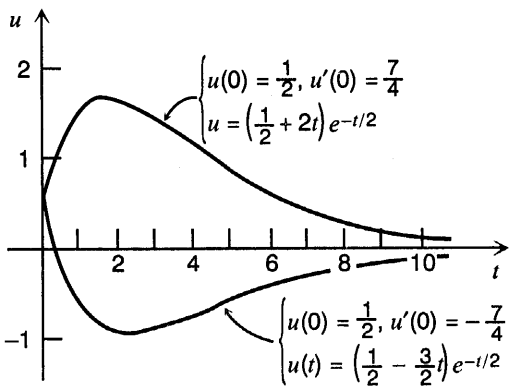


Figura 3.8.6 Movimientos críticamente amortiguados: $u'' + u' + 0.25u = 0$; $u = (A + Bt)e^{-t/2}$.

Ejemplo 3 El movimiento de cierto sistema resorte-masa está regido por la ecuación diferencial

$$u'' + 0.125u' + u = 0, \tag{28}$$

en donde u se mide en pies y t en segundos. Si $u(0) = 2$ y $u'(0) = 0$, determinar la posición de la masa en cualquier instante. Encontrar también la cuasifrecuencia y el cuasiperiodo, así como el instante en el que la masa pasa por vez primera por su posición de equilibrio.

La solución de la ecuación (28) es

$$u = e^{-t/16}\left[A\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + B\,\text{sen}\frac{\sqrt{255}}{16}t\right].$$

Para satisfacer las condiciones iniciales es necesario elegir $A = 2$ y $B = 2/\sqrt{255}$; de donde, la solución del problema con valor inicial es

$$\begin{aligned} u &= e^{-t/16}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + \frac{2}{\sqrt{255}}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{255}}{16}t\right) \\ &= \frac{32}{\sqrt{255}}e^{-t/16}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right), \end{aligned} \tag{29}$$

en donde $\tan\delta = 1/\sqrt{255}$, de modo que $\delta \cong 0.06254$. En la figura 3.8.7 se muestra el desplazamiento de la masa como función del tiempo. Con fines de comparación, también se muestra el movimiento si se desprecia el término de amortiguamiento.

La cuasifrecuencia es $\mu = \sqrt{255}/16 \cong 0.998$ y el cuasiperiodo es $T_d = 2\pi/\mu \cong 6.295$ s. Estos valores difieren sólo ligeramente de los valores correspondientes (1 y 2π, respectivamente) de la oscilación no amortiguada. Esto también es evidente a partir de las gráficas de la figura 3.8.7, que ascienden y descienden casi juntas. El coeficiente de amortiguamiento es pequeño en este ejemplo; de hecho, sólo 1/16 del valor crítico. A pesar de ello, la amplitud de la oscilación se reduce más bien con rapidez. Por ejemplo, la amplitud es menor que el 1% de su valor original para $t > 16 \ln 100 \cong 73.4$, o alrededor de una docena de ciclos.

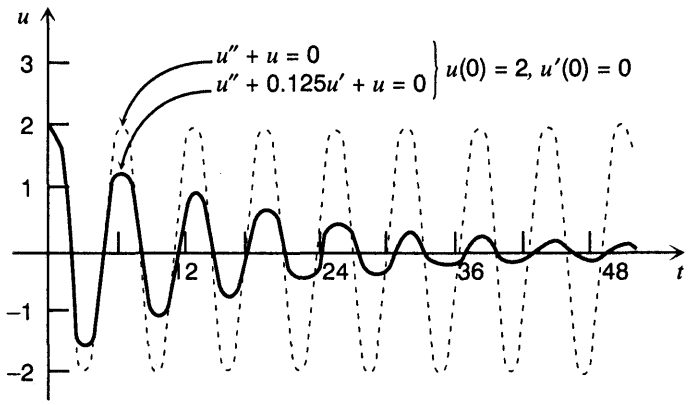


FIGURA 3.8.7 Vibración con amortiguamiento pequeño (curva de trazo continuo) y sin amortiguamiento (curva a trazos).

Para hallar el instante en el que la masa pasa por primera vez por su posición de equilibrio, se considera la ecuación (29) y se hace $255\,t/16 - \delta$ igual a $\pi/2$, el cero positivo más pequeño de la función coseno, entonces, al despejar t se obtiene

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cong 1.637 \text{ s}.$$

Circuitos eléctricos. Un segundo ejemplo de la ocurrencia de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes es como un modelo del flujo de corriente eléctrica en el circuito simple en serie que se muestra en la figura 3.8.8. La corriente I, medida en amperes, es una función del tiempo t. La resistencia R (ohms, Ω), la capacitancia C (farads, F) y la inductancia L (henrys, H) son todas positivas y se supone que son constantes conocidas. El voltaje aplicado E (volts, V) es una función dada en el tiempo. Otra cantidad física que entra en el análisis es la carga total Q (coulombs, C) en el capacitor, en cualquier instante t. La relación entre la carga Q y la corriente I es

$$I = dQ/dt. \tag{30}$$

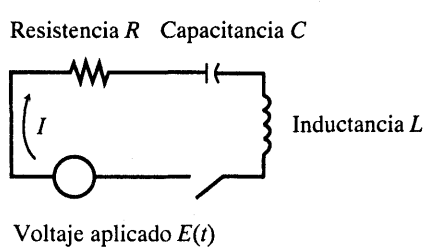


FIGURA 3.8.8 Circuito eléctrico simple.

El flujo de la corriente en el circuito se rige por la segunda ley de Kirchhoff:[10] *En un circuito cerrado, el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito.*

Según las leyes elementales de la electricidad, se sabe que

La caída de voltaje a través del resistor es IR.
La caída de voltaje a través del capacitor es Q/C.
La caída de voltaje a través del inductor es LdI/dt.

De donde, por la ley de Kirchhoff

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{31}$$

Se han elegido las unidades de modo que 1 volt = 1 ohm · 1 ampere = 1 coulomb/1farad = 1 henry · 1 ampere/1 segundo.

Si se sustituye I por su expresión dada en la ecuación (30), se obtiene la ecuación diferencial

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{32}$$

para la carga Q. Las condiciones iniciales son

$$Q(t_0) = Q_0, \qquad Q'(t_0) = I(t_0) = I_0. \tag{33}$$

Por tanto, es necesario conocer la carga en el capacitor y la corriente en el circuito en algún instante inicial t_0.

De manera alternativa, se puede obtener una ecuación diferencial para la corriente I al derivar la ecuación (32) con respecto a t y luego sustituir dQ/dt por su expresión dada en (30). El resultado es

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t), \tag{34}$$

con las condiciones iniciales

$$I(t_0) = I_0, \qquad I'(t_0) = I'_0. \tag{35}$$

De (30) se concluye que

$$I'_0 = \frac{E(t_0) - RI_0 - (1/C)Q_0}{L}. \tag{36}$$

De donde, I'_0, también queda determinado por la carga y la corriente iniciales, que son cantidades físicas mesurables.

La conclusión más importante de este análisis es que el flujo de la corriente en el circuito se describe por un problema con valor inicial que tiene precisamente la misma forma que el

[10] Gustav Kirchhoff (1824–1887), profesor en Breslau, Heidelberg y Berlín, fue uno de los físicos más importantes del siglo XIX. Descubrió las leyes básicas de los circuitos eléctricos hacia 1845 cuando aún era estudiante en Königsberg. También es famoso por su trabajo fundamental en absorción y emisión electromagnéticas y fue uno de los fundadores de la espectrocopia.

del que describe el movimiento de un sistema resorte-masa. Este es un buen ejemplo de la función unificadora de las matemáticas: una vez que se sabe la manera de resolver ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, los resultados pueden interpretarse en términos de vibraciones mecánicas, circuitos eléctricos o cualquiera otra situación física que plantee el mismo problema.

Problemas

En cada uno de los problemas de 1 a 4 determine ω_0, R y δ de modo que se escriba la expresión dada en la forma $u = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

1. $u = 3\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t$
2. $u = -\cos t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t$
3. $u = 4\cos 3t - 2\operatorname{sen} 3t$
4. $u = -2\cos \pi t - 3\operatorname{sen} \pi t$
5. Una masa que pesa 2 lb alarga 6 pulg. un resorte. Si se tira hacia abajo la masa otras 3 pulg. más y luego se suelta, y si no hay resistencia del aire, determine la posición de la masa en cualquier instante t. Encuentre la frecuencia, el periodo y la amplitud del movimiento.
6. Una masa de 100 g alarga 5 cm un resorte. Si la masa se pone en movimiento desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 10 cm/s y no hay resistencia del aire, determine la posición de la masa en cualquier instante t. ¿Cuándo regresa por vez primera la masa a su posición de equilibrio?
7. Una masa que pesa 3 lb estira 3 pulg. un resorte. Si la masa se empuja hacia arriba, contrayendo el resorte una distancia de 1 pulg. y luego se pone en movimiento con una velocidad hacia abajo de 2 pies/s, y no hay resistencia del aire, encuentre la posición de la masa en cualquier instante t. Determine la frecuencia, el periodo, la amplitud y la fase del movimiento.
8. Un circuito en serie tiene un capacitor de 0.25×10^{-6}F y un inductor de 1H. Si la carga inicial en el capacitor es de 10^{-6} C y no hay corriente inicial, encuentre la carga en el capacitor en cualquier instante t.
9. Una masa de 20 g estira 5 cm un resorte. Suponga que la masa también está sujeta a un amortiguador viscoso cuya constante de amortiguamiento es de 400 dinas-s/cm. Si se tira hacia abajo de la masa 2 cm o más y luego se suelta, encuentre su posición en cualquier instante t. Determine la cuasifrecuencia y el cuasiperiodo, así como la razón del cuasiperiodo al periodo de movimiento no amortiguado correspondiente.
10. Una masa que pesa 10 lb estira un resorte 3 pulg. La masa está sujeta a un amortiguador viscoso con constante de amortiguamiento de 2 lb-s/pie. Si la masa se pone en movimiento desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 pulg./s, encuentre su posición en cualquier instante t. Determine cuándo la masa vuelve por primera vez a su posición de equilibrio.
11. Un resorte se alarga 10 cm por la acción de una fuerza de 3 N. Del resorte se cuelga una masa de 2 kg y se sujeta también a un amortiguador viscoso que aplica una fuerza de 3 N cuando la velocidad de la masa es de 5 m/s. Si se tira hacia abajo de la masa 5 cm por debajo de su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial hacia abajo de 10 cm/s, determine su posición en cualquier instante t. Encuentre la cuasifrecuencia μ y la razón de μ a la frecuencia natural del movimiento no amortiguado correspondiente.
12. Un circuito en serie tiene un capacitor de 10^{-5} F, un resistor de $3 \times 10^2\ \Omega$ y un inductor de 0.2 H. La carga inicial en el capacitor es de 10^{-6} C y no hay corriente inicial. Encuentre la carga en el capacitor en cualquier instante t.

13. Exprese la posición de la masa del problema 9 en la forma $u = Re^{-\lambda t}\cos(\mu t - \delta)$. A continuación, determine el tiempo τ tal que $|u| \leq R/50$ para $t \geq \tau$.
14. Exprese la posición de la masa del problema 10 en la forma $u = Re^{-\lambda t}\cos(\mu t - \delta)$. En seguida, determine el tiempo τ tal que $|u| \leq R/100$ para $t \geq \tau$.
15. Cierto sistema vibrante satisface la ecuación $u'' + \gamma u' + u = 0$. Encuentre el valor del coeficiente de amortiguamiento γ para el que el cuasiperiodo del movimiento amortiguado es 50% mayor que el periodo del movimiento no amortiguado correspondiente.
16. Demuestre que el periodo del movimiento de una vibración no amortiguada de una masa suspendida de un resorte vertical es $2\pi\sqrt{L/g}$, en donde L es el alargamiento del resorte debido a la masa m y g es la aceleración debida a la gravedad.
17. Demuestre que la solución del problema con valor inicial

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0, \qquad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_0'$$

puede expresarse como al suma $u = v + w$, en donde v satisface las condiciones iniciales $v(t_0) = u$, $v'(t_0) = 0$, w satisface las condiciones $w(t_0) = 0$, $w'(t_0) = u_0'$ y tanto v como w satisfacen la misma ecuación diferencial u. Este es otro caso de superposición de soluciones de problemas más simples para obtener la solución de un problema más general.
18. Demuestre que $A\cos\omega_0 t + B\,\text{sen}\,\omega_0 t$ puede escribirse en la forma $r\,\text{sen}(\omega_0 t - \theta)$. Determine r y θ en términos de A y B. Si $R\cos(\omega_0 t - \delta) = r\,\text{sen}(\omega_0 t - \theta)$, determine la relación entre R, r δ y θ.
19. Una masa que pesa 8 lb alarga 1.5 pulg. un resorte. La masa también está sujeta a un amortiguador con coeficiente γ. Determine el valor de γ para el que el sistema está críticamente amortiguado; proporcione las unidades γ.
20. Si un circuito en serie tiene un capacitor de $C = 0.8 \times 10^{-6}$ F y un inductor de $L = 0.2$ H, encuentre la resistencia R de modo que el circuito esté críticamente amortiguado.
21. Suponga que el sistema descrito por la ecuación $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ está críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Demuestre que la masa puede pasar por la posición de equilibrio cuando mucho una vez, sin importar las condiciones iniciales.
Sugerencia: Determine todos los valores posibles de t para los que $u = 0$.
22. Suponga que el sistema descrito por la ecuación $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ está críticamente amortiguado y que las condiciones iniciales son $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_0'$. Si $u_0' = 0$, demuestre que $u \to 0$ cuando $t \to \infty$, pero que u nunca es cero. Si u_0 es positiva determine una condi-ción para u_0' que asegure que la masa pasa por su posición de equilibrio después de que se suelta.
23. Para la oscilación amortiguada descrita por la ecuación (26), el tiempo entre máximos sucesivos es $T_d = 2\pi/\mu$. Demuestre que la razón del desplazamiento en dos máximos sucesivos se expresa por $\exp(\gamma T_d/2\text{m})$. Por tanto, los máximos consecutivos forman una progresión geométrica con razón común $\exp(\gamma T_d/2m)$. El logaritmo natural de esta razón se llama **decremento logarítmico** y se denota por Δ. Demuestre que $\Delta = \pi\gamma/m\mu$. Dado que m, μ y Δ son cantidades que se miden con facilidad en un sistema mecánico, este resultado proporciona un método conveniente y *práctico* para determinar la constante de amortiguamiento del sistema, que es más difícil de medir directamente. En particular, para el movimiento de una masa vibrante en un fluido viscoso, la constante de amortiguamiento depende de la viscosidad del fluido; para formas geométricas simples, si se conoce la forma de esta dependencia, y la relación precedente permite la determinación experimental de la viscosidad. Esta es una de las maneras más exactas para determinar la viscosidad de un gas a alta presión.

24. Con referencia al problema 23, encuentre el decremento logarítmico del sistema del problema 10.
25. Para el sistema del problema 19, suponga que $\Delta = 3$ y que $T_d = 0.3$ s. Con referencia al problema 23, determine el valor del coeficiente de amortiguamiento γ.

Los problemas 26 y 27 deben resolverse utilizando *software* para computadora que trace las gráficas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

26. Considere el problema con valor inicial

$$u'' + \gamma u' + u = 0, \qquad u(0) = 2, \qquad u'(0) = 0.$$

Para un γ dado, por ejemplo $\gamma = 0.25$, obtenga la gráfica de la solución y determine el tiempo τ en el que la solución se vuelve "despreciable". Interprete la palabra "despreciable" de una manera coherente con la resolución de la pantalla de la computadora que se utilice. Repita este procedimiento para otros valores de γ en el intervalo $0 < \gamma < 2$. Elabore una gráfica de τ contra γ con los valores encontrados. Por último, determine una fórmula analítica para la dependencia de τ con respecto a γ.

27. Para el problema con valor inicial del problema 26, trace la gráfica de u contra t para varios valores de γ entre 1.75 y 2.25. Mediante el análisis de estas gráficas, intente determinar el valor de γ para el que ocurre la transición de soluciones oscilatorias a no oscilatorias; es decir, intente determinar el valor crítico del coeficiente de amortiguamiento.
28. Un bloque cúbico de lado l y densidad de masa ρ por unidad de volumen se encuentra flotando en un fluido con densidad de masa ρ_0 por unidad de volumen, en donde $\rho_0 > \rho$. Si el bloque se oprime ligeramente y luego se suelta, oscila en la dirección vertical. Si se supone que pueden despreciarse el amortiguamiento viscoso del fluido y el aire, obtenga la ecuación diferencial del movimiento y determine el periodo de ese movimiento.
Sugerencia: Aplique el principio de Arquímedes: Sobre un objeto que esté parcial o totalmente sumergido en un fluido actúa una fuerza hacia arriba (de empuje) igual al peso del fluido desplazado.

3.9 Vibraciones forzadas

Considere ahora, el caso en el que una fuerza externa periódica, por ejemplo $F_0 \cos \omega t$, se aplica a un sistema resorte-masa. En este caso, la ecuación del movimiento es

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos \omega t. \tag{1}$$

En primer lugar, suponga que no hay amortiguamiento; entonces, la ecuación (1) se reduce a

$$mu'' + ku = F_0 \cos \omega t. \tag{2}$$

Si $\omega_0 = \sqrt{k/m} \neq \omega$, entonces la solución general de la ecuación (2) es

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \tag{3}$$

Las constantes c_1 y c_2 quedan determinadas por las condiciones iniciales. En general, el movimiento resultante es la suma de dos movimientos periódicos de frecuencias (ω_0 y ω) y amplitudes diferentes. Existen dos casos en particular interesantes.

Pulsaciones. Suponga que inicialmente la masa está en reposo, de modo que $u(0) = 0$ y $u'(0) = 0$. Entonces resulta que las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (3) quedan dadas por

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad c_2 = 0, \tag{4}$$

y la solución de la ecuación (2) es

$$u = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{5}$$

Ésta es la suma de dos funciones periódicas de periodos diferentes pero con la misma amplitud. Si se aplican las identidades trigonométricas para $\cos(A \pm B)$ con $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ y $B = (\omega_0 - \omega)t/2$, la ecuación (5) puede escribirse en la forma

$$u = \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \tag{6}$$

Si $|\omega_0 - \omega|$ es pequeño, entonces $\omega_0 + \omega > |\omega_0 - \omega|$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen}(\omega_0 + \omega)t/2$ es una función de oscilación rápida en comparación con $\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)t/2$. Por tanto, el movimiento es una oscilación rápida con frecuencia $(\omega_0 + \omega)/2$, pero con una amplitud sinusoidal que varía con lentitud.

$$\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}.$$

Este tipo de movimiento, que presenta una variación periódica de la amplitud, muestra lo que se conoce como **pulsación**. Este fenómeno se presenta en acústica cuando se hacen sonar simultáneamente dos diapasones de frecuencia casi igual. En este caso, la variación periódica de la amplitud es bastante evidente a simple oído. En electrónica la variación de la amplitud con el tiempo se llama **modulación en amplitud**. En la figura 3.9.1 se muestra la gráfica de u, según la da la ecuación (6), en un caso típico.

Resonancia. Como segundo ejemplo, considere el caso en el que $\omega = \omega_0$; es decir, la frecuencia de la función de fuerza es la misma que la frecuencia natural del sistema. Entonces, el término no homogéneo $F_0 \cos \omega t$ es una solución de la ecuación homogénea. En este caso la solución de la ecuación (2) es

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0'}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{7}$$

Debido a la presencia del término $t \operatorname{sen} \omega_0 t$ en (7), el movimiento se vuelve no acotado cuando $t \to \infty$, sin importar los valores de c_1 y c_2; ver en la figura 3.9.2 en ejemplo típico. Este es el fenómeno conocido como **resonancia**. Sin embargo, en la práctica real, el resorte probablemente se rompería. Por supuesto, tan pronto como u se hace grande, la teoría en la que se basa la ecuación (1) deja de ser válida, ya que la suposición de que la fuerza del resorte depende linealmente del desplazamiento requiere que u sea pequeño. Si en el modelo se incluye el amortiguamiento, entonces el movimiento permanece acotado; sin embargo, la respuesta a la función de entrada $F_0 \cos \omega t$ puede ser grande si el amortiguamiento es pequeño y si ω está cercano a ω_0.

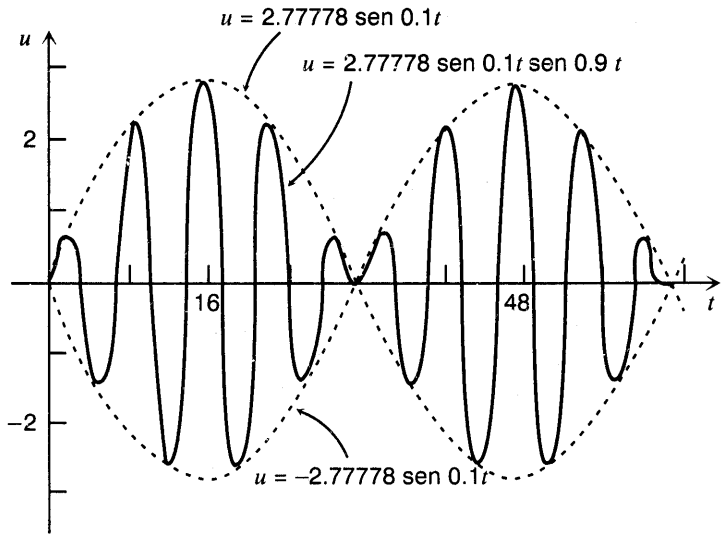


FIGURA 3.9.1 Pulsación; solución de $u'' + u = 0.5 \cos 0.8t$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$; $u = 2.77778 \text{ sen } 0.1t \text{ sen } 0.9t$.

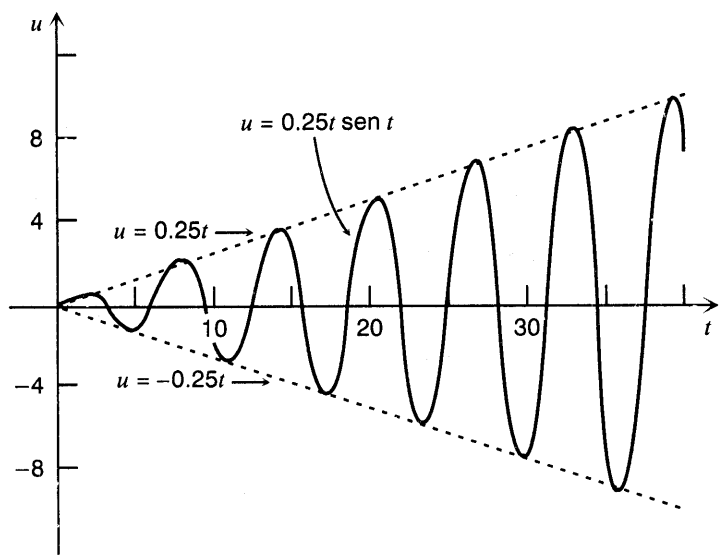


FIGURA 3.9.2 Resonancia; solución de $u'' + u = 0.5 \cos t$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$; $u = 0.25t \text{ sen } t$.

La resonancia es capaz de crear serias dificultades en el diseño de estructuras, en donde puede producir inestabilidades que originen la falla de la estructura. Por ejemplo, los soldados dejan de marchar a compás al cruzar un puente para eliminar la fuerza *periódica* de su marcha, que pudiera resonar a una frecuencia natural del puente. Otro ejemplo ocurrió en el

diseño de la turbobomba para combustible a alta presión del motor principal del transbordador espacial. La turbobomba era inestable y no podía operar a más de 20 000 rpm, en comparación con la velocidad de diseño de 39 000 rpm. Esta dificultad causó la suspensión del transbordador durante seis meses, a un costo estimado de medio millón de dólares diarios.[11]

Vibraciones forzadas con amortiguamiento. El movimiento del sistema resorte-masa con amortiguamiento y la función de fuerza $F_0 \cos \omega t$ puede determinarse de manera directa, aunque los cálculos son más bien lentos. La solución de la ecuación (1) es

$$u = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + R \cos(\omega t - \delta), \tag{8}$$

en donde

$$R = \frac{F_0}{\Delta}, \qquad \cos \delta = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \qquad \operatorname{sen} \delta = \frac{\gamma \omega}{\Delta}, \tag{9}$$

y

$$\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \tag{10}$$

En la ecuación (8), r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación característica asociada con (1); pueden ser reales o complejas conjugadas. En cualquier caso, tanto $\exp(r_1 t)$ como $\exp(r_2 t)$ tienden a cero cuando $t \to \infty$. De dónde, cuando $t \to \infty$,

$$u \to U(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta). \tag{11}$$

Por esta razón a $u_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ se el conoce como **solución transitoria**; $U(t)$, que representa una oscilación estable con la misma frecuencia que la de la fuerza externa, se llama **solución de estado estable** o **respuesta forzada**. La solución transitoria permite satisfacer cualesquiera condiciones iniciales que se imponga al aumentar el tiempo, la energía puesta en el sistema por el desplazamiento y la velocidad iniciales se disipa por medio de la fuerza de amortiguamiento, y entonces el movimiento representa la respuesta del sistema a la fuerza externa. Sin amortiguamiento, el efecto de las condiciones iniciales persistiría durante todo el tiempo.

Resulta interesante investigar de qué manera la amplitud R de la oscilación de estado estable depende de la frecuencia ω de la fuerza externa. Para la excitación de baja frecuencia, es decir, cuando $\omega \to 0$, por las ecuaciones (9) y (10) se concluye que $R \to F_0/k$. En el otro extremo, para la excitación de frecuencia muy alta, (9) y (10) implican que $R \to \infty$. Con un valor intermedio de ω la amplitud tiene un máximo. Para encontrar este punto máximo es posible derivar R con respecto a ω e igualar el resultado a cero. De esta manera se encuentra que la amplitud máxima ocurre cuando

$$\omega^2 = \omega_{\text{máx}}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2km}\right). \tag{12}$$

[11] F. Ehrich y D. Childs, "Self-Excited Vibration in High-Performance Turbomachinery", *Mechanical Engineering* (mayo 1984), p. 66.

Observe que $\omega_{máx} < \omega_0$ y que $\omega_{máx}$ está cercana a ω_0 cuando γ es pequeño. El valor máximo de R se expresa por

$$R = R_{máx} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0\sqrt{1 - (\gamma^2/4mk)}} \cong \frac{F_0}{\gamma\omega_0}\left(1 + \frac{\gamma^2}{8mk}\right), \tag{13}$$

en donde la última expresión es una aproximación para γ pequeño. Si $\gamma^2/2km > 1$, entonces $\omega_{máx}$, según se expresa por la ecuación (12), es imaginaria; en este caso el valor máximo de R ocurre para $\omega = 0$ y R es una función monótona decreciente de ω. Para γ pequeño, por la ecuación (13) se concluye que $R \cong F_0/\gamma\omega_0$. Por tanto, para γpequeño la respuesta máxima es mucho mayor que la amplitud F_0 de la fuerza externa y entre más pequeño sea el valor de γ mayor será la razón R/F_0. En la figura 3.9.3 se muestran algunas gráficas representativas de Rk/F_0 contra ω/ω_0, para varios valores de γ.

El ángulo de fase δ también depende, de una manera interesante, de ω. Para ω cercana a cero, de las ecuaciones (9) y (10) se deduce que cos $\delta \cong 1$ y sen $\delta \cong 0$. Por tanto, $\delta \cong 0$ y la respuesta está casi en fase con la excitación, lo que significa que crecen y decrecen juntas y, en particular, toman sus máximos (así como sus mínimos) respectivos casi juntas. Para $\omega = \omega_0$, se encuentra que cos $\delta = 0$ y sen $\delta = 1$, de modo que $\delta = \pi/2$. En este caso la respuesta va detrás de la excitación en $\pi/2$, es decir, los picos de la respuesta ocurren $\pi/2$ después que los de la excitación y, de manera semejante, para los valles. Por último, para ω muy grande, se tiene cos $\delta \cong -1$ y sen $\delta \cong 0$. Por tanto, $\delta \cong \pi$, de modo que la respuesta está casi fuera de fase con la excitación; esto significa que la respuesta es mínima cuando la excitación es máxima y viceversa.

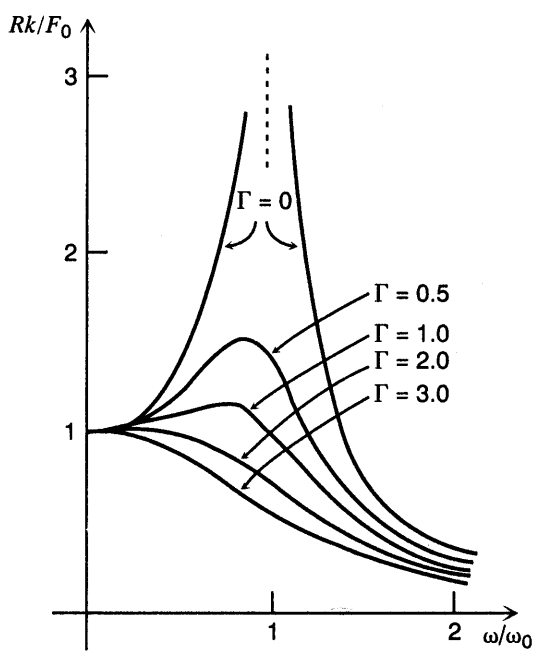


FIGURA 3.9.3 Vibración forzada con amortiguamiento: amplitud de la respuesta de estado estable contra la frecuencia de la fuerza excitadora; $\Gamma = \gamma^2/m^2\omega_0^2$.

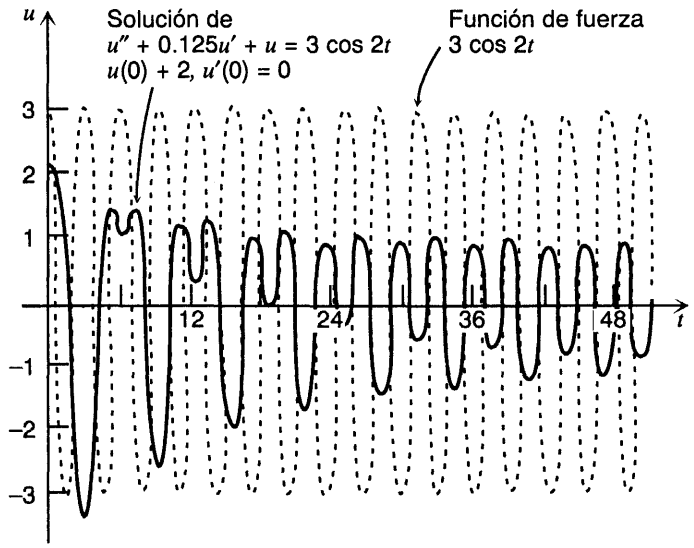


Figura 3.9.4 Una vibración forzada con amortiguamiento; solución de $u'' + 0.125u' + u = 3 \cos 2t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$.

En la figura 3.9.4 se muestra la gráfica de la solución del problema con valor inicial

$$u'' + 0.125u' + u = 3 \cos 2t, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

También se muestra la gráfica de la función de fuerza con fines de comparación. (En la figura 3.8.7 se muestra el movimiento no forzado de este sistema). Observe que el movimiento transitorio inicial decae al crecer t, que la amplitud de la respuesta forzada estable es aproximadamente uno y que la diferencia de fase entre la excitación y la respuesta es aproximadamente π. Con más precisión, se encuentra que $\Delta = \sqrt{145}/4 \cong 3.0104$ de modo que $R = F_0/\Delta \cong 0.9965$. Además, $\cos \delta = -3/\Delta \cong -0.9965$ y $\operatorname{sen} \delta = 1/4\Delta \cong 0.08304$, por lo que $\delta \cong 3.0585$. Por tanto, los valores calculados de R y δ están próximos a los valores estimados a partir de la gráfica.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, escriba la expresión dada como un producto de dos funciones trigonométricas de frecuencias diferentes

1. $\cos 9t - \cos 7t$
2. $\operatorname{sen} 7t - \operatorname{sen} 6t$
3. $\cos \pi t + \cos 2\pi t$
4. $\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 4t$

5. Una masa que pesa 4 lb alarga 1.5 pulg. un resorte. La masa se desplaza 2 pulg. en la dirección positiva y se suelta sin velocidad inicial. Si se supone que no hay amortiguamiento y que sobre la masa actúa una fuerza externa de $2 \cos 3t$ lb, formule el problema con valor inicial que describe el movimiento de la masa.
6. Una masa de 5 kg estira 10 cm un resorte. Sobre la masa actúa una fuerza externa de $10 \operatorname{sen}(t/2)$ N (newton) y se mueve en un medio que le imparte una fuerza viscosa de 2 N,

cuando su velocidad de esa masa es de 4 cm/s. Si la masa se pone en movimiento a partir de su posición de equilibrio con una velocidad inicial que describe el movimiento de esa masa.

7. a) Encuentre la solución del problema 5.
   b) Si la fuerza externa dada se sustituye por una fuerza 4 sen ωt de frecuencia ω, encuentre el valor de ω para el que ocurre la resonancia.
8. a) Encuentre la solución de estado estable del problema 6.
   b) Si la fuerza externa dada se sustituye por una fuerza 2 cos ωt de frecuencia ω, halle el valor de ω para el que la amplitud de la respuesta forzada es máxima.
9. Si un sistema resorte-masa no amortiguado con una masa que pesa 6 lb y una constante de resorte de 1 lb/pulg. se pone repentinamente en movimiento en $t = 0$ por una fuerza externa de 4 cos $7t$ lb, determine la posición de la masa en cualquier instante y trace una gráfica del desplazamiento contra t.
10. Una masa que pesa 8 lb alarga 6 pulg. un resorte. Sobre el sistema actúa una fuerza externa de 8 sen $8t$ lb. Si se tira hacia abajo de la masa 3 pulg. y luego se suelta, determine la posición de la masa en cualquier instante. Determine las primera cuatro veces en las que la velocidad de la masa es cero.
11. Un resorte se alarga 6 pulg. por una masa que pesa 8 lb. La masa está sujeta a un mecanismo de amortiguación viscosa que tiene una constante de amortiguamiento de 0.25 lb-s/pie y sobre ella actúa una fuerza externa de 4 cos $2t$ lb.
    a) Determine la respuesta de estado estable de este sistema.
    b) Si la masa dada se sustituye por una masa m, determine el valor de m para el que la amplitud de la respuesta de estado estable es máxima.
12. Un sistema resorte-masa tiene una constante de resorte de 3 N/m. Al resorte se sujeta una masa de 2 kg y el movimiento se lleva a cabo en un fluido viscoso que ofrece una resistencia numéricamente igual a la magnitud de la velocidad simultánea. Si el sistema es excitado por una fuerza externa de 3 cos $3t - 2$ sen $3t$ N, determine la respuesta de estado estable. Exprese la respuesta en la forma $R\cos(\omega t - \delta)$.
13. Encuentre la solución de la ecuación diferencial $mu'' + ku = F_0 \cos \omega t$, en donde $\omega \neq \sqrt{k/m}$, que satisface cada uno de los siguientes conjuntos de condiciones iniciales.
    a) $u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0$
    b) $u(0) = 0, \quad u'(0) = u_0'$
    c) $u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_0'$
14. a) Encuentre la solución general de
$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \operatorname{sen} \omega t,$$
    en donde $\gamma^2 < 4km$.
    b) Encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$.
    c) Encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales $u(0) = 0$, $u'(0) = u_0'$.
    d) Encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_0'$.
15. Proporcione los detalles al determinar cuándo es máxima la respuesta de estado estable dada por la ecuación (11); es decir, demuestre que $\omega_{\text{máx}}^2$ y $R_{\text{máx}}$ quedan dadas por las ecuaciones (12) y (13), respectivamente.
16. a) Demuestre que la fase de la respuesta forzada de la ecuación (1) satisface $\tan \delta = \gamma\omega/m(\omega_0^2 - \omega^2)$.
    b) Trace la gráfica de la fase δ como una función de la frecuencia ω de la fuerza para la respuesta forzada de $u'' + 0.125u' + u = 3 \cos \omega t$.
17. Encuentre la solución del problema con valor inicial
$$u'' + u = F(t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

en donde

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t \le \pi, \\ F_0(2\pi - t), & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & 2\pi < t. \end{cases}$$

Sugerencia: Trate por separado cada intervalo de tiempo y haga corresponder las soluciones de los diferentes intervalos al exigir que u y u' sean funciones continuas de t.

18. Un circuito en serie tiene un capacitor de 0.25×10^{-6} F, un resistor de $5 \times 10^3 \Omega$ y un inductor de 1 H. La carga inicial en el capacitor es cero. Si se conecta una batería de 12 V al circuito y éste se cierra cuando $t = 0$, determine la carga en el capacitor cuando $t = 0.001$ s, cuando $t = 0.01$ s y en cualquier instante t. Determine también la carga límite cuando $t \to \infty$.

Los problemas 19 a 23 deben resolverse usando *software* de computadora con el que se tracen las gráficas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

19. Considere el sistema forzado pero no amortiguado descrito por el problema con valor inicial

$$u'' + u = 3 \cos \omega t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Trace la gráfica de la solución $u(t)$ contra t para $\omega = 0.7$, $\omega = 0.8$ y $\omega = 0.9$. Describa cómo cambia la respuesta $u(t)$ cuando ω varía en este intervalo. ¿Qué sucede cuando ω toma valores cada vez más próximos a uno? Observe que la frecuencia natural del sistema no forzado es $\omega_0 = 1$.

20. Considere el sistema vibrante descrito por el problema con valor inicial

$$u'' + u = 3 \cos \omega t, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$$

Trace la gráfica de la solución $u(t)$ contra t para $\omega = 0.7$, $\omega = 0.8$ y $\omega = 0.9$. Compare los resultados con los del problema 19; es decir, describa el efecto de las condiciones iniciales diferentes de cero.

Los problemas 21 a 23 tratan del problema con valor inicial

$$u' + 0.125u' + u = F(t), \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

En cada uno de estos problemas, trace la gráfica de la función de fuerza $F(t)$ dada contra t y también la de la solución $u(t)$ contra t en el mismo conjunto de ejes. Use un intervalo t que sea suficientemente largo como para que los transitorios iniciales se eliminen de modo sustancial. Observe la relación entre la amplitud y la fase del término de fuerza y la amplitud y la fase de la respuesta. Observe que $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1$.

21. $F(t) = 3 \cos(0.3t)$ 22. $F(t) = 3 \cos t$ 23. $F(t) = 3 \cos 3t$.

BIBLIOGRAFÍA

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall).

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover).

Existen muchos libros sobre vibraciones mecánicas y circuitos eléctricos. Un libro clásico sobre vibraciones mecánicas es:

Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations* (New York; McGraw-Hill).

Algunos libros más recientes de nivel intermedio son:

Thomson, W. T., *Theory of Vibrations with Applications* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall).

Vierck, R. K., *Vibration Analysis* (2a. ed.) (New York: Harper & Row).

Un libro elemental sobre circuitos eléctricos es:

Bobrow, L. S., *Elementary Linear Circuit Analysis* (2a. ed.) (New York: Holt, Rinehart & Winston).

Capítulo 4 Ecuaciones lineales de orden superior

La estructura teórica y los métodos de resolución desarrollados en el capítulo anterior para las ecuaciones lineales de segundo orden se extienden directamente a las ecuaciones lineales de tercer orden y de orden superior. En este capítulo se repasa con brevedad esta generalización, tomando nota sobretodo de aquellos casos en los que es posible que se presenten nuevos fenómenos, debido a la mayor diversidad de situaciones que pueden ocurrir para las ecuaciones de orden superior.

4.1 Teoría general de las ecuaciones lineales de *n*-ésimo orden

Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden es una ecuación de la forma

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = G(x). \tag{1}$$

Se supone que las funciones $P_0 \ldots, P_n$ y G son funciones continuas con valores reales sobre algún intervalo I: $\alpha < \beta$, y que P_0 es diferente de cero en todo punto de este intervalo. Entonces, al dividir la ecuación (1) entre $P_0(x)$, se obtiene

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x). \tag{2}$$

El operador diferencial lineal L de orden n definido por la ecuación (2) es semejante al operador de segundo orden introducido en el capítulo 3. La teoría matemática asociada con (2) es por completo análoga a la de las ecuaciones lineales de segundo orden; por esta razón, para el programa de n-ésimo orden, simplemente se enuncian los resultados. Las demostraciones de la mayor parte de los resultados también son semejantes a las de las ecuaciones de segundo orden y, en general, se dejan como ejercicios.

Como la ecuación (2) comprende la n-ésima derivada de y con respecto a x, serán necesarias, por así decirlo, n integraciones para resolverla. En cada una de estas integraciones se introduce una constante arbitraria. De donde, es de esperar que para obtener una solución única sea necesario especificar n condiciones iniciales,

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

en donde x_0 puede ser cualquier punto en el intervalo I y $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ es cualquier conjunto de constantes reales prescritas. El siguiente teorema de existencia y unicidad, semejante al teorema 3.2.1, asegura que en realidad existe una solución y que es única.

Teorema 4.1.1 Si las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y g son continuas sobre el intervalo abierto I, entonces existe exactamente una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial (2) que también satisface las condiciones iniciales (3). Esta solución existe en todo el intervalo I.

Aquí no se hará una demostración de este teorema. Sin embargo, si los coeficientes $p_1, \ldots, p_n$ son constantes, entonces se puede construir la solución del problema con valor inicial (2), (3) de forma muy parecida a como se hizo en el capítulo 3; ver las secciones 4.2 a 4.4. Aun cuando en este caso es posible encontrar una solución, no se sabe que es única si no se aplica el teorema 4.1.1. En el libro de Ince (sección 3.32) o en el de Coddington (capítulo 6) se encuentra una demostración del teorema.

La ecuación homogénea. Como en el problema de segundo orden correspondiente, primero se analiza la ecuación homogénea

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{4}$$

si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación (4), entonces por cálculo directo se deduce que la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x), \tag{5}$$

en donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias, también es una solución de la ecuación (4). Entonces, resulta natural preguntarnos si toda solución de (4) puede expresarse como una combinación lineal de $y_1, y_2, \ldots y_n$. Esto será cierto si, sin importar las condiciones iniciales (3) que estén prescritas, si es posible elegir las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de modo que la combinación lineal (5) satisfaga las condiciones iniciales. Específicamente, para cualquier elección del punto x_0 en I y para cualquier elección de $y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-1)}$, debe ser posible determinar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de modo que se satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) &= y_0 \\ c_1y'_1(x_0) + \cdots + c_ny'_n(x_0) &= y'_0 \\ &\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

Las ecuaciones (6) sólo pueden resolverse de manera única para las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ siempre que el determinante de los coeficientes no sea cero. Por otra parte, si el determinante de los coeficientes es cero, siempre es posible elegir valores de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ tales que las ecuaciones (6) no tengan solución. De donde, una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución, para valores arbitrarios de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, es que el wronskiano

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{7}$$

sea diferente de cero en $x = x_0$. Dado que x_0 puede ser cualquier punto en el intervalo I, es necesario y suficiente que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sea diferente de cero en todo punto del intervalo. Del mismo modo que para la ecuación lineal de segundo orden, es posible demostrar que si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación (4), entonces $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es cero para toda x en el intervalo I o nunca es cero allí; ver el problema 22. De donde, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2 Si las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son continuas sobre el intervalo I, si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación (4) y si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ por lo menos en un punto en I, entonces toda solución de (4) puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Un conjunto de soluciones $y_1, \ldots, y_n$ de la ecuación (4) cuyo wronskiano sea diferente de cero se conoce como **conjunto fundamental de soluciones**. La existencia de un conjunto fundamental de soluciones puede demostrarse exactamente de la misma forma que como se hizo para la ecuación lineal de segundo orden (ver el teorema 3.2.5). Dado que todas las soluciones de (4) son de la forma (5), para hacer referencia a una combinación lineal arbitraria de cualquier conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (4) se usa la expresión **solución general.**

El análisis de la dependencia e independencia lineales de la sección 3.3 también puede generalizarse. Se dice que las funciones $f_1, f_2, \ldots f_n$ son **linealmente dependientes** sobre I si existe un conjunto de constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ no todas cero, tales que

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n = 0 \tag{8}$$

para toda x en I. Se dice que las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son **linealmente independientes** sobre I *si* no son linealmente dependientes allí. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de (4), entonces es posible demostrar que una condición necesaria y suficiente para que sean linealmente independientes es que $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ para alguna x_0 en I (ver el problema 23). De donde, un conjunto fundamental de soluciones de (4) es linealmente independiente, y un

conjunto linealmente independiente de n soluciones de (4) forma un conjunto fundamental de soluciones.

La ecuación no homogénea. Considérese ahora la ecuación no homogénea (2),

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = g(x).$$

Si Y_1 y Y_2 son dos soluciones cualesquiera de la ecuación (2), entonces se concluye de inmediato, a partir de la linealidad del operador L, que

$$L[Y_1 - Y_2](x) = L[Y_1](x) - L[Y_2](x) = g(x) - g(x) = 0.$$

De donde, la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación no homogénea (2) es una solución de la ecuación homogénea (4). Dado que cualquier solución de la ecuación homogénea puede expresarse como una combinación lineal de un conjunto fundamental de soluciones $y_1, \ldots, y_n$ se deduce que cualquier solución de la ecuación (2) puede escribirse como

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + Y(x), \tag{9}$$

en donde Y es alguna solución particular de la ecuación no homogénea (2). La combinación lineal (9) se llama solución general de la ecuación no homogénea (2).

Por tanto, el problema primario es determinar un conjunto fundamental de soluciones $y_1, \ldots, y_n$ de la ecuación homogénea (4). Si los coeficientes son constantes, éste es un problema sencillo, que se analiza en la siguiente sección. Si los coeficientes no son constantes, suele ser necesario aplicar métodos numéricos como los del capítulo 8 o métodos de series como los del capítulo 5. Estos tienden a ser más difíciles de manejar a medida que aumenta el orden de la ecuación.

El método de reducción de orden (sección 3.5) también es aplicable a las ecuaciones lineales de n-ésimo orden. Si y_1 es una solución de la ecuación (4), entonces la sustitución $y = v(x)y_1(x)$ da una ecuación diferencial lineal de orden $n - 1$ para v' (ver el problema 24 para el caso en el que $n = 3$). Sin embargo, si $n \geq 3$, entonces la ecuación reducida es por lo menos de segundo orden, y sólo rara vez será notablemente más sencilla que la ecuación original. Por tanto, en la práctica, la reducción de orden rara vez es útil para las ecuaciones de orden superior al segundo.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, determine los intervalos en los que se tenga la seguridad de que existen soluciones.

1. $y^{iv} + 4y''' + 3y = x$
2. $xy''' + (\operatorname{sen} x)y'' + 3y = \cos x$
3. $x(x-1)y^{iv} + e^xy'' + 4x^2y = 0$
4. $y''' + xy'' + x^2y' + x^3y = \ln x$
5. $(x-1)y^{iv} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0$
6. $(x^2-4)y^{vi} + x^2y''' + 9y = 0$

En cada uno de los problemas 7 a 12 elimine las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ entre las expresiones para y sus derivadas $y', \ldots, y^{(n-1)}$. Con ello, determine la ecuación diferencial que satisface la función dada.

7. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \operatorname{sen} x$
8. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$
9. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$
10. $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$
11. $y = x + c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$
12. $y = c_1 + c_2x + c_3 \operatorname{senh} x + c_4 \cosh x$

En cada uno de los problemas 13 a 18, compruebe que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial y determine su wronskiano.

13. $y''' + y' = 0$; $1, \cos x, \operatorname{sen} x$
14. $y^{iv} + y'' = 0$; $1, x, \cos x, \operatorname{sen} x$
15. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$; e^x, e^{-x}, e^{-2x}
16. $y^{iv} + 2y''' + y'' = 0$; $1, x, e^{-x}, xe^{-x}$
17. $xy''' - y'' = 0$; $1, x, x^3$
18. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $x, x^2, 1/x$
19. Demuestre que $W(5, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x) = 0$ para toda x. ¿Es posible establecer este resultado sin necesidad de evaluar directamente el wronskiano?
20. Compruebe que el operador diferencial definido por

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y$$

es un operador diferencial lineal. Es decir, demuestre que

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2],$$

en donde y_1 y y_2 son funciones diferenciables n veces y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. De donde, demuestre que si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de $L[y] = 0$, entonces la combinación lineal $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ también es una solución de $L[y] = 0$.

21. Sea el operador diferencial lineal L definido por

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny,$$

en donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales.
a) Halle $L[x^n]$. b) Halle $L[e^{rx}]$.
c) Determine cuatro soluciones de la ecuación $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$. ¿Se puede considerar que las cuatro soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones? ¿Por qué?

22. En este problema se muestra de qué manera generalizar el teorema 3.3.2 (teorema de Abel) hacia las ecuaciones de orden superior. En primer lugar se describe el procedimiento para la ecuación de tercer orden

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0.$$

Sean y_1, y_2 y y_3 soluciones de esta ecuación sobre un intervalo I.
a) Si $W = W(y_1, y_2, y_3)$, demostrar que

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}.$$

Sugerencia: la derivada de una determinante de 3×3 es la suma de tres determinantes de 3×3 obtenidos al derivar los renglones primero, segundo y tercero, respectivamente.
b) Sustituya y_1''', y_2''' y y_3''' por su expresión obtenida de la ecuación diferencial; multiplicar el primer renglón por p_3 el segundo por p_2 y sumarlos al último renglón para obtener.

$$W' = -p_1(x)W.$$

c) Demuestre que

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = c \exp\left[-\int p_1(x)\,dx\right].$$

Se concluye que W es siempre cero o siempre diferente de cero sobre I.

d) Generalice este argumento hacia la ecuación de n-ésimo orden.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

con soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Es decir, demuestre que

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = c \exp\left[-\int p_1(x)\,dx\right].$$

23. La finalidad de este problema es demostrar que si $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ para alguna x_0 en un intervalo I, entonces $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes sobre I y que si son linealmente independientes y soluciones de

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{i}$$

sobre I, entonces $W(y_1, \ldots, y_n)$ es diferente de cero en todo punto de I.

a) Suponga que $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ y que

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0 \tag{ii}$$

para toda x en I. Al escribir las ecuaciones correspondientes a las $n-1$ primeras derivadas de (ii) en x_0, demuestre que $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Por lo tanto, $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

b) Suponga que $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (i). Si $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 0$ para alguna x_0, demuestre que existe una solución diferente de cero de (i) que satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Dado que $y = 0$ es una solución de este problema con valor inicial, la parte de unicidad del teorema 4.1.1 da lugar a una contradicción. Por tanto, W nunca es cero.

24. Demuestre que si y_1 es una solución de

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0,$$

entonces la sustitución de $y = y_1(x)v(x)$ produce la siguiente ecuación de segundo orden para v':

$$y_1v''' + (3y_1' + p_1y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1y_1' + p_2y_1)v' = 0.$$

En los problemas 25 y 26 aplique el método de reducción de orden (problema 24) para resolver la ecuación diferencial dada.

25. $(2 - x)y''' + (2x - 3)y'' - xy' + y = 0, \quad x < 2; \quad y_1(x) = e^x$
26. $x^2(x + 3)y''' - 3x(x + 2)y'' + 6(1 + x)y' - 6y = 0; \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^3$

4.2 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Considérese la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales. Con base en lo que se sabe de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es natural anticipar que $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación (1) para valores adecuados de r. En efecto,

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) \\ &= e^{rx} Z(r) \end{aligned} \tag{2}$$

para toda r. Para aquellos valores de r para los que $Z(r) = 0$, se concluye que $L[e^{rx}] = 0$ y que $y = e^{rx}$ es una solución de (1). El polinomio $Z(r)$ se llama **polinomio característico** y la ecuación $Z(r) = 0$ es la **ecuación característica** de la ecuación diferencial (1). Un polinomio de grado n tiene n ceros, digamos $r_1, r_2, \ldots, r_n$; de donde, es posible escribir el polinomio característico en la forma

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n). \tag{3}$$

Raíces reales y distintas. Si las raíces de la ecuación característica son reales y ninguna de ellas es igual, entonces se tienen n soluciones distintas $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$ de la ecuación (1). Para demostrar en este caso que la solución general de (1) es de la forma

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}, \tag{4}$$

es necesario demostrar que las funciones $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ son linealmente independientes sobre el intervalo $-\infty < x < \infty$. Una manera de lograrlo es demostrar que su wronskiano es diferente de cero. Sin embargo, no siempre es fácil evaluar un determinante de $n \times n$, de modo que se aplicará un argumento diferente. Supóngase que $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ son linealmente dependientes y demuéstrese que esto produce una contradicción. Entonces existen las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas cero, tales que $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} = 0$ para cada x en $x - \infty < x < \infty$. Si se multiplica por $e^{-r_1 x}$ da $c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots + c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$ y, si se deriva, se obtiene

$$(r_2 - r_1)c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + (r_3 - r_1)c_3 e^{(r_3 - r_1)x} + \cdots + (r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$$

para $-\infty < x < \infty$. Si se multiplica este último resultado por $e^{-(r_2 - r_1)x}$ y luego se deriva, da

$$(r_3 - r_2)(r_3 - r_1)c_3 e^{(r_3 - r_2)x} + \cdots + (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_2)x} = 0$$

para $-\infty < x < \infty$. Si se continúa de esta manera, finalmente se obtiene

$$(r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2}) \cdots (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_{n-1})x} = 0 \tag{5}$$

para $-\infty < x < \infty$. Dado que la función exponencial no se anula y las r_1 son distintas, se tiene $c_n = 0$. Por tanto, $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-1} x} = 0$ para cada x en $-\infty < x < \infty$. Al repetir el razonamiento que acaba de darse, se obtiene $c_{n-1} = 0$. De manera semejante,

$c_{n-2}, \ldots, c_1 = 0$, y esto es una contradicción de la suposición de que $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ son linealmente dependientes.

Raíces complejas. Si las raíces de la ecuación característica son complejas, deben ocurrir en pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$, ya que los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ son números reales. Siempre que ninguna de las raíces esté repetida, la solución general de la ecuación (1) sigue siendo de la forma[1] (4). Sin embargo, así como para la ecuación de segundo orden (sección 3.4), es posible sustituir las soluciones de valores complejos $e^{(\lambda+i\mu)x}$ y $e^{(\lambda-i\mu)x}$ por las soluciones de valores reales

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \qquad e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \tag{6}$$

obtenidas como las partes real e imaginaria de $e^{(\lambda+i\mu)x}$. Por tanto, aunque algunas de las raíces de la ecuación característica sean complejas, sigue siendo posible expresar la solución general de (1) como una combinación lineal de soluciones de valores reales.

Ejemplo 1 Encontrar la solución general de

$$y^{iv} - y = 0. \tag{7}$$

Si se sustituye y por e^{rx}, se encuentra que la ecuación característica es

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Las raíces son $r = 1, -1, i, -i$; de donde, la solución general de la ecuación (7) es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.$$

Raíces repetidas. Si las raíces de la ecuación característica no son distintas, es decir, si algunas de las raíces están repetidas, entonces resulta evidente que la solución (4) no es la solución general de la ecuación (1). Si se recuerda que r_1 es una raíz repetida para la ecuación lineal de segundo orden $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, entonces las dos soluciones linealmente independientes son $e^{r_1 x}$ y $xe^{r_1 x}$, parece razonable esperar que si una raíz de $Z(r) = 0$, por ejemplo $r = r_1$, tiene multiplicidad s (en donde $s \leq n$), entonces

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{s-1} e^{r_1 x} \tag{8}$$

son soluciones de (1). Para probar esto, obsérvese que si r_1 es cero de multiplicidad s de $Z(r)$, entonces la ecuación (2) puede escribirse como

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx} a_0 (r - r_1)^s (r - r_{s+1}) \cdots (r - r_n) \\ &= e^{rx} (r - r_1)^s H(r) \end{aligned} \tag{9}$$

[1] La independencia lineal de las soluciones $e^{r_1 x}, \ldots e^{r_n x}$, en el caso de que algunas de las r sean números complejos, se deduce por una generalización del argumento que acaba de darse por el caso de las r reales.

para todos los valores de r, en donde $H(r_1) \neq 0$. A continuación se aplican los hechos de que $\partial e^{rx}/\partial r = xe^{rx}$ y que es posible intercambiar la derivación parcial de e^{rx} con respecto a x y con respecto a r. Entonces, al derivar la ecuación (9) con respecto a r se obtiene

$$L[xe^{rx}] = e^{rx}[x(r - r_1)^s H(r) + s(r - r_1)^{s-1} H(r) + (r - r_1)^s H'(r)]. \tag{10}$$

Como $s \geq 2$, el segundo miembro de la ecuación (10) es cero para $r = r_1$ y, de donde $xe^{r_1 x}$ también es una solución de (1). Si $s \geq 3$, al derivar una vez más la ecuación (10) con respecto a r y hacer r igual a r_1 se demuestra que $x^2 e^{r_1 x}$ también es una solución de (1). Este proceso puede continuar a lo largo de $s - 1$ derivaciones, lo que da el resultado deseado. Nótese que la s-ésima derivada del segundo miembro de (9) no es cero para $r = r_1$, ya que la s-ésima derivada de $(r - r_1)^s$ es constante y $H(r_1) \neq 0$. Es razonable esperar que $e^{r_1 x}$, $xe^{r_1 x}, \ldots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ sean lineamientos independientes, y se acepta este hecho sin demostración.

Por último, si una raíz compleja $\lambda + i\mu$ está repetida s veces, también el complejo conjugado $\lambda - i\mu$ está repetido s veces. De manera correspondiente a esta $2s$ soluciones de valor complejo es posible encontrar $2s$ soluciones de valores reales si se observa que las partes real e imaginaria de $e^{(\lambda + i\mu)x}, xe^{(\lambda + i\mu)x}, \ldots, x^{s-1} e^{(\lambda + i\mu)x}$ también son soluciones linealmente independientes:

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x, \quad xe^{\lambda x} \cos \mu x, \quad xe^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x,$$
$$\ldots, x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad x^{s-1} e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x.$$

De donde, la solución general de la ecuación (1) siempre se puede expresar como una combinación lineal de n soluciones de valores reales. Considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Encontrar la solución general de

$$y^{iv} + 2y'' + y = 0. \tag{11}$$

La ecuación característica es

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Las raíces son $r = i, i, -i, -i$ y la solución general de (11) es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x.$$

Al determinar las raíces de la ecuación característica a menudo es necesario calcular las raíces cúbicas, cuartas o incluso de orden superior de un número (posiblemente complejo). Esto suele hacerse de manera más conveniente si se aplica la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, así como las leyes algebraicas dadas en la sección 3.4. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo y también se analiza en los problemas 1 y 2.

Ejemplo 3 Encontrar la solución general de

$$y^{iv} + y = 0. \tag{12}$$

La ecuación característica es

$$r^4 + 1 = 0.$$

En este caso no es tan fácil factorizar el polinomio. Es necesario calcular las raíces cuartas de -1. Ahora bien, -1, concebido como un número complejo, es $-1 + 0i$; su magnitud es 1 y su ángulo polar es π. Entonces,

$$-1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = e^{i\pi}.$$

Es más, el ángulo está determinado sólo hasta un múltiplo de 2π; por tanto,

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i\operatorname{sen}(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

en donde m es cero o cualquier entero positivo o negativo; por tanto,

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4 + m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

Las cuatro raíces de -1 se obtienen al hacer $m = 0, 1, 2$ y 3; éstas son

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Es fácil comprobar que para cualquier otro valor de m se obtiene una de estas cuatro raíces. Por ejemplo, correspondiendo a $m = 4$ se obtiene $(1 + i)/\sqrt{2}$. La solución general de la ecuación (12) es

$$y = e^{x/\sqrt{2}}\left(c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(c_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

En conclusión, conviene mencionar que el problema de determinar las raíces de $Z(r) = 0$ para $n \geq 2$ puede ser difícil, si no es posible hallarlas por inspección o mediante un simple proceso por tanteos. Un resultado que puede ayudar en la búsqueda de raíces racionales es el siguiente. Supóngase que la ecuación característica $Z(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$ tiene coeficientes enteros. Entonces, si $r = p/q$ es una raíz racional, en donde p/q está en su mínima expresión, q debe ser un factor de a_0 y p debe ser un factor de a_n. Por ejemplo, considérese la ecuación polinomial cúbica

$$r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0.$$

Los factores de $a_0 = 1$ son ± 1 y los de $a_3 = -2$ son ± 1 y ± 2. Por tanto, las únicas raíces racionales posibles son ± 1 y ± 2. No es difícil confirmar, por cálculo directo, que $r = 2$ es la única raíz racional. Una vez que se ha encontrado la raíz $r = 2$, es posible extraer el factor $(r - 2)$, para obtener el producto $(r - 2)(r^2 + 1)$. De modo que las raíces de la ecuación polinomial son 2, i y $-i$. Nótese que si $a_0 = 1$ entonces, en la búsqueda de las raíces racionales, basta considerar los factores de a_n.

Aunque existen fórmulas semejantes a la fórmula cuadrática para las raíces de ecuaciones polinomiales cúbicas y cuadráticas, no existe fórmula correspondiente[2] para $n > 4$. Para raíces irracionales, incluso para ecuaciones polinomiales de tercero y cuarto grados, suele ser más eficiente aplicar métodos numéricos en lugar de la fórmula exacta para determinar las raíces.

Se consiguen con facilidad rutinas exactas para computadora con las cuales se hacen los cálculos. Sin embargo, incluso con éstas, puede haber problemas ocasionales; por ejemplo, puede ser difícil discernir si dos raíces son iguales, o simplemente están muy próximas entre sí. Recuérdese que en estos dos casos la forma de la solución general es diferente.

Si las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de la ecuación (1) son números complejos, la solución de ésta sigue siendo de la forma (4). Sin embargo, en este caso las raíces de la ecuación característica son, en general, números complejos, y ya no se cumple que el complejo conjugado de una raíz también es una raíz. Las soluciones correspondientes son de valores complejos.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, exprese el número complejo dado en la forma

$$R(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = Re^{i\theta}.$$

Observe que $e^{i(\theta + 2m\pi)} = e^{i\theta}$ si m es un entero.

1. $1 + i$
2. $-1 + \sqrt{3}i$
3. -3
4. $-i$
5. $\sqrt{3} - i$
6. $-1 - i$

Observe que $e^{i(\theta + 2m\pi)} = e^{i\theta}$ si m es un entero y que

$$[e^{i(\theta + 2m\pi)}]^{1/n} = e^{i[(\theta + 2m\pi)/n]} = \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right).$$

En cada uno de los problemas 7 a 10 aplique estos hechos para determinar la raíz indicada del número complejo dado.

7. $1^{1/3}$
8. $(1 - i)^{1/2}$
9. $1^{1/4}$
10. $[2(\cos\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/3)]^{1/2}$

En cada uno de los problemas 11 a 22, determine la solución de la ecuación diferencial dada.

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$
12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
13. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
14. $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0$
15. $y^{vi} + y = 0$
16. $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$
17. $y^{vi} - 3y^{iv} + 3y'' - y = 0$
18. $y^{vi} - y'' = 0$
19. $y^{v} - 3y^{iv} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$
20. $y^{iv} - 8y' = 0$
21. $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$
22. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

[2] La fórmula para resolver la ecuación cúbica suele atribuirse a Cardano (1501-1576) y la de la ecuación cuártica a su alumno Ferrari (1522-1565). El hecho de que es imposible expresar las raíces de una ecuación algebraica general de grado superior al cuatro mediante una fórmula que sólo comprende operaciones racionales (adición, multiplicación, etc.) y extracciones de raíces fue establecido por Abel y Galois (1811-1832). En el libro de Uspensky puede encontrarse un análisis de los métodos para resolver ecuaciones algebraicas.

En cada uno de los problemas 23 a 26, halle la solución del problema con valor inicial dado.

23. $y''' + y' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$
24. $y^{iv} - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0$
25. $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0; \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 0, \quad y'''(1) = 0$
26. $y''' - y'' + y' - y = 0; \quad y(\pi/2) = 2, \quad y'(\pi/2) = 1, \quad y''(\pi/2) = 0$
27. Demuestre que la solución general de $y^{iv} - y = 0$ se puede escribir como

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cosh x + c_4 \operatorname{senh} x.$$

Determine la solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 1$. ¿Por qué es conveniente usar las soluciones cosh x y senh x en vez de e^x y e^{-x}?

28. Considere el sistema resorte-masa que se muestra en la figura 4.2.1 y que consta de dos masas unitarias suspendidas de resortes con constantes de resorte 3 y 2, respectivamente. Suponga que en el sistema no hay amortiguamiento.

a) Demuestre que los desplazamientos u_1 y u_2 de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrios respectivas satisfacen las ecuaciones

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2, \qquad u_2'' + 2u_2 = 2u_1. \tag{i}$$

b) Resuelva la primera de las ecuaciones (i) para u_2 y sustituya en la segunda ecuación, para obtener de esta manera la siguiente ecuación de cuarto orden para u_1:

$$u_1^{iv} + 7u_1'' + 6u_1 = 0. \tag{ii}$$

Encuentre la solución general de la ecuación (ii).

c) Suponga que las condiciones iniciales son

$$u_1(0) = 1, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2(0) = 2, \qquad u_2'(0) = 0. \tag{iii}$$

Use la primera de las ecuaciones (i) y las condiciones iniciales (iii) para obtener valores de $u_1''(0)$ y $u_1'''(0)$. Demuestre entonces que la solución de la ecuación (ii) que satisface las cuatro condiciones iniciales sobre u_1 es $u_1(t) = \cos t$. Demuestre que la solución correspondiente u_2 es $u_2(t)$ 0 2 cos t.

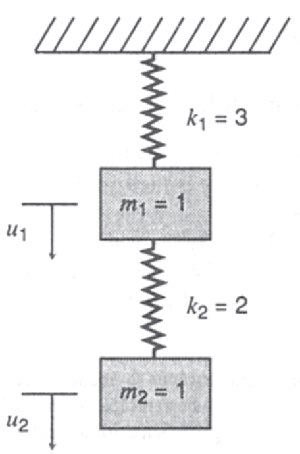


FIGURA 4.2.1. Sistema resorte-masa con dos grados de libertad.

d) Suponga ahora que las condiciones iniciales son

$$u_1(0) = -2, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2(0) = 1, \qquad u_2'(0) = 0. \tag{iv}$$

Proceda como en el inciso c) para demostrar que las soluciones correspondientes son $u_2(t) = -2\cos\sqrt{6}t$, $u_2(t) = \cos\sqrt{6}t$.

e) Observe que las soluciones obtenidas en los incisos c) y d) describen dos modos distintos de vibración. En el primero, la frecuencia del movimiento es 1 y las dos masas se mueven en fase, juntas hacia arriba o hacia abajo. La frecuencia del segundo movimiento es $\sqrt{6}$ y las masas se mueven fuera de fase entre sí; moviéndose una hacia abajo mientras la otra lo hace hacia arriba y viceversa. Para otras condiciones iniciales, el movimiento de las masas es una combinación de estos dos modos.

Criterio de estabilidad de Hurwitz. En aplicaciones de ingeniería a menudo es importante determinar si todas las soluciones de una ecuación lineal homogénea tienden a cero cuando x tiende al infinito. En caso afirmativo, se dice que la ecuación es **asintóticamente estable**. Esto significa que, independientemente de las condiciones iniciales, la respuesta y del sistema decae hacia cero a medida que la variable independiente x crece. La ecuación general de n-ésimo orden

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{i}$$

en donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son reales, es asintóticamente estable si todas las raíces de la ecuación característica son reales y negativas, o son complejas con partes negativas. Una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra fue proporcionada por Hurwitz (1859-1919). Para $n = 4$, el criterio de estabilidad de Hurwitz puede expresarse como sigue: la ecuación (i) es asintóticamente estable si y sólo si $a_0 > 0$ y si cada una de las cantidades

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

es positiva. Para $n = 3$ la condición se aplica a las tres primeras expresiones con $a_4 = 0$, y para $n = 2$ se aplica a las dos primeras expresiones con $a_3 = 0$. Nótese que para una ecuación de segundo orden $ay'' + by' + cy = 0$ el criterio de Hurwitz requiere, para que haya estabilidad, que cada una de a, b, y c sea positiva, resultando que ya se obtuvo antes; ver la sección 3.8 y el problema 33 de la sección 3.5. En la obra de Guillemin (capítulo 6, artículo 26) puede encontrarse un análisis completo del criterio de estabilidad de Hurwitz. En cada uno de las problemas 29 a 34, determine si la ecuación dada es asintóticamente estable; compruebe el resultado, de ser posible, al encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación.

29. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
30. $y''' - y = 0$
31. $y''' + y'' - y' + y = 0$
32. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$
33. $y''' + 0.1y'' + 1.2y' - 0.4y = 0$
34. $y''' + 3.2y'' + 2.41y' + 0.21y = 0$

4.3 Método de los coeficientes indeterminados

Puede obtenerse una solución particular Y de la ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \tag{1}$$

por el método de los coeficientes indeterminados, siempre que $g(x)$ tenga una forma adecuada. Aunque el método de los coeficientes indeterminados no es tan general como el de variación de parámetros que se describe en la siguiente sección, suele ser mucho más fácil cuando puede aplicarse.

Como para la ecuación lineal de segundo orden, si se aplica el operador diferencial lineal con coeficientes constantes L a un polinomio $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m$, una función exponencial $e^{\alpha x}$, una función senoidal sen βx o una función cosenoidal cos βx, el resultado es un polinomio, una función exponencial o una combinación lineal de funciones seno y coseno, respectivamente. De donde, si $g(x)$ es una suma de polinomios, exponenciales, senos y cosenos, o incluso productos de esas funciones, se puede esperar que sea posible encontrar $Y(x)$ el elegir una combinación apropiada de polinomios, exponenciales, etcétera, con varias constantes indeterminadas. Entonces se determinan las constantes de modo que se satisfaga la ecuación (1).

En primer lugar considérese el caso en el que $g(x)$ es un polinomio de grado m

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m, \tag{2}$$

en donde $b_0, b_1, \ldots, b_m$ son constantes dadas. Es natural buscar una solución particular de la forma

$$Y(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m. \tag{3}$$

Si se sustituye y de la ecuación (1) por esta expresión y se igualan los coeficientes de las potencias iguales de x, se encuentra, a partir de los términos en x^m que $a_n A_0 = b_0$. En el supuesto de que $a_n \neq 0$, se tiene $A_0 = b_0/a_n$. Las constantes $A_1, \ldots, A_m$ se determinan a partir de los coeficientes de los términos en $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^0$.

Si $a_n = 0$; es decir, si una solución de la ecuación homogénea es una constante, entonces no es posible despejar A_0; en este caso es necesario suponer para $Y(x)$ un polinomio de grado $m + 1$ a fin de obtener un término en $L[Y]$ (x) que se escribe con $b_0 x^m$. Sin embargo, no es necesario llevar la constante en la forma supuesta para $Y(x)$. En términos más generales, es fácil verificar que si cero es una raíz con multiplicidad s del polinomio característico, en cuyo caso $1, x, x^2, \ldots, x^{s-1}$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces una forma adecuada para $Y(x)$ es

$$Y(x) = x^s(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m). \tag{4}$$

Como segundo problema, supóngase que $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m). \tag{5}$$

Entonces se esperaría que $Y(x)$ fuera de la forma

$$Y(x) = e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m), \tag{6}$$

Siempre que $e^{\alpha x}$ no sea una solución de la ecuación homogénea. Si α es una raíz con multiplicidad s de la ecuación característica, en forma apropiada para $Y(x)$ es

$$Y(x) = x^s e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m). \tag{7}$$

Estos resultados pueden probarse, como para la ecuación lineal no homogénea de segundo orden, al reducir este problema al anterior mediante la sustitución $y = e^{\alpha x}u(x)$. La función u satisfará una ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes; en donde el término no homogéneo es precisamente el polinomio (2) (ver el problema 18).

De manera semejante, si $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m)\begin{cases}\operatorname{sen}\beta x,\\ \cos\beta x,\end{cases} \tag{8}$$

entonces una forma adecuada para $Y(x)$, siempre que $\alpha + i\beta$ no sea una raíz de la ecuación característica, es

$$\begin{aligned} Y(x) = {} & e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m)\cos\beta x \\ & + e^{\alpha x}(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_m)\operatorname{sen}\beta x. \end{aligned} \tag{9}$$

Si $\alpha + i\beta$ es una raíz con multiplicidad s de la ecuación característica, entonces es necesario multiplicar el segundo miembro de (9) por x^s.

Estos resultados se resumen en la tabla 4.3.1.

Si $g(x)$ es una suma de términos de la forma (2), (5) y (8), suele ser más fácil en la práctica calcular por separado la solución particular correspondiente a cada término de $g(x)$. Con base en el principio de superposición (dado que la ecuación diferencial es lineal), la solución particular de todo el problema es la suma de las soluciones particulares de los problemas individuales. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

TABLA 4.3.1. SOLUCIÓN PARTICULAR DE

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = g(x)$$

$g(x)$	$Y(x)$
$P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$	$x^s(A_0x^m + \cdots + A_m)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^m + \cdots + A_m)e^{\alpha x}$
$P_m(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\operatorname{sen}\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^s[(A_0x^m + \cdots + A_m)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(B_0x^m + \cdots + B_m)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x]$

Notas. Aquí s es el menor entero no negativo para el que todo término de $Y(x)$ es diferente de todo término de la función complementaria $y_c(x)$. De manera equivalente, para los tres casos, s es el número de veces en que 0 es una raíz de la ecuación característica, α es una raíz de la ecuación característica y $\alpha + i\beta$ es una raíz de la ecuación característica, respectivamente.

Ejemplo 1 Hallar una solución particular de

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}. \tag{10}$$

En primer lugar se resuelve la ecuación homogénea. La ecuación característica es $r^3 - 4r = 0$ y las raíces son 0, ± 2; de donde,

$$y_c(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}.$$

Si se aplica el principio de superposición, puede escribirse una solución particular de la (10) como la suma de soluciones particulares correspondientes a las ecuaciones diferenciales

$$y''' - 4y' = x, \qquad y''' - 4y' = 3\cos x, \qquad y''' - 4y' = e^{-2x}.$$

La elección inicial para una solución particular $Y_1(x)$ de la primera ecuación es $A_0x + A_1$, pero como una constante es solución de la ecuación homogénea, se multiplica por x; por tanto,

$$Y_1(x) = x(A_0x + A_1).$$

Para la segunda ecuación se elige

$$Y_2(x) = B\cos x + C\,\text{sen}\,x,$$

y no es necesario modificar esta elección inicial, ya que cos x y sen x no son soluciones de la ecuación homogénea. Por último, para la tercera ecuación, en virtud de que e^{-2x} es una solución de la ecuación homogénea, se supone que

$$Y_3(x) = Exe^{-2x}.$$

Las constantes se determinan al sustituir en las ecuaciones diferenciales por separado; resultan ser $A_0 = \frac{1}{8}, A_1 = 0, B = 0, C = -\frac{3}{5}$ y $E = \frac{1}{8}$. De donde, una solución particular de la ecuación (10) es

$$Y(x) = -\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,x + \tfrac{1}{8}xe^{-2x}.$$

El método de los coeficientes indeterminados puede aplicarse siempre que sea posible intuir la forma correcta para $Y(x)$. Sin embargo, por lo común es posible para ecuaciones diferenciales que no tengan coeficientes constantes o para términos no homogéneos que no sean del tipo antes descrito. Para problemas más complicados es posible aplicar el método de variación de parámetros, que se analiza en la siguiente sección.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 11, determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Aquellos casos en que se especifica, encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales dadas.

1. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$
2. $y^{iv} - y = 3x + \cos x$
3. $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x$
4. $y''' - y' = 2\,\text{sen}\,x$
5. $y^{iv} - 4y'' = x^2 + e^x$
6. $y^{iv} + 2y'' + y = 3 + \cos 2x$
7. $y^{vi} + y''' = x$
8. $y^{iv} + y''' = \text{sen}\,2x$
9. $y''' + 4y' = x, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$
10. $y^{iv} + 2y'' + y = 3x + 4, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1$
11. $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}, \quad y''(0) = -\frac{3}{2}$

En cada uno de los problemas 12 a 17, determine una forma adecuada para $Y(x)$, si ha de aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. No evalúe las constantes.

12. $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$
13. $y''' - y' = xe^{-x} + 2\cos x$
14. $y^{iv} - 2y'' + y = e^x + \operatorname{sen} x$
15. $y^{iv} + 4y'' = \operatorname{sen} 2x + xe^x + 4$
16. $y^{iv} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x \operatorname{sen} x$
17. $y^{iv} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x}\operatorname{sen} x$

18. Considere la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g(x),$$

en donde $a_0, \ldots, a_n$ son constantes. Compruebe que si $g(x)$ es de la forma

$$e^{\alpha x}(b_0 x^m + \cdots + b_m),$$

entonces la sustitución $y = e^{\alpha x}u(x)$ reduce la ecuación precedente a la forma

$$t_0 u^{(n)} + t_1 u^{(n-1)} + \cdots + t_n u = b_0 x^m + \cdots + b_m,$$

en donde $t_0, \ldots, t_n$ son constantes. Determine t_0 y t_n en términos de las a y de α. Por tanto, el problema de determinar una solución particular de la ecuación original se reduce al problema más sencillo de determinar una solución particular de una ecuación con coeficientes constantes y un polinomio para el término no homogéneo.

Método de los aniquiladores. En los problemas 19 a 21 se considera otra manera de llegar a la forma apropiada de $Y(x)$ para aplicarla en el método de los coeficientes indeterminados. El procedimiento se basa en la observación de que los términos exponenciales, polinomiales o sinusoidales (o sumas y productos de estos términos) pueden considerarse como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes. Es conveniente usar el símbolo D para representar d/dx. Entonces, por ejemplo, e^{-x} es una solución de $(D + 1)y = 0$; se dice que el operador diferencial $D + 1$ *aniquila*, o que es un *aniquilador* de e^{-x}. De manera semejante, $D + 4$ es un aniquilador de sen $2x$ o cos $2x$, $(D - 3)^2 = D^2 - 6D + 9$ es un aniquilador de e^{3x}, de xe^{3x}, etcétera.

19. Demuestre que los operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes obedecen la ley conmutativa, es decir,

$$(D - a)(D - b)f = (D - b)(D - a)f$$

para cualquier función f dos veces diferenciable y cualesquiera constantes a y b. El resultado se extiende de inmediato a cualquier número finito de factores.

20. Considere el problema de encontrar la forma de la solución particular $Y(x)$ de

$$(D - 2)^3(D + 1)Y = 3e^{2x} - xe^{-x}, \tag{i}$$

en donde el primer miembro de la ecuación está escrito en una forma correspondiente a la factorización del polinomio característico.

a) Demuestre que $D - 2$ y $(D + 1)^2$, respectivamente, son aniquiladores de los términos del segundo miembro de la ecuación (i) y que el operador combinado $(D - 2)(D + 1)^2$ aniquila simultáneamente los dos términos del segundo miembro de (i).

b) Aplique el operador $(D - 2)(D - 1)^2$ a la ecuación (i) y use el resultado del problema 19 para obtener

$$(D-2)^4(D+1)^3Y=0. \tag{ii}$$

Por tanto, Y es una solución de la ecuación homogénea (ii). Al resolver la ecuación (ii), demuestre que

$$Y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}+c_4x^3e^{2x} + c_5e^{-x}+c_6xe^{-x}+c_7x^2e^{-x}, \tag{iii}$$

en donde $c_1, \ldots, c_7$ son constantes, por el momento no determinadas.

c) Observe que e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x} y e^{-x} son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (i); de donde, estos términos no son útiles para resolver la ecuación no homogénea. Por lo tanto, elegir c_1, c_2, c_3 y c_5 como cero en la ecuación (iii), de modo que

$$Y(x)=c_4x^3e^{2x}+c_6xe^{-x}+c_7x^2e^{-x}. \tag{iv}$$

Esta es la forma de la solución particular Y de la (i). Se pueden hallar los valores de los coeficientes c_4, c_6 y c_7 al sustituir (iv) en la ecuación diferencial (i).

Resumen. Suponga que

$$L(D)y=g(x), \tag{v}$$

en donde $L(D)$ es un operador lineal con coeficientes constantes y $g(x)$ es una suma o producto de términos exponenciales, polinomiales o sinusoidales. Para hallar la forma de la solución particular de la ecuación (v), es posible proceder como se indica a continuación:

a) Encontrar un operador diferencial $H(D)$ con coeficientes constantes que aniquile a $g(x)$; es decir, un operador tal que $H(D)g(x)=0$.

b) Aplicar $H(D)$ a (v) para obtener

$$H(D)L(D)y=0, \tag{vi}$$

que es una ecuación homogénea de orden superior.

c) Resolver la ecuación (vi).

d) Eliminar de la solución hallada en el paso c) los términos que también aparecen en la solución de $L(D)y=0$. Los demás términos constituyen la forma correcta de la solución particular de la ecuación (v).

21. Aplique el método de los aniquiladores para encontrar la forma de la solución particular $Y(x)$ para cada una de las ecuaciones de los problemas 12 a 17. No evalúe los coeficientes.

4.4 Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=g(x) \tag{1}$$

es una extensión directa de la teoría para la ecuación diferencial de segundo orden (ver la sección 3.7). Como antes, para aplicar el método de variación de parámetros primero es necesario resolver la ecuación diferencial homogénea correspondiente. En general, esto puede ser difícil, a menos de que los coeficientes sean constantes. Sin embargo, el método de variación de parámetros es todavía más general que el de los coeficientes indeterminados en el sentido siguiente. El método de los coeficientes indeterminados suele ser aplicable sólo a las ecuaciones con coeficientes constantes y una clase limitada de funciones g; para las ecuaciones con coeficientes constantes es posible resolver la ecuación homogénea y, de donde, por el método de variación de parámetros es posible determinar una solución particular para *cualquier* función continua g. Supóngase entonces que se conoce un conjunto fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación homogénea; entonces

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x). \tag{2}$$

El método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación (1) se apoya en la posibilidad de determinar n funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tales que $Y(x)$ sea de la forma

$$Y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x). \tag{3}$$

Dado que tienen que determinarse n funciones, es necesario especificar n condiciones. Es evidente que una de éstas es que Y satisfaga a la ecuación (1). Las otras $n-1$ condiciones se eligen para facilitar los cálculos. En virtud de que difícilmente puede esperarse una simplificación al determinar Y, si es necesario resolver ecuaciones diferenciales de orden superior para las u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, resulta natural imponer condiciones para suprimir los términos que produzcan derivadas superiores de las u_i. Con base en la ecuación (3) se obtiene

$$Y' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n). \tag{4}$$

Por tanto, la primera condición que se impone sobre las u_i es que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0. \tag{5}$$

Si se continúa este proceso de manera semejante, a través de $n-1$ derivadas de Y da

$$Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \cdots + u_n y_n^{(m)}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6}$$

y las $n-1$ condiciones siguientes sobre las funciones $u_1, \ldots, u_n$:

$$u_1' y_1^{(m-1)} + u_2' y_2^{(m-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(m-1)} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7}$$

La n-ésima derivada de Y es

$$Y^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}). \tag{8}$$

Por último, se impone la condición de que Y sea una solución de la ecuación (1). Al sustituir las derivadas de Y por sus expresiones de las ecuaciones (6) y (8), agrupar términos y aplicar el hecho de que $L[y_i] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = g. \tag{9}$$

La ecuación (9), junto con las $n - 1$ ecuaciones (7), dan n ecuaciones lineales simultáneas no homogéneas para $u_1', u_2', \ldots, u_n'$:

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \cdots + y_n u_n' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \cdots + y_n' u_n' &= 0, \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \cdots + y_n'' u_n' &= 0, \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + \cdots + y_n^{(n-1)} u_n' &= g. \end{aligned} \tag{10}$$

Una condición suficiente para la existencia de una solución del sistema de ecuaciones (10) es que el determinante de los coeficientes sea diferente de cero para cada valor de x. Sin embargo, el determinante de los coeficientes es precisamente $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, y en ningún punto es cero ya que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. De donde, es posible determinar $u_1', \ldots u_n'$. Si se aplica la regla de Cramer, se encuentra que la solución del sistema de ecuaciones (10) es

$$u_m'(x) = \frac{g(x) W_m(x)}{W(x)}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

En este caso, $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$ y W_m es el determinante que se obtiene a partir de W al sustituir la n-ésima columna por la columna $(0, 0, \ldots, 0,1)$. Con esta notación, una solución particular de la ecuación (1) se expresa por

$$Y(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x) \int_{x_0}^{x} \frac{g(t) W_m(t)}{W(t)}\, dt, \tag{12}$$

en donde x_0 es arbitrario. Aunque el procedimiento es directo, los cálculos algebraicos necesarios para determinar $Y(x)$ a partir de la ecuación (12) se vuelven cada vez más complicados a medida que n crece. En algunos casos es posible simplificar los cálculos hasta cierto punto al aplicar la identidad de Abel (problema 22 de la sección 4.1),

$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x) = c \exp\left[-\int p_1(x)\, dx\right].$$

Puede determinarse la constante c al evaluar W en algún punto conveniente.

Ejemplo 1 Dado que $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ y $y_3(x) = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a

$$y''' - y'' - y' + y = g(x), \tag{13}$$

determinar una solución particular de la ecuación (13) en términos de una integral.

Se usa la ecuación (12). En primer lugar se tiene

$$W(x) = W(e^x, xe^x, e^{-x})(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix}.$$

Si se extrae e^x con factor común de cada una de las dos primeras columnas y e^{-x} de la tercera columna, se obtiene

$$W(x) = e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{vmatrix}.$$

A continuación, al restar el primer renglón del segundo y tercer renglones, se tiene

$$W(x) = e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Por último, si se evalúa el último determinante por menores asociados con la primera columna, se encuentra que

$$W(x) = 4e^x.$$

En seguida,

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{-x} \\ 0 & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ 1 & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix}.$$

Si se utilizan menores asociados con la primera columna, se obtiene

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} xe^x & e^{-x} \\ (x+1)e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2x - 1.$$

De manera semejante,

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{-x} \\ e^x & 0 & -e^{-x} \\ e^x & 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = 2,$$

y

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & (x+1)e^x & 0 \\ e^x & (x+2)e^x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación (12) se tiene

$$Y(x) = e^x \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)(-1-2t)}{4e^t}\,dt + xe^x \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)(2)}{4e^t}\,dt + e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)e^{2t}}{4e^t}\,dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x} \left\{ e^{x-t}[-1 + 2(x-t)] + e^{-(x-t)} \right\} g(t)\,dt.$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 3, aplique el método de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial dada.

1. $y''' + y' = \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$
2. $y''' - y' = x$
3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$
4. Dado que x, x^2 y $1/x$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \qquad x > 0,$$

determine una solución particular.

5. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y''' - y'' + y' - y = g(x).$$

6. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y^{iv} - y = g(x).$$

Sugerencia: las funciones sen x, cos x, senh x y cosh x forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

7. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = g(x).$$

Si $g(x) = x^{-2}e^x$, determine $Y(x)$.

8. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = g(x), \qquad x > 0.$$

Sugerencia: compruebe que x, x^2 y x^3 son soluciones de la ecuación homogénea.

BIBLIOGRAFÍA

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice–Hall).

Coddington, E. A., y Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: McGraw-Hill).

Guillemin, E. A., *The Mathematics of Circuits Analysis* (New York: Wiley, 1949; Cambridge, Mass.: MIT Press).

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, 1927; New York: Dover).

Uspensky, J. V., *Theory of Equations* (New York: McGraw-Hill).

Capítulo 5 Soluciones en serie de las ecuaciones lineales de segundo orden

Hallar la solución general de una ecuación diferencial lineal se apoya en la determinación de un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea. Hasta el momento se ha dado un procedimiento sistemático para construir soluciones fundamentales sólo si la ecuación tiene coeficientes constantes. Para tratar la clase mucho más gránde de ecuaciones que tienen coeficiente variables es necesario extender la búsqueda de soluciones más allá de las funciones elementales del cálculo. El instrumento más importante que se necesita es la representación de una función dada mediante una serie de potencias. La idea básica es semejante a la del método de los coeficientes indeterminados: se supone que las soluciones de una ecuación diferencial dada tienen desarrollos en series de potencias y luego se intenta determinar los coeficientes de modo que se satisfaga la ecuación diferencial.

5.1 Repaso de series de potencias

En este capítulo se analiza el empleo de las series de potencias para construir conjuntos fundamentales de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden cuyos coeficientes son funciones de la variable independiente. Se empezará por resumir de manera muy breve los resultados pertinentes acerca de las series infinitas y, en particular, de las series de potencias, que se necesitarán. Los lectores ya familiarizados con las series de potencias pueden pasar a la sección 5.2. Quien requiera más detalles de los que se presentan debe consultar un libro de cálculo.

1. Se dice que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en un punto x si

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

existe. Es evidente que la serie converge para $x = x_0$; puede converger para toda x, o puede hacerlo para algunos valores de x y no para otros.

2. Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente en un punto x si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$$

converge. Es posible demostrar que si la serie converge absolutamente, entonces la serie también converge; sin embargo, la inversa no es necesariamente cierta.

3. Una de las pruebas más útiles para averiguar si una serie de potencias converge o no absolutamente es la prueba de la razón. Si $a_n \neq 0$ y si para un valor fijo de x

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

entonces la serie de potencias converge absolutamente en ese valor de x si $l < 1$ y diverge si $l > 1$. Si $l = 1$, la prueba es no concluyente.

Ejemplo 1 ¿Para qué valores de x converge la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n ?$$

Para hacer la prueba respecto a la convergencia se aplicará la prueba de la razón; se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n}\right| = |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x-2|.$$

Según la proposición 3, la serie converge absolutamente para $|x-2| < 1$, o sea si $1 < x < 3$, y diverge para $|x-2| > 1$. Los valores de x correspondientes a $|x-2| = 1$ son $x = 1$ y $x = 3$. La serie diverge para cada uno de estos valores de x ya que el n–ésimo término de la serie no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

4. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $x = x_1$, converge absolutamente para $|x-x_0| < |x_1-x_0|$, y si diverge en $x = x_1$, diverge para $|x-x_0| > |x_1-x_0|$.

5. Existe un número no negativo ρ denominado **radio de convergencia**, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para $|x-x_0| < \rho$ y diverge para $|x-x_0| > \rho$. Para una serie que no converge en punto alguno excepto en x_0, ρ se define como cero; para una serie que converge para toda x, se dice que ρ es infinito. Si $\rho > 0$, entonces el intervalo $|x-x_0| < \rho$ se llama **intervalo de convergencia**; éste se indica por el sombreado de la figura 5.1.1. La serie puede converger o diverger cuando $|x-x_0| = \rho$.

FIGURA 5.1.1 Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

Ejemplo 2 Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}.$$

Se aplicará la prueba de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Por tanto, la serie converge absolutamente para $|x+1| < 2$, o sea $-3 < x < 1$, y diverge para $|x+1| > 2$. El radio de convergencia de la serie de potencias es $\rho = 2$. Por último, se comprueban los puntos extremos del intervalo de convergencia. En $x = -3$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que converge, pero no absolutamente. Se dice que la serie converge condicionalmente en $x = -3$. En $x = 1$ la serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

la cual diverge. En resumen, la serie converge para $-3 \le x < 1$ y diverge en cualquier otro caso. Converge absolutamente para $-3 < x < 1$, y tiene un radio de convergencia de 2.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ convergen a $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, para $|x-x_0| < \rho$, $\rho > 0$. entonces las siguientes proposiciones son verdaderas para $|x-x_0| < \rho$.

6. Las series pueden sumarse o restarse término a término y

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n.$$

7. Las series pueden multiplicarse formalmente y

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,$$

en donde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$. Es más, si $g(x_0) \neq 0$, las series pueden dividirse formalmente y

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n.$$

En la mayor parte de los casos los coeficientes d_n se pueden obtener con mayor facilidad al igualar los coeficientes en la relación equivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k} \right)(x - x_0)^n.$$

También, en el caso de la división, el radio de convergencia de la serie de potencias resultante puede ser mayor que ρ.

8. La función f es continua y tiene derivadas de todos los órdenes para $|x - x_0| < \rho$. Además, $f', f'', \ldots$ pueden calcularse al derivar la serie término a término; es decir,

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \end{aligned}$$

etcétera, y cada una de las series converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$

9. El valor de a_n se expresa por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

La serie se llama serie de Taylor[1] para la función f alrededor de $x = x_0$.

10. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ para cada x, entonces $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. En particular, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ para cada x, entonces $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \cdots = 0$.

Una función f que tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = x_0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

con un radio de convergencia $\rho > 0$ se dice que es **analítica** en $x = x_0$. Según las proposiciones 6 y 7, si f y g son analíticas en x_0, entonces $f \pm g$, $f \cdot g$ y f/g (siempre que $g(x_0) \neq 0$) son analíticas en $x = x_0$. Uno de los resultados que se aplicará a menudo en las secciones siguientes es que un polinomio es analítico en todo punto; por tanto, las sumas, diferencias, productos y cocientes (excepto en los ceros del denominador) de polinomios son analíticos en todos los puntos.

[1] Brook Taylor (1685-1731) fue el matemático inglés más destacado en la generación posterior a Newton. En 1715 publicó un enunciado general del teorema de expansión que recibió su nombre, resultado fundamental en todas las ramas del análisis. También fue uno de los fundadores del cálculo de diferencias finitas así como el primero en reconocer la existencia de soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales.

Desplazamiento del índice de suma. El índice de suma es una serie infinita en un parámetro ficticio, en la misma forma que la variable de integración en una integral definida es una variable ficticia. Por tanto, no importa qué letra se utilice para el índice de suma. Por ejemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}.$$

Precisamente como se hacen los cambios de la variable de integración, en una integral definida resulta conveniente hacer cambios de los índices de suma al calcular soluciones en serie de las ecuaciones diferenciales. Mediante varios ejemplos se ilustrará cómo desplazar el índice de suma.

Ejemplo 3 Escribir $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ *como* una serie cuyo primer término corresponda a $n = 0$ en vez de $n = 2$.

Sea $m = n - 2$; entonces $n = m + 2$ y $n = 2$ corresponde a $m = 0$; de donde,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2}. \tag{1}$$

Al escribir los primeros términos de cada una de estas series, es posible verificar que contienen precisamente los mismos términos. Por último, en la serie de segundo miembro de la ecuación (1) se puede sustituir el índice ficticio m por n, con lo que se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}. \tag{2}$$

De hecho, se ha desplazado el índice hacia arriba en 2, lo cual se compensa empezando a contar en un nivel más bajo en 2 que originalmente.

Ejemplo 4 Escribir la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n (x - x_0)^{n-2} \tag{3}$$

como una serie cuyo término genérico comprenda a $(x - x_0)^n$ en vez de $(x - x_0)^{n-2}$.

De nuevo, se desplaza el índice en 2, de modo que n se sustituye por $n + 2$ y se empieza a contar 2 unidades más abajo; se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) a_{n+2} (x - x_0)^n. \tag{4}$$

fácil verificar que los términos de las series (3) y (4) son exactamente los mismos.

Ejemplo 5 Escribir la expresión

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \tag{5}$$

como una serie cuyo término genérico comprende a x^{n+r}.

En primer lugar se introduce la x^2 a la suma, con lo que se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r+1}. \tag{6}$$

A continuación, el índice se desplaza hacia abajo en 1 y se empieza a contar más arriba en 1; por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n + r - 1)a_{n-1} x^{n+r}. \tag{7}$$

Una vez más, se puede verificar con facilidad que las dos series de la ecuación (7) son idénticas y que son exactamente iguales a la expresión (5).

Ejemplo 6 Suponer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{8}$$

para toda x y determinar qué implica esto acerca de los coeficientes a_n.

Se desea aplicar la proposición 10 para igualar los coeficientes correspondientes en las dos series. Para lograrlo, en primer lugar es necesario volver a escribir la ecuación (8) de modo que la serie exhiba la misma potencia de x en sus términos genéricos. Por ejemplo, en la serie del primer miembro de (8), es posible sustituir n por $n + 1$ y empezar a contar más abajo en 1; por tanto (8) queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{9}$$

Según la proposición 10, se concluye que

$$(n + 1)a_{n+1} = a_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

o bien,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n + 1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

De donde, si se eligen valores sucesivos de n en la ecuación (10), se tiene

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!},$$

etcétera. En general,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Por tanto, la relación (8) determina todos los coeficientes siguientes en términos de a_0. Por último si se utilizan los coeficientes dados por la ecuación (11), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

en donde se ha seguido la convención usual de que $0! = 1$.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, determine el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (x+2)^n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$

En cada uno de los problemas 9 a 16, determine la serie de Taylor en torno al punto x_0 para la función dada. Determine también el radio de convergencia de la serie.

9. $\operatorname{sen} x, \quad x_0 = 0$
10. $e^x, \quad x_0 = 0$
11. $x, \quad x_0 = 1$
12. $x^2, \quad x_0 = -1$
13. $\ln x, \quad x_0 = 1$
14. $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$
15. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$
16. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$

17. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, calcule y' y y'' y escriba los cuatro primeros términos de cada serie, así como el coeficiente de x^n del término general.
18. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcule y' y y'' y escriba los cuatro primeros términos de cada serie, así como el coeficiente de x^n del término general. Demuestre que si $y'' = y$, entonces los coeficientes a_0 y a_1 son arbitrarios y determine a_2 y a_3 en términos de a_0 y a_1. Demuestre que $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

En cada uno de los problemas 19 a 23, compruebe la ecuación dada.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$
22. $\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k}, \quad x > 0,$

    en donde k y m son enteros dados y p es una constante.

23. $x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \beta x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$
    $= [r(r-1) + \alpha r] a_0 x^r + [(r+1)r + \alpha(r+1)] a_1 x^{r+1}$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n + r)(n + r - 1)a_n + \alpha(n + r)a_n + \beta a_{n-2}]x^{n+r}, \qquad x > 0,$$

en donde r es una constante.

24. Determine a_n de modo que se satisfaga la ecuación

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Intente identificar la función representada por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.2 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte I

En el capítulo 3 se describieron métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Ahora se considerarán métodos para resolver ecuaciones lineales de segundo orden cuando los coeficientes son funciones de la variable independiente. Basta considerar la ecuación homogénea

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \tag{1}$$

ya que el procedimiento para la ecuación no homogénea correspondiente es semejante.

Una amplia clase de problemas en física matemática conduce a ecuaciones de la forma (1) que tiene coeficientes polinominales; por ejemplo, la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

en donde ν es una constante, y la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

en donde α es una constante. Por esta razón, así como para simplificar los cálculos algebraicos, se considerará principalmente el caso en el que las funciones P, Q y R son polinomios. Sin embargo, como se verá, el método de resolución es aplicable para una clase de funciones más general que los polinomios.

Entonces por el momento, supóngase que P, Q y R son polinomios y que no tienen factores comunes. Supóngase también que se desea resolver la ecuación (1) en la vecindad de un punto x_0. La resolución de la (1) en un intervalo que contenga a x_0 está íntimamente asociada al comportamiento de P en ese intervalo.

Un punto x_0 tal que $P(x_0) \neq 0$ se conoce como **punto ordinario**. Como P es continua, se deduce que existe un intervalo alrededor de x_0 en el que $P(x)$ nunca es cero. En ese intervalo es posible dividir la ecuación (1) entre $P(x)$ para obtener

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

en donde $p(x) = Q(x)/P(x)$ y $q(x) = R(x)/P(x)$ son funciones continuas. De donde, según el teorema 3.2.1 de existencia y unicidad, en ese intervalo existe una solución única de (1) que también satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ para valores arbitrarios de

y_0 y y_0'. En esta sección y en la siguiente se analiza la resolución de la ecuación (1) en la vecindad de un punto ordinario.

Por otra parte, si $P(x_0) = 0$, entonces a x_0 se le llama **punto singular** de la ecuación (1). En este caso, por lo menos una de $Q(x_0)$ y $R(x_0)$ es diferente de cero. Como consecuencia, por lo menos uno de los coeficientes p y q de la ecuación (2) se vuelve no acotado cuando $x \to x_0$ y, por tanto, el teorema 3.2.1 no es válido en este caso. En las secciones 5.4 a 5.9 se trata la manera de hallar soluciones de (1) en la vecindad de un punto singular.

Ahora se abordará el problema de resolver la ecuación (1) en la vecindad de un punto ordinario x_0. Se buscan soluciones de la forma

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{3}$$

y se supone que la serie converge en el intervalo $|x - x_0| < \rho$ para algún $\rho > 0$. Aunque a primera vista puede parecer poco atractivo buscar una solución en la forma de una serie de potencias, en realidad es una forma conveniente y útil para una solución. Dentro de sus intervalos de convergencia, las series de potencias se comportan bastante parecido a los polinomios y es fácil manipularlas analítica y numéricamente. De hecho, incluso si es posible obtener una solución en términos de funciones elementales, como funciones exponenciales o trigonométricas, es probable que se requiera una serie de potencias o alguna expresión equivalente si se desea evaluarlas numéricamente o trazar sus gráficas.

La manera más práctica para determinar los coeficientes a_n es sustituir por la serie (3) y sus derivadas y, y' y y'' en la ecuación (1). Los siguientes ejemplos ilustran este proceso. Las operaciones, como la derivación, que intervienen en el procedimiento se justifican en tanto se permanezca dentro del intervalo de convergencia. Las ecuaciones diferenciales de estos ejemplos, por derecho propio, también tienen una importancia considerable.

Ejemplo 1 Encontrar una solución en serie de la ecuación

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Como se sabe, dos soluciones lineales independientes de esta ecuación son sen x y cos x, por lo que para resolverla no se requieren métodos de series. Sin embargo, este ejemplo ilustra la aplicación de *l* series de potencias en un caso relativamente sencillo. Para la ecuación (4), $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = 1$; de donde, todos los puntos son ordinarios.

Se busca una solución en la forma de una serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$,

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \end{aligned} \tag{5}$$

y se supone que la serie converge en algún intervalo $x < \rho$.

Si se deriva término a término se obtiene

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)na_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}. \tag{7}$$

Al sustituir por las series (5) y (7) y' y y'' en la ecuación (4) da

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

A continuación, en la primera suma, se desplaza el índice de suma al sustituir n por $n+2$ y empezar la suma en 0 en vez de 2; se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

o bien,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]\, x^n = 0.$$

Para que esta ecuación se satisfaga para toda x, el coeficiente de cada potencia de x debe ser cero; de donde, se concluye que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

La ecuación (8) se conoce como **relación de recurrencia**. Los coeficientes sucesivos pueden evaluarse uno por uno al escribir la relación de recurrencia primero para $n = 0$, después para $n = 1$, etcétera. En este ejemplo, (8) relaciona cada coeficiente con el segundo antes de él. Por tanto, los coeficientes de índice par (a_0, a_2, a_4, . . .) y los de índice impar (a_1, a_3, a_5, . . .) quedan determinados por separado. Para los coeficientes de índice par se tiene

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3} = +\frac{a_0}{4!}, \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \ldots.$$

Estos resultados sugieren[2] que, en general, si $n = 2k$, entonces

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

De manera semejante, para los coeficientes de índice impar

$$a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = +\frac{a_1}{5!}, \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7\cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \ldots,$$

y en general, si $n = 2k + 1$, entonces

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

[2] El resultado que se da en la ecuación (9) y otras fórmulas semejantes en este capítulo puede probarse por inducción matemática. Se supone que estos resultados son plausibles y se omite el argumento inductivo.

Si se sustituyen estos coeficientes en la ecuación (5), se tiene

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\ &= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora que se han obtenido formalmente las dos soluciones en serie de la ecuación (4), es posible hacer la prueba respecto a su convergencia. Si se aplica la prueba de la razón, es fácil demostrar que cada una de las series de (11) converge para toda x, y esto justifica retroactivamente todos los pasos aplicados en la obtención de las soluciones. De hecho, se reconoce que la primera serie de (11) es exactamente la serie Taylor para cos x alrededor de $x = 0$ y que la segunda es la serie de Taylor para sen x alrededor de $x = 0$. Por tanto, como se esperaba, se obtiene la solución $y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$.

Nótese que no se impusieron condiciones sobre a_0 y a_1 de donde, son arbitrarias. Con base en las ecuaciones (5) y (6), se ve que y y y', evaluadas en $x = 0$, son a_0 y a_1, respectivamente. Como las condiciones iniciales $y(0)$ y $y'(0)$ se puede elegir de manera arbitraria, se concluye que a_0 y a_1 deben ser arbitrarias hasta que se den condiciones iniciales específicas.

En las figuras 5.2.1 y 5.2.2 se muestra cómo las sumas parciales de las series de la ecuación (11) se aproximan a cos x y sen x. A medida que aumenta el número de términos, el intervalo sobre el cual la aproximación es satisfactoria se hace más largo y, para cada x en este intervalo, mejora la exactitud de la aproximación.

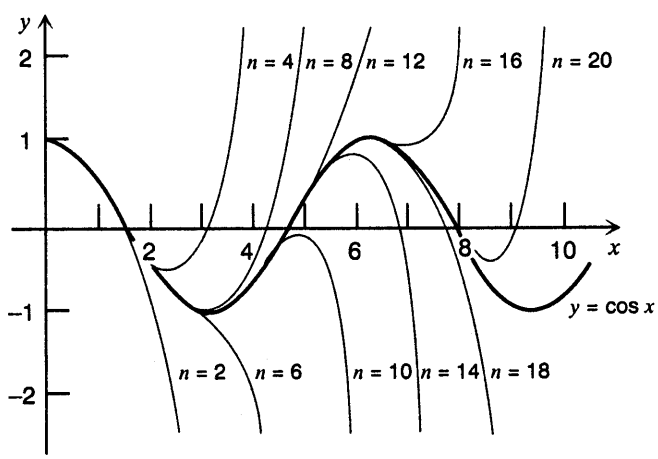


FIGURA 5.2.1 Aproximaciones polinomiales para cos x. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.

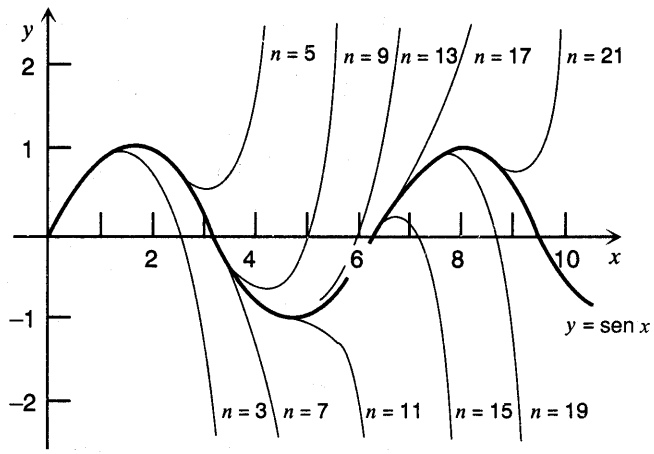


FIGURA 5.2.2 Aproximaciones polinomiales para sen x. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.

En el ejemplo 1 se sabía desde el principio que sen x y cos x forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (4). Sin embargo, si se hubiese ignorado esto y simplemente se hubiera resuelto (4) con la aplicación de métodos por series, se habría obtenido la solución (11). Al aceptar el hecho de que la ecuación diferencial (4) se presenta a menudo en las aplicaciones, podría decidirse dar nombres especiales a las dos soluciones de la ecuación (11); quizá

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Entonces, podría plantearse la pregunta de cuáles propiedades tienen estas funciones. Por ejemplo, es razonablemente obvio, a partir de los desarrollos en serie, que $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, $C(-x) = C(x)$ y $S(-x) = -S(x)$. Otra fórmula que se deduce con facilidad es

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = C(x).$$

De manera semejante, $dC(x)/dx = -S(x)$. Es más, al calcularlas con las series infinitas[3] es posible demostrar que las funciones $C(x)$ y $S(x)$ poseen todas las propiedades analíticas y algebraicas usuales de las funciones coseno y seno, respectivamente.

Aunque quizá el lector vio por primera vez las funciones seno y coseno definidas de manera más elemental en términos de triángulos rectángulos, resulta interesante que estas funciones puedan definirse como soluciones de cierta ecuación diferencial sencilla lineal de segundo orden. Con más precisión, la función sen x puede definirse como la solución del

[3] Este análisis se da en la sección 24 de la obra de K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series* (New York; Hafner, 1951).

problema con valor inicial $y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$; de modo análogo la función cos x puede definirse como la solución del problema con valor inicial $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$. También se pueden usar otros problemas con valor inicial para definir estas funciones; ver el problema 22. Muchas otras funciones importantes en física matemática también se definen como soluciones de ciertos problemas con valor inicial. Para la mayor parte de estas funciones no existe manera más sencilla o elemental de enfocarlas.

Ejemplo 2 Encontrar una solución en serie de potencias de x para la ecuación de Airy[4]

$$y'' - xy = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$

Para esta ecuación, $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = -x$; de donde, todos los puntos son ordinarios; en particular, $x = 0$. Se supondrá que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{13}$$

y que la serie converge en algún intervalo $|x| < \rho$. La serie para y'' está dada por la ecuación (7); como se explicó en el ejemplo anterior, es posible volver a escribir la como

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n. \tag{14}$$

Si se sustituyen por las series (13) y (14) y y y'' en la ecuación (12), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}. \tag{15}$$

En seguida, se desplaza el índice de suma en la serie del segundo miembro de esta ecuación al sustituir n por $n - 1$ e iniciar la suma en 1 en vez de cero. Por tanto, se tiene

$$2 \cdot 1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

De nuevo, para que esta ecuación se satisfaga para toda x, es necesario que los coeficientes de las potencias iguales de x sean iguales; de donde, $a_2 = 0$ y se obtiene la relación de recurrencia

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} = a_{n-1} \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16}$$

Dado que a_{n+2} está dada en términos de a_{n-1}, es evidente que las a quedan determinadas en pasos de tres. Por tanto, a_0 determina a_3, la que a su vez determina $a_6, \ldots$; a_1 determina a_4, la que a su vez determina $a_7, \ldots$, y a_2 determina a_5, la que a su vez determina $a_8, \ldots$. Como $a_2 = 0$, de inmediato se concluye que $a^5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$.

Para la sucesión $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$ se hace $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ en la relación de recurrencia:

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \qquad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \qquad a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \ldots.$$

[4] Sir George Airy (1801-1892), astrónomo y matemático inglés, fue director del Observatorio de Greenwich de 1835 a 1881. Una razón por la que la ecuación de Airy es interesante es que para x negativa las soluciones son oscilatorias, semejante a funciones trigonométricas, y para x positiva son monótonas, semejante a funciones hiperbólicas. ¿Puede explicar por qué es razonable esperar ese comportamiento?

Para esta sucesión de coeficientes es conveniente escribir una fórmula para a_{3n}, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Los resultados anteriores sugieren la fórmula general

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Para la sucesión $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$, se hace $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ en la relación de recurrencia:

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \qquad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \qquad a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \ldots.$$

De la misma manera que antes, se encuentra que

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n-3)(3n-2)(3n)(3n+1)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

La solución general de la ecuación de Airy es

$$\begin{aligned} y &= a_0\left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots\right] \\ &= a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Una vez que se han obtenido estas dos soluciones en serie ahora se puede investigar su convergencia. Debido al rápido crecimiento de los denominadores de los términos de las series (17), podría esperarse que estas series tengan un radio grande de convergencia. En efecto, es fácil aplicar la prueba de la razón para demostrar que estas dos series convergen para toda x; ver el problema 20.

Si, por el momento, se supone que las series convergen para toda x, sean y_1 y y_2 las funciones definidas por las expresiones entre los primeros y segundos corchetes, respectivamente, de la ecuación (17). Entonces, al elegir primero $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ y luego $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, se deduce que y_1 y y_2 son por separado soluciones de (12). Anótese que y_1 satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ y que y_2 satisface las condiciones iniciales $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Por tanto, $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ y, como consecuencia, y_1 y y_2 son linealmente independientes. De donde, la solución general de la ecuación de Airy es

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

En las figuras 5.2.3 y 5.2.4, respectivamente, se muestran las gráficas de las soluciones y_1 y y_2 de la ecuación de Airy, así como las gráficas de varias sumas parciales de las dos series de la ecuación (17). Observe que tanto y_1 como y_2 son monótonas para $x > 0$ y oscilatorias para $x < 0$. También, con base en las figuras, es posible ver que las oscilaciones no son uniformes, sino que decaen en amplitud y crecen en frecuencia a medida que aumenta la distancia al origen. Como contraste con el ejemplo 1, las soluciones y_1 y y_2 de la ecuación de Airy no son funciones elementales que el lector ya haya encontrado en el cálculo. Sin embargo, debido a su importancia en algunas aplicaciones físicas, estas funciones se han estudiado estupendamente y sus propiedades son bien conocidas para los matemáticos y los científicos aplicados.

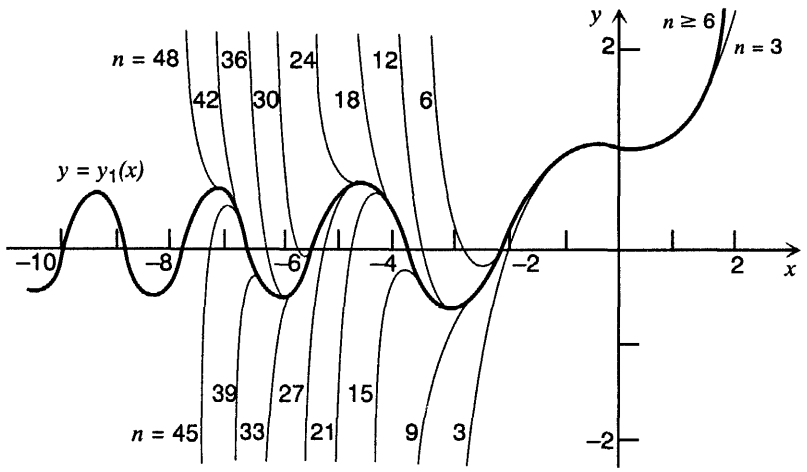


FIGURA 5.2.3 Aproximaciones polinomiales para la solución $y_1(x)$ de la ecuación de Airy. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.

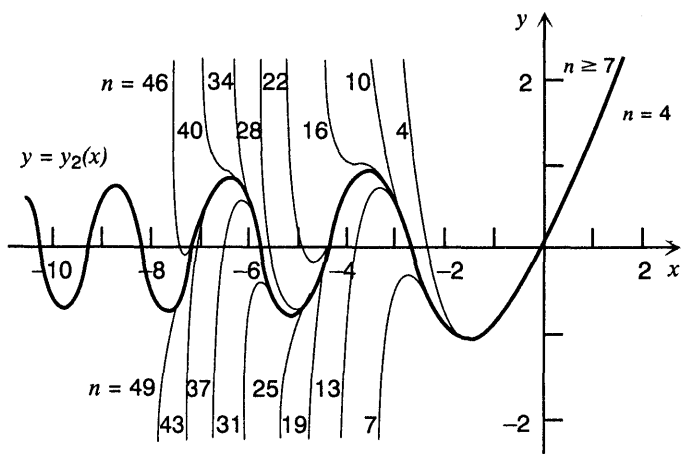


FIGURA 5.2.4 Aproximaciones polinomiales para la solución $y_2(x)$ de la ecuación de Airy. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.

Ejemplo 3 Encontrar una solución de la ecuación de Airy en potencias de $x - 1$.

El punto $x = 1$ es un punto ordinario de la ecuación (12) y, por tanto, se busca una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n,$$

en donde se supone que la serie converge en algún intervalo $|x-1| < \rho$; entonces

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n,$$

y

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n.$$

Si se sustituyen y y y'' de la ecuación (12) por estas expresiones, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n. \tag{18}$$

Ahora bien, para igualar los coeficientes de las potencias iguales de $(x-1)$ es necesario expresar x, el coeficiente de y en la ecuación (12), en potencias de $x-1$; es decir, se escribe $x = 1 + (x-1)$. Nótese que esta es precisamente la serie de Taylor para x alrededor de $x = 1$. Entonces, la ecuación (18) toma la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}.$$

Si se desplaza el índice de suma de la segunda serie de la derecha da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n.$$

Al igualar los coeficientes de las potencias iguales de x se obtiene

$$2a_2 = a_0,$$
$$(3 \cdot 2)a_3 = a_1 + a_0,$$
$$(4 \cdot 3)a_4 = a_2 + a_1,$$
$$(5 \cdot 4)a_5 = a_3 + a_2,$$
$$\vdots$$

La relación general de recurrencia es

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 1. \tag{19}$$

Si se expresan las primeras a_n en términos de a_0 y de a_1 da

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}, \quad a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}, \quad a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}.$$

De donde,

$$y = a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right]. \tag{20}$$

En general, cuando la relación de recurrencia tiene más de dos términos, como en la ecuación (19), la determinación de una fórmula para a_n en términos de a_0 y a_1 será bastante complicada, si no es que imposible. En este ejemplo esa fórmula no es tan evidente. Cuando no se cuenta con

una fórmula así, no es posible probar la convergencia de las dos series de la ecuación (20) por métodos directos, como la prueba de la razón. Sin embargo, aun sin conocer la fórmula para a_n, en la sección 5.3 se verá que es posible establecer que las series de la (20) convergen para toda x y, además, definir funciones y_3 y y_1 que sean soluciones linealmente independientes de la ecuación de Airy (12). Por tanto,

$$y = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x)$$

es la solución general de la ecuación de Airy para $-\infty < x < \infty$.

Vale la pena saltar, como se vio en el ejemplo 3, que si se busca una solución de la ecuación (1) de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, entonces los coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ de (1) también deben expresarse en potencias de $(x - x_0)$. De manera opcional, se puede hacer el cambio de variable $x - x_0 = t$, para obtener una nueva ecuación diferencial para y como función de t y, a continuación buscar soluciones de esta nueva ecuación de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Una vez que se terminan los cálculos, t se sustituye por $x - x_0$ (ver el problema 19).

Otro punto interesante es el siguiente. Las funciones y_1 y y_2 definidas por las series de la ecuación (17) son soluciones linealmente independientes de la (12) para toda x y esto es cierto de manera semejante para las funciones y_3 y y_4 definidas por las series de la ecuación (20). Según la teoría general de las ecuaciones lineales de segundo orden, cada una de las dos primeras funciones se pueden expresar como una combinación lineal de las dos últimas y viceversa, resultado que evidentemente no es obvio a partir sólo de un análisis de las series.

Por último, conviene hacer resaltar que no es muy importante si, como en el ejemplo 3, no se puede determinar el coeficiente general a_n en términos de a_0 y a_1. Lo esencial es hallar *tantos coeficientes como se quiera*. Así es posible encontrar tantos téminos de las dos soluciones en serie como se quiera, incluso si no es posible determinar el término general. Aun que la tarea de calcular varios coeficientes de una solución en serie de potencias no es difícil, puede ser tediosa. En este caso puede ser de mucha utilidad un paquete de manipulación simbólica; con algunos se pueden encontrar un número especificado de términos de una solución en serie de potencias, como respuesta a un solo comando.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 14, resuelva la ecuación diferencial dada por medio de una serie de potencias alrededor de un punto dado x_0. Halle la relación de recurrencia; encuentre también los cuatro primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes (a menos que la serie termine antes). Si es posible, encuentre el término general de cada solución.

1. $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
2. $y'' - xy' - y = 0 \quad x_0 = 0$
3. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
4. $y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k$ una constante
5. $(1 - x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
6. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$

7. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
8. $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$
9. $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x_0 = 0$
10. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
11. $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0 \quad x_0 = 0$
12. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
13. $2y'' + xy' + 3y = 0, \quad x_0 = 0$
14. $2y'' + (x + 1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = 2$

En cada uno de los problemas 15 a 18 encuentre los cuatro primeros términos diferentes de cero de la solución del problema con valor inicial dado.

15. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$; ver el problema 2
16. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$; ver el problema 6
17. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1$; ver el problema 7
18. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2$; ver el problema 12

19. Al realizar el cambio de variable $x - 1 = t$ y suponer que y es una serie de potencias en t, encuentre dos soluciones en serie linealmente independientes de

$$y'' + (x - 1)^2 y' + (x^2 - 1)y = 0$$

en potencias de $x - 1$. Demuestre que se obtiene el mismo resultado directamente al suponer que y es una serie de Taylor en potencias de $x - 1$ y también al expresar el coeficiente $x^2 - 1$ en potencias de $x - 1$.

20. Demuestre directamente, con la aplicación de la prueba de la razón, que las dos soluciones en serie de la ecuación de Airy alrededor de $x = 0$ convergen para toda x; ver la ecuación (17) del texto.
21. La ecuación

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

en donde λ es una constante, se conoce como ecuación de Hermite[5]. Es una ecuación importante de la física matemática.

a) Encuentre los cuatro primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes alrededor de $x = 0$.

b) Observe que si λ es un entero par no negativo, entonces una o la otra de las soluciones en serie termina y se convierte en un polinomio. Encuentre las soluciones polinomiales para $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ y 10. Observe que cada polinomio queda determinado sólo hasta una constante multiplicativa.

c) El polinomio de Hermite $H_n(x)$ se define como la solución polinominal de la ecuación de Hermite con $\lambda = 2_n$ para la que el coeficiente de x^n es 2^n. Encuentre $H_0(x), \ldots, H_5(x)$.

22. Considere el problema con valor inicial $y' = \sqrt{1 - y^2}, y(0) = 0$.

a) Demuestre que $y = \operatorname{sen} x$ es la solución de este problema con valor inicial.

b) Busque una solución del problema con valor inicial en la forma de una serie de potencias alrededor de $x = 0$. Encuentre los coeficientes hasta el término en x^3 de esta serie.

[5] Charles Hermite (1822-1901) fue un influyente analista y algebrista francés. Introdujo las funciones de Hermite en 1864 y en 1873 demostró que e es un número trascendente (es decir, que e no es raíz de alguna ecuación polinomial con coeficientes racionales). Su nombre también se asocia a las matrices hermitianas (ver la sección 7.3), algunas de cuyas propiedades descubrió.

En cada uno de los problemas 23 a 26, use una computadora para trazar las gráficas de varias sumas parciales de una solución en serie del problema con valor inicial dado, alrededor de $x = 0$, y obtener de esta manera una gráfica análoga a las de las figuras 5.2.1 a 5.2.4.

23. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$ ver el problema 2
24. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$ ver el problema 6
25. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$ ver el problema 7
26. $2y'' + (x + 3)y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

5.3 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte II

En la sección anterior se consideró el problema de encontrar soluciones de

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{1}$$

en donde P, Q, y R son polinomios, en la vecindad de un punto ordinario x_0. Si se supone que la ecuación (1) tiene una solución $y = \phi(x)$ y que ϕ tiene una serie de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{2}$$

que converge para $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$, se encuentra que la a_n puede determinarse el sustituir directamente por la serie (2) y en la ecuación (1).

Ahora se considerará cómo se podría justificar la afirmación de que si x_0 es un punto ordinario de la ecuación (1), entonces existen soluciones de la forma (2). También se considerará la cuestión de radio de convergencia de esa serie. Al efectuar esto se llega a una generalización de la definición de punto ordinario.

Supóngase entonces que existe una solución de la ecuación (1), de la forma (2). Al derivar (2) m veces e igualar x a x_0, se concluye que

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0).$$

De donde, para calcular la a_n de la serie (2) es necesario demostrar que es posible determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ a partir de la ecuación diferencial (1).

Supóngase que $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Entonces, $a_0 = y_0$ y $a_1 = y_0'$. Si sólo se tiene interés en hallar una solución de (1) sin especificar condiciones iniciales, entonces a_0 y a_1 permanecen arbitrarias. Para determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ y la a_n correspondiente, para $a_n = 2, 3, \ldots$, se regresa a la ecuación (1). Dado que ϕ es una solución de (1), se tiene

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0.$$

Para el intervalo alrededor de x_0 para el que P no se anula es posible escribir esta ecuación en la forma

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x) \tag{3}$$

en donde $p(x) = Q(x)/P(x)$ y $q(x) = R(x)/P(x)$. Si se iguala x a x_0 en la ecuación (3) da

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0).$$

De donde, a_2 queda expresada por

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \tag{4}$$

Para determinar a_3 se deriva la ecuación (3) y, a continuación x se iguala a x_0, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi]\Big|_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Si se sustituye a_2 por su expresión dada en la ecuación (4) se obtiene a_3 en términos de a_1 y a_0. Como P, Q y R son polinomios y $P(x_0) \neq 0$, todas las derivadas de p y q existen en x_0. De donde, es posible seguir derivando indefinidamente la ecuación (3) y determinar después de cada derivación los coeficientes sucesivos a_4, a_5, . . . al hacer x igual a x_0.

Nótese que la propiedad importante que se aplicó al determinar la a_n fue que podrían calcularse una infinidad de derivadas de las funciones p y q. Podría parecer razonable hacer más flexible la suposición de que las funciones p y q son razones de polinomios y simplemente requerir que sean infinitamente diferenciables en la vecindad de x_0. Por desgracia, esta condición es demasiado débil para asegurar que es posible probar la convergencia del desarrollo en serie resultante para $y = \phi(x)$. Lo que se necesita es suponer que las funciones p y q son *analíticas* en x_0; es decir, que tienen desarrollos en serie de Taylor que convergen a ellas en algún intervalo alrededor del punto x_0:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \tag{6}$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n. \tag{7}$$

Con esta idea en mente puede generalizarse la definición de punto ordinario y de punto singular de la ecuación (1) como sigue: si las funciones $p = Q/P$ y $q = R/P$ son analíticas en x_0, entonces se dice que el punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial (1); de lo contrario, es un **punto singular**.

Considérese ahora la cuestión del intervalo de convergencia de la solución en serie. Una posibilidad (aunque no atrayente) es calcular realmente la solución en serie de cada problema y luego aplicar una de las pruebas de convergencia para una serie infinita con el fin de determinar el radio de convergencia de esa solución en serie. Por fortuna, se puede dar respuesta de inmediato a la cuestión para una amplia clase de problemas mediante el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1 Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

es decir, si $p = Q/P$ y $q = R/P$ son analíticas en x_0, entonces la solución general de la ecuación (1) es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \tag{8}$$

en donde a_0 y a_1 son arbitrarias y y_1 y y_2 son soluciones en serie linealmente independientes, analíticas en x_0. Además el radio de convergencia de cada una de las soluciones en serie, y_1 y y_2, es por lo menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de las series para p y q. Los coeficientes de las soluciones en serie se determinan al sustituir por la serie (2) y en la ecuación (1).

Nótese, a partir de la forma de la solución en serie, que $y_1(x) = 1 + b_2(x - x_0)^2 + \cdots$, y $y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$. De donde, y_1 es la solución que satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0$ y y_2 es la solución que satisface las condiciones iniciales $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$. Nótese también que aunque en teoría el cálculo de los coeficientes mediante la derivación sucesiva de la ecuación diferencial es excelente, en general no es un procedimiento práctico de cálculo. En vez de ello, es necesario sustituir y por la serie (2) en la ecuación diferencial (1) y determinar los coeficientes de modo que se satisfaga la ecuación diferencial, como en los ejemplos de la sección anterior.

No se probará este teorema, que en una forma ligeramente más general se debe a Fuchs[6]. Lo que importa para los fines de este libro es que, existe una solución en serie de la forma (2) y que el radio de convergencia de la solución en serie no puede ser menor que el más pequeño de los radios de convergencia de las series para p y q; de donde, basta determinar estos.

Lo anterior puede lograrse de dos maneras. Una vez más, una posibilidad es sencillamente calcular las series de potencias para p y q y, a continuación, determinar los radios de convergencia mediante la aplicación de una de las pruebas de convergencia para las series infinitas. Sin embargo, cuando P, Q y R son polinomios, existe una manera más fácil. En la teoría de funciones de la variable compleja se demuestra que la razón de dos polinomios, por ejemplo Q/P, tiene un desarrollo en serie de potencias convergente alrededor de un punto $x = x_0$ si $P(x_0) \neq 0$. Además, si se supone que se han cancelado todos los factores comunes a Q y P, el radio de convergencia de la serie de potencias para Q/P alrededor del punto x_0 es precisamente la distancia de x_0 al más próximo de P. Al determinar esta distancia es necesario recordar que $P(x) = 0$ puede tener raíces complejas, que también es necesario considerar.

[6] Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902) fue estudiante y más tarde profesor en la Universidad de Berlín. Probó el resultado del teorema 5.3.1 en 1886. Su investigación más importante fue sobre los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales lineales. Reconoció la importancia de los puntos singulares regulares (sección 5.4) y las ecuaciones cuyas únicas singularidades, incluyendo el punto en el infinito, son puntos singulares regulares que se conocen como ecuaciones fuchsianas.

Ejemplo 1 ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor de $(1 + x^2)^{-1}$ alrededor de $x = 0$?

Una manera de proceder es hallar la serie de Taylor en cuestión, a saber,

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

Entonces es posible verificar por la prueba de la razón que $\rho = 1$. Otro enfoque es observar que los ceros de $1 + x^2$ son $x = \pm i$. Dado que la distancia de 0 a i o a $-i$ en el plano complejo es uno el radio de convergencia de la serie de potencias alrededor de $x = 0$ es uno.

Ejemplo 2 ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ alrededor de $x = 0$? ¿Y alrededor de $x = 1$?

En primer lugar, nótese que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

tiene las soluciones $x = 1 \pm i$. La distancia de $x = 0$ a $x = 1 + i$ o $x = 1 - i$ en el plano complejo es $\sqrt{2}$; de donde, el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alrededor de $x = 0$ es $\sqrt{2}$.

La distancia de $x = 1$ a $x = 1 + i$ o $x = 1 - i$ es 1; por tanto, el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - 1)^n$ alrededor de $x = 1$ es 1.

Según el teorema 5.3.1, las soluciones en serie de la ecuación de Airy de los ejemplos 2 y 3 de la sección anterior convergen para todos los valores de x y $x - 1$, respectivamente, ya que en cada problema $P(x) = 1$ y, de donde, jamás es cero.

Es necesario hacer hincapié en que una solución en serie puede converger para un intervalo más amplio de x que el indicado por el teorema 5.3.1, por lo que el teorema en realidad sólo proporciona una cota inferior del radio de convergencia de la solución en serie. Esto se ilustra por la solución polinomial de Legendre de la ecuación de Legendre que se da en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Determinar una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

en donde α es una constante.

Nótese que $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -2x$ y $R(x) = \alpha(\alpha + 1)$ son polinomios y que los ceros de P, $x = \pm 1$, están a una distancia igual a 1 de x, $= 0$. De donde, una solución en serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para por lo menos $|x| < 1$ y quizá para valores mayores de x. De hecho, es posible demostrar que si α es un entero positivo, una de las soluciones en serie termina después de un número finito de términos y, por consiguiente, converge no sólo para $|x| < 1$, sino para toda x. Por ejemplo, si $\alpha = 1$, la solución polinomial es $y = x$. Ver los problemas 20 a 28 al final de esta sección para un análisis más completo de la ecuación del Legendre.

Ejemplo 4 Determinar una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie de la ecuación diferencial

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \tag{9}$$

alrededor del punto $x = 0$; alrededor del punto $x = -\frac{1}{2}$.

Una vez más, P, Q y R son polinomios y los ceros de P están en $x = \pm i$. La distancia en el plano complejo de 0 a $\pm i$ es 1 y de $-\frac{1}{2}$ a $\pm i$ es $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5}/2$. De donde, en el primer caso la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge por lo menos para $|x| < 1$, y en el segundo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x + \frac{1}{2})^n$ converge por lo menos para $|x + \frac{1}{2}| < \sqrt{5}/2$.

Una observación interesante que se puede hacer acerca de la ecuación (9) se deduce de los teoremas 3.2.1 y 5.3.1. Supóngase que se dan las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $y'(0) = y_0'$. Como $1 + x^2 \neq 0$ para toda x, por el teorema 3.2.1 se sabe que existe una solución única del problema con valor inicial sobre $-\alpha < x < \infty$. Por otra parte, el teorema 5.3.1 sólo garantiza una solución en serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (con $a_0 = y_0$, $a_1 = y_0'$ para $-1 < x < 1$. La única solución sobre el intervalo $-\infty < x < \infty$ puede no tener una serie de potencias alrededor de $x = 0$ que converja para toda x.

Ejemplo 5 ¿Es posible determinar una solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (1 + x^2)y = 0,$$

y, en caso afirmativo, cuál es el radio de convergencia?

Para esta ecuación diferencial, $p(x) = \operatorname{sen} x$ y $q(x) = 1 + x^2$. Recuérdese de lo visto en cálculo que sen x tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ que converge para toda x. Además, q también tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = 0$, a saber, $q(x) = 1 + x^2$, que converge para toda x. Por tanto, existe una solución en serie de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con a_0 y a_1 arbitrarias y la serie converge para toda x.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, determine $\phi''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$ y $\phi^{iv}(x_0)$ para el punto x_0 dado si $y = \phi(x)$ es una solución del problema con valor inicial que se da.

1. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $x^2y'' + (1 + x)y' + 3(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + x^2y' + (\operatorname{sen} x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$

En cada uno de los problemas 5 a 8, determinen una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones serie alrededor de cada punto que se da, x_0 para la ecuación diferencial dada.

5. $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$
6. $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$
7. $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$
8. $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$

9. Determine una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie para cada una de las ecuaciones diferenciales de los problemas 1 a 14 de la sección 5.2
10. La ecuación diferencial de Chebyshev[7] es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

en donde α es una constante.
a) Determine dos soluciones linealmente independientes en potencias de x para $|x| < 1$.
b) Demuestre que si α es un entero no negativo n, entonces existe una solución polinomial de grado n. Estos polinomios, cuando están normalizados adecuadamente, reciben el nombre de polinomios de Chebyshev y son muy útiles en problemas que requieren una aproximación polinomial para una función definida sobre $-1 \leq x \leq 1$.
c) Encuentre una solución polinomial para cada uno de los casos $\alpha = n = 0, 1, 2$ y 3.
11. Encuentre los tres primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes en serie de potencias de x de

$$y'' + (\text{sen } x)y = 0.$$

Sugerencia: desarrolle sen x en una serie de Taylor alrededor de $x = 0$ y retenga un número suficiente de términos para calcular los coeficientes necesarios de $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
12. Encuentre los tres primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes en serie de potencias de x de

$$e^x y'' + xy = 0.$$

¿Cuál es el radio de convergencia de cada solución en serie?
Sugerencia: desarrolle e^x o xe^{-x} en una serie de potencias alrededor de $x = 0$.
13. Suponga que se afirma que x y x^2 son soluciones de una ecuación diferencial $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$. ¿Qué se puede decir acerca del punto $x = 0$? ¿Es un punto ordinario o un punto singular?
Sugerencia: aplique el teorema 3.2.1, y observe el valor de x y x^2 en $x = 0$.

Ecuaciones de primer orden. Los métodos de series analizados en esta sección son directamente aplicables a la ecuación diferencial lineal de primer orden $P(x)y' + Q(x)y = 0$ en un punto x_0, si la función $p = Q/P$ tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de ese punto. Ese punto se llama punto ordinario y, además, el radio de convergencia de la serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ es por lo menos tan grande como el radio de convergencia de la serie para Q/P. En cada uno de los problemas 14 a 19 resuelva la ecuación diferencial dada mediante una serie de potencias de x y compruebe que a_0 es arbitraria en cada caso. Los problemas 18 y 19 están relacionados con ecuaciones diferenciales no homogéneas a las que es fácil extender los métodos de series.

14. $y' - y = 0$
15. $y' - xy = 0$
16. $y' = e^{x^2}y$, tres términos
17. $(1 - x)y' = y$
*18. $y' - y = x^2$
*19. $y' + xy = 1 + x$

[7] Pafnuty L. Chebyshev (1821-1894), profesor en la Universidad de San Petersburgo durante 35 años y el más importante matemático ruso del siglo XIX, fundó la llamada "Escuela de Petersburgo", que produjo una gran cantidad de matemáticos distinguidos. Su estudio de los polinomios de Chebyshev empezó alrededor de 1845, como parte de una investigación de la aproximación de funciones por medio de polinomios. Chebyshev también es conocido por su trabajo en teoría de números y en probabilidad.

En los casos en que sea posible, compare la solución en serie con la solución obtenida al aplicar los métodos del capítulo 2.

Ecuación de Legendre. Los problemas 20 a 28 tratan de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

Como se indicó en el ejemplo 3, el punto $x = 0$ es un punto ordinario de esta ecuación y la distancia del origen al cero más próximo de $P(x) = 1 - x^2$ es 1. De donde, el radio de convergencia de las soluciones en serie alrededor de $x = 0$ es por lo menos 1. Observe también que basta considerar $\alpha > -1$ porque si $\alpha \leq -1$, entonces la sustitución $\alpha = -(1 + \gamma)$ en donde $\gamma \geq 0$ conduce a la ecuación de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma + 1)y = 0$.

20. Demuestre que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Legendre para $|x| < 1$ son

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4)\cdots(\alpha - 2m + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3)\cdots(\alpha + 2m - 1)}{(2m)!} x^{2m},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3)\cdots(\alpha - 2m + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4)\cdots(\alpha + 2m)}{(2m + 1)!} x^{2m+1}.$$

21. Demuestre que, si α es cero o un entero par positivo $2n$, la solución en serie y_1 se reduce a un polinomio de grado $2n$ que sólo contiene potencias pares de x. Encuentre los polinomios correspondientes a $\alpha = 0$, 2 y 4. Demuestre que si α es un entero impar positivo $2n + 1$, la solución en serie y_2 se reduce a un polinomio de grado $2n + 1$, que sólo contiene potencias impares de x. Encuentre los polinomios correspondientes a $\alpha = 1$, 3 y 5.
22. El polinomio de Legendre $P_n(x)$ se define como la solución polinomial de la ecuación de Legendre con $\alpha = n$ que también satisface la condición $P_n(1) = 1$. Use los resultados del problema 21 para encontrar los polinomios de Legendre $P_0(x), \ldots P_5(x)$.
23. Con ayuda de una computadora
    a) trace las gráficas de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.
    b) encuentre los ceros de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.
24. Es posible demostrar que la fórmula general para $P_n(x)$ es

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n - 2k)!}{k!(n - k)!(n - 2k)!} x^{n-2k},$$

en donde $[n/2]$ denota el mayor entero menor que, o igual a, $n/2$. Observe la forma de $P_n(x)$ para n par y n impar demuestre que $P_n(-1) = (-1)^n$.

25. Los polinomios de Legendre tienen una función importante en física matemática. Por ejemplo, al resolver la ecuación de Laplace (ecuación del potencial) en coordenadas esféricas se encuentra la ecuación

$$\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot\varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n + 1)F(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \pi,$$

en donde n es un entero positivo. Demuestre que el cambio de variable $x = \cos\varphi$ conduce a la ecuación de Legendre con $\alpha = n$ para $y = f(x) = F(\arccos x)$.

26. Demuestre que para $n = 0,1,2,3$ el polinomio de Legendre correspondiente queda definido por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Esta fórmula, conocida como fórmula Rodrigues (1794-1851), es verdadera para todos los enteros positivos n.

27. Demuestre que la ecuación de Legendre también puede escribirse como

$$[(1 - x^2)y']' = -\alpha(\alpha + 1)y.$$

Entonces se concluye que $[(1-x^2)P'_n(x)]' = -n(n+1)P_n(x)$ y $[(1-x^2)P'_m(x)]' = -m(m+1)P_m(x)$. Demuestre al multiplicar la primera ecuación por $P_m(x)$ y la segunda por $P_n(x)$ y a continuación integrar por partes que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad \text{si} \quad n \neq m.$$

Esta propiedad de los polinomios de Legendre se conoce como propiedad de ortogonalidad. Si $m = n$, es posible demostrar que el valor de la integral que acaba de darse es $2/(2n + 1)$.

28. Dado un polinomio f de grado n, es posible expresarlo como una combinación lineal de $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Aplique el resultado del problema 27 para demostrar que

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx.$$

5.4 Puntos singulares regulares

En esta sección se considerará la ecuación

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

en la vecindad de un punto singular x_0. Recuérdese que si las funciones P, Q y R son polinomios que no tienen factores comunes, los puntos singulares de la ecuación (1) son los puntos para los que $P(x) = 0$.

Ejemplo 1 Determinar los puntos singulares y los puntos ordinarios de la ecuación de Bessel de orden v

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0. \tag{2}$$

El punto $x = 0$ es un punto singular ya que $P(x) = x^2$ es cero allí. Todos los demás puntos son puntos ordinarios de la ecuación (2).

Ejemplo 2 Determinar los puntos singulares y los puntos ordinarios de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{3}$$

en donde α es una constante.

Los puntos singulares son los ceros $P(x) = 1 - x^2$, a saber, los puntos $x = \pm 1$. Todos los demás puntos son ordinarios.

Desafortunadamente, si se intenta aplicar los métodos de las dos secciones anteriores para resolver la ecuación (1) en la vecindad de un punto singular x_0, se encuentra que estos métodos fracasan. Esto se debe a que la solución de (1) a menudo no es analítica en x_0 y, como consecuencia, no es posible representarla mediante una serie de Taylor en potencias de $x - x_0$. En vez de ello es necesario usar un desarrollo en serie más general.

Dado que los puntos singulares de una ecuación diferencial suelen ser poco numerosos, podría plantearse la pregunta de si es posible simplemente ignorarlos, especialmente debido a que ya se sabe cómo construir soluciones alrededor de puntos ordinarios. Sin embargo, esto no es factible porque los puntos singulares determinan las características principales de la solución en mucho mayor medida de lo que podría esperarse en principio. En la vecindad de un punto singular, la solución a menudo se hace grande en magnitud o experimenta cambios rápidos en la misma. Por tanto, el comportamiento de un sistema físico modelado por una ecuación diferencial con frecuencia es más interesante en la vecindad de un punto singular. A menudo las singularidades geométricas de un problema físico, como esquinas o bordes marcados, producen puntos singulares en la ecuación diferencial correspondiente. Por tanto, aunque en principio podría desearse evitar los pocos puntos en los que una ecuación diferencial es singular, es precisamente en estos puntos en los que es necesario estudiar con más cuidado la solución.

Como una opción para los métodos analíticos, es posible considerar el empleo de métodos numéricos, que se analizan en el capítulo 8. Sin embargo, estos métodos no se adaptan al estudio de las soluciones cerca de un punto singular. Incluso si se adopta un enfoque numérico, es necesario combinarlo con los métodos analíticos de este capítulo, a fin de examinar el comportamiento de las soluciones cerca de puntos singulares.

Sin contar con información adicional acerca del comportamiento de Q/P y R/P en la vecindad del punto singular, es imposible describir el comportamiento de las soluciones de la ecuación (1) cerca de $x = x_0$. Puede suceder que existan dos soluciones linealmente independientes de (1) que permanezcan acotadas cuando $x \to x_0$, o pueda haber sólo una mientras que la otra se vuelve no acotada cuando $x \to x_0$, o las dos pueden volverse no acotadas cuando $x \to x_0$. Para ilustrar esto, considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3 La ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2y = 0 \tag{4}$$

tiene un punto singular en $x = 0$. Es posible comprobar, con facilidad por sustitución directa que para $x > 0$ o $x < 0$, $y = x^2$ y $y = 1/x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (4). Por tanto en cualquier intervalo que no contenga el origen, la solución general de (4) es $y = c_1x^2 + c_2x^{-1}$. La única solución de la ecuación (4) que es acotada cuando $x \to 0$ es $y = c_1x^2$. De hecho, esta solución es analítica en el origen aunque (4) se escriba en la forma estándar, $y'' - (2/x^2)y$

= 0, la función $q(x) = -2/x^2$ no sea analítica en $x = 0$ y el teorema 5.3.1 no sea aplicable. Por otra parte, nótese que la solución $y = x^{-1}$ no tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen (no es analítica en $x = 0$); por lo tanto, en este caso fracasaría el método de la sección 5.2

Ejemplo 4 La ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{5}$$

también tiene un punto singular en $x = 0$. Se puede verificar que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^2$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (5) y que las dos son analíticas en $x = 0$. Sin embargo, todavía no es adecuado proponer un problema con valor inicial con condiciones iniciales en $x = 0$. Es imposible prescribir condiciones iniciales arbitrarias en $x = 0$, puesto que cualquier combinación lineal de x y x^2 es cero en $x = 0$.

También es posible construir una ecuación diferencial en un punto singular x_0 tal que toda solución de la ecuación diferencial se vuelva no acotada cuando $x \to x_0$. Incluso si (5) no tiene una solución que permanezca acotada cuando $x \to x_0$, a menudo es importante determinar de qué manera se comportan las soluciones de la ecuación (1) cuando $x \to x_0$; por ejemplo, ¿y $\to \infty$ de la misma manera cuando $(x - x_0)^{-1}$ o $|x - x_0|^{-1/2}$ o lo hace de alguna otra manera?

Para desarrollar una teoría matemática razonablemente sencilla para resolver la ecuación (1) en la vecindad de un punto singular x_0, es necesario restringirse a los casos en los que las singularidades de las funciones Q/P y R/P en $x = x_0$ no sean demasiado severas; es decir, a lo que podrían llamarse "singularidades débiles". A priori, no es exactamente obvio qué es una singularidad aceptable. Sin embargo, más tarde se demostrará (ver los problemas 16 y 17 de la sección 5.7) que si P, Q y R son polinomios, las condiciones que distinguen las "singularidades débiles" son

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{es finito} \tag{6}$$

y

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{es finito.} \tag{7}$$

Esto significa que la singularidad en Q/P no puede ser peor que $(x - x_0)^{-1}$ y que la singularidad en R/P no puede ser peor que $(x - x_0)^{-2}$. Este punto se llama **punto singular regular** de la ecuación (1). Para funciones más generales que los polinomios, x_0 es un punto singular regular de la ecuación (1) si es un punto singular, y si tanto[8]

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{como} \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \tag{8}$$

[8] Las funciones que se dan en la ecuación (8) pueden no estar definidas en x_0, en cuyo caso deben tomarse sus valores en x_0 iguales a sus límites cuando $x \to x_0$.

tienen series de Taylor convergentes alrededor de x_0; es decir, si las funciones de (8) son analíticas en $x = x_0$. Las ecuaciones (6) y (7) implican que éste será el caso si P, Q y R son polinomios. Cualquier punto singular de (1) que no sea un punto singular regular se conoce como **punto singular irregular** de la ecuación (1).

En las secciones siguientes se analiza la manera de resolver la ecuación (1) en la vecindad de un punto singular regular. Un análisis de las soluciones de las ecuaciones diferenciales en la vecindad de puntos singulares irregulares rebasa el alcance de un texto elemental.

Ejemplo 5 En el ejemplo 2 se observó que los puntos singulares de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

son $x = \pm 1$. Determinar si estos puntos singulares son puntos singulares regulares o irregulares.

En primer lugar considérese el punto $x = 1$ y también obsérvese que al dividir entre $1 - x^2$, los coeficientes de y' y y son $-2x/(1-x^2)$ y $\alpha(\alpha+1)/(1-x^2)$, respectivamente. Por tanto, se calcula

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x} = 1$$

y

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x} = 0.$$

En virtud de que estos límites son finitos, el punto $x = 1$ es un punto singular regular. Es posible demostrar de manera semejante que $x = -1$ también es un punto singular regular.

Ejemplo 6 Determinar los puntos singulares de la ecuación diferencial

$$2(x-2)^2xy'' + 3xy' + (x-2)y = 0,$$

y clasificarlos como regulares o irregulares.

Si se divide la ecuación diferencial entre $2(x-2)^2x$, se tiene

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2(x-2)x}y = 0,$$

de modo que $p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x-2)^2$ y $q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x-2)$. Los puntos singulares son $x = 0$ y $x = 2$. Considérese $x = 0$; se tiene

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)} = 0.$$

Como estos límites son finitos, $x = 0$ es un punto singular regular. Para $x = 2$ se tiene

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2},$$

de modo que el límite no existe; de donde, $x = 2$ es un punto singular irregular.

Ejemplo 7 Determinar los puntos singulares de

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$$

y clasificarlos como regulares o irregulares.

El único punto singular es $x = \pi/2$. A fin de estudiarlo, considérense las funciones

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)p(x) = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\cos x}{x-\pi/2}$$

y

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 q(x) = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \operatorname{sen} x.$$

Si se parte de la serie de Taylor para $\cos x$ alrededor de $x = \pi/2$, se encuentra que

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)p(x) = -1 + \frac{(x-\pi/2)^2}{3!} - \frac{(x-\pi/2)^4}{5!} + \cdots.$$

Además,

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 q(x) = 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/2)^4}{4!} + \cdots.$$

Las dos series convergen para toda x; por consiguiente, se concluye que $\pi/2$ es un punto singular regular de esta ecuación.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 18, halle todos los puntos singulares de la ecuación dada y determine si cada uno de ellos es singular o irregular.

1. $xy'' + (1-x)y' + xy = 0$
2. $x^2(1-x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
3. $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$
4. $x^2(1-x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
5. $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ Ecuación de Bessel
7. $(x+3)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0$
8. $x(1-x^2)^3y'' + (1-x^2)^2y' + 2(1+x)y = 0$
9. $(x+2)^2(x-1)y'' + 3(x-1)y' - 2(x+2)y = 0$
10. $x(3-x)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$
11. $(x^2+x-2)y'' + (x+1)y' + 2y = 0$
12. $xy'' + e^xy' + (3\cos x)y = 0$
13. $y'' + (\ln|x|)y' + 3xy = 0$
14. $x^2y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0$
15. $x^2y'' - 3(\operatorname{sen} x)y' + (1+x^2)y = 0$
16. $xy'' + y' + (\cot x)y = 0$
17. $(\operatorname{sen} x)y'' + xy' + 4y = 0$
18. $(x\operatorname{sen} x)y'' + 3y' + xy = 0$

En cada uno de los problemas 19 y 20 demuestre que el punto $x = 0$ es un punto singular regular. En cada problema, intente hallar soluciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Demuestre que en el problema 19 sólo existe una solución diferente de cero de esta forma y que en el problema 20 no existen soluciones diferentes de cero de esta forma. Por tanto, en ningún caso es posible hallar la solución general de esta manera. Esto es típico de las ecuaciones con puntos singulares.

19. $2xy'' + 3y' + xy = 0$

20. $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$

21. **Singularidades en el infinito.** Las definiciones de punto ordinario y de punto singular regular que se dieron en las secciones precedentes son válidas sólo si el punto x_0 es finito. En trabajo más avanzado en las ecuaciones diferenciales a menudo es necesario analizar el punto en el infinito. Esto se lleva a cabo al efectuar el cambio de variable $\xi = 1/x$ y estudiar la ecuación resultante en $\xi = 0$. Demuestre que para la ecuación diferencial $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ el punto en el infinito es un punto ordinario si

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{y} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

tienen desarrollos en serie de Taylor alrededor de $\xi = 0$. También demuestre que el punto en el infinito es un punto singular regular si por lo menos una de las funciones anteriores no tiene un desarrollo en serie de Taylor, pero que tanto

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \text{ como } \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

sí tienen esos desarrollos.

En cada uno de los problemas 22 a 25, use los resultados del problema 21 para determinar si el punto en el infinito es un punto ordinario, un punto singular regular o un punto singular irregular de la ecuación diferencial dada.

22. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, Ecuación de Legendre
23. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, Ecuación de Bessel
24. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, Ecuación de Hermite
25. $y'' - xy = 0$, Ecuación de Airy

5.5 Ecuaciones de Euler

El ejemplo más sencillo de una ecuación diferencial que tiene un punto singular regular es la ecuación de Euler o ecuación equidimensional,

$$L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \tag{1}$$

en donde α y β son constantes. A menos de que se indique lo contrario, se considerará que α y β son reales. Es fácil demostrar que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (1). Debido a que la solución de la ecuación de Euler es típica de las soluciones de todas las ecuaciones diferenciales con un punto singular regular, vale la pena considerar esta ecuación con todo detalle, antes de analizar el problema más general.

En cualquier intervalo que no incluye el origen, la ecuación (1) tiene una solución general de la forma $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ en donde y_1 y y_2 son linealmente independientes. Por conveniencia, en primer lugar se considerará el intervalo $x > 0$, extenderán posteriormente los resultados al intervalo $x < 0$. Primero, obsérvese que $(x^r)' = rx^{r-1}$ y $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$. De donde, si se supone que (1) tiene una solución de la forma

$$y = x^r, \tag{2}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r[r(r-1) + \alpha r + \beta]. \end{aligned} \tag{3}$$

Si r es una raíz de la ecuación cuadrática

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0, \tag{4}$$

$L[x^r]$ es cero y $y = x^r$ es una solución de la ecuación (1). Las raíces de la ecuación (4) son

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}, \tag{5}$$

y $F(r) = (r - r_1)(r_1 - r_2)$. Como para las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es necesario considerar por separado los casos en los que las raíces son reales y diferentes, reales pero iguales y complejas conjugadas. De hecho, todo el análisis de esta sección es semejante al tratamiento de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes del capítulo 3, pero reemplazando e^{rx} por x^r; ver también el problema 23.

Al resolver una ecuación específica de Euler, se recomienda hacer la sustitución $y = x^r$ en la ecuación, determinar la ecuación cuadrática (4) y, a continuación, calcular las raíces r_1 y r_2, en vez de memorizar la fórmula (5).

Raíces reales distintas. Si $F(r) = 0$ tiene las raíces reales r_1 y r_2, con $r_1 \neq r_2$, entonces $y_1(x) = x^{r_1}$ y $y_2(x) = x^{r_2}$ son soluciones de la ecuación (1). Como $W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$ no se anula para $r_1 \neq r_2$ y $x > 0$, se deduce que la solución general de (1) es

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{6}$$

Nótese que si r no es un número racional, entonces x^r se define por $x^r = e^{r \ln x}$.

Ejemplo 1 Resolver

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{7}$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$ da

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0.$$

De donde, $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$, de modo que

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \qquad x > 0. \tag{8}$$

Raíces iguales. Si las raíces r_1 y r_2 son iguales, entonces se obtiene sólo una solución $y_1(x) = x^{r_1}$ de la forma supuesta. Puede obtenerse una segunda solución por el método de reducción de orden, pero para efectos de análisis futuro se considerará un método alternativo. Dado que $r_1 = r_2$, se sigue que $F(r) = (r - r_1)^2$. Por tanto, en este caso no solamente $F(r_1) = 0$, también $F'(r_1) = 0$. Esto sugiere derivar la ecuación (3) con respecto a r y luego hacer r igual a r_1. Si se deriva la (3) con respecto a r da

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r} [x^r F(r)].$$

Si se sustituye $F(r)$ por su expresión, se intercambia la derivación con respecto a x y con respecto a r y se observa que $\partial(x^r)/\partial r = x^r \ln x$. Se obtiene

$$L[x^r \ln x] = (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r. \tag{9}$$

El segundo miembro de la ecuación (9) es cero para $r = r_1$; como consecuencia,

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \qquad x > 0, \tag{10}$$

es una segunda solución de la ecuación (1). Es fácil demostrar que $W(x^{r_1}, x^{r_1} \ln x) = x^{2r_1 - 1}$. De donde, x^{r_1} y $x^{r_1} \ln x$ son linealmente independientes para $x > 0$ y la solución general de (1) es

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \qquad x > 0. \tag{11}$$

Ejemplo 2

Resolver

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0. \tag{12}$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$ da

$$x^r[r(r - 1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

De donde, $r_1 = r_2 = -2$ y

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \qquad x > 0. \tag{13}$$

Raíces complejas. Por último, supóngase que las raíces r_1 y r_2 son complejos conjugados, por ejemplo, $r_1 = \lambda + i\mu$ y $r_2 = \lambda - i\mu$, con $\mu \neq 0$. Ahora se debe explicar qué se entiende por x^r cuando r es un complejo. Si se recuerda que

$$x^r = e^{r \ln x} \tag{14}$$

cuando $x > 0$ y r es real, es posible utilizar esta ecuación para *definir* x^r cuando r es un complejo; entonces,

$$\begin{aligned} x^{\lambda + i\mu} = e^{(\lambda + i\mu) \ln x} &= e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda [\cos(\mu \ln x) + i \operatorname{sen}(\mu \ln x)], \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Con esta definición de x^r para valores complejos de r, es posible verificar que se cumple las leyes usuales del álgebra y el cálculo diferencial y, por tanto, en efecto x^{r_1} y x^{r_2} son soluciones de la ecuación (1). La solución general de (1) es

$$y = c_1 x^{\lambda + i\mu} + c_2 x^{\lambda - i\mu}. \tag{16}$$

La desventaja de esta expresión es que las funciones $x^{\lambda + i\mu}$ y $x^{\lambda - i\mu}$ son de valores complejos. Recuérdese que se tuvo una situación semejante para la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes cuando las raíces de la ecuación características fueron complejas. De la misma manera en que se procedió entonces, se observa que las partes real e imaginaria de $x^{\lambda + i\mu}$, a saber,

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \qquad \text{y} \qquad x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x), \tag{17}$$

también son soluciones de la ecuación (1). Con un cálculo directo se demuestra que

$$W[x^\lambda \cos(\mu \ln x), x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x)] = \mu x^{2\lambda - 1}.$$

De donde, estas soluciones también son linealmente independientes para $x > 0$ y la solución general de la ecuación (1) es

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x), \qquad x > 0. \tag{18}$$

Ejemplo 3 Resolver

$$x^2 y'' + xy' + y = 0. \tag{19}$$

Si se hace la sustitución $y = x^r$, da

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2 + 1) = 0.$$

De donde, $r = \pm i$ y la solución general es

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x), \qquad x > 0. \tag{20}$$

Considérese ahora el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación (1) cerca del punto singular $x = 0$. Esto depende por completo de la naturaleza de los exponentes r_1 y r_2. En primer lugar si r es real y positiva, $x^r \to 0$ cuando x tiende a cero a través de valores positivos. Por otra parte, si r es real y negativa, entonces x^r se vuelve no acotada, mientras que si $r = 0$, entonces $x^r = 1$. Estas posibilidades se muestran en la figura 5.5.1 para varios valores de r. Si r es un complejo, entonces una solución típica es $x^\lambda \cos(\mu \ln x)$. Esta función se vuelve no acotada o tiende a cero si λ es negativa o positiva, respectivamente, y también oscila cada vez más rápido cuando $x \to 0$. Este comportamiento se observa en las figuras 5.5.2 y 5.5.3 para valores seleccionados de λ y μ. Si $\lambda = 0$, la oscilación es de amplitud constante. Por último, si se tiene raíces repetidas, entonces una solución es de la forma $x^r \ln x$, que tiende a cero si $r > 0$ y se vuelve no acotada si $r < 0$. En la figura 5.5.4 se muestra un ejemplo de cada caso.

La extensión de las soluciones de la ecuación (1) hacia el intervalo $x < 0$ puede llevarse a cabo de manera relativamente directa. La dificultad reside en comprender lo que se entiende por x^r cuando x es negativa y r no es un entero; de manera semejante, no se ha

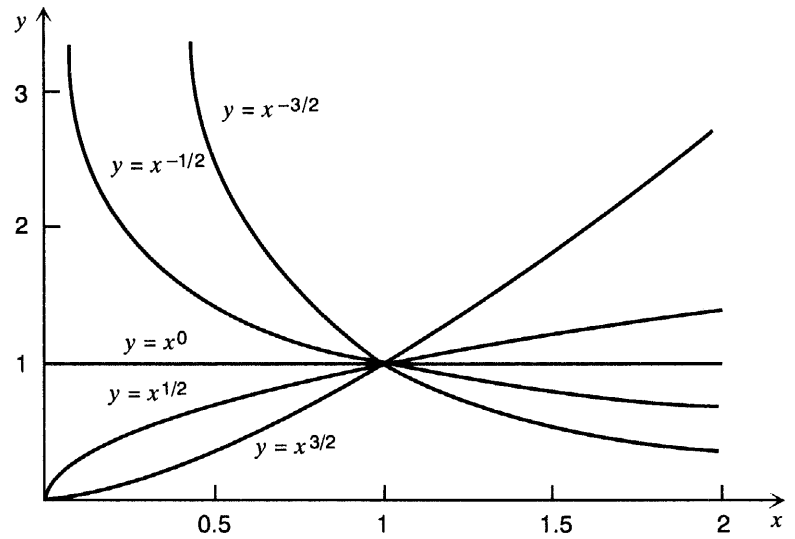


FIGURA 5.5.1 Soluciones de una ecuación de Euler; raíces reales.

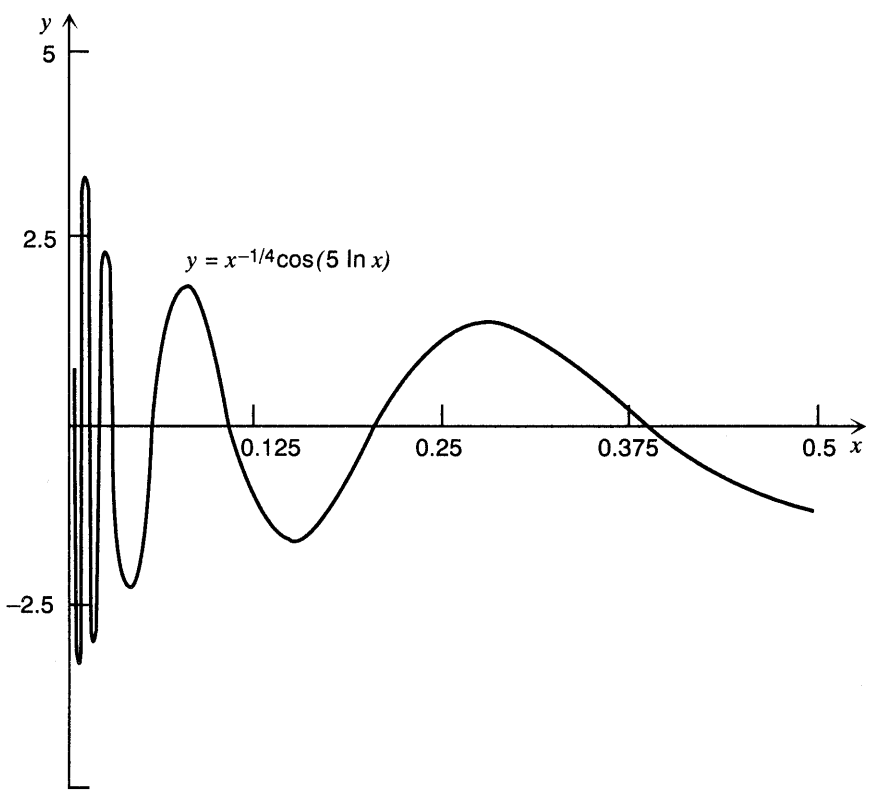


FIGURA 5.5.2 Solución de una ecuación de Euler; raíces complejas con parte real negativa.

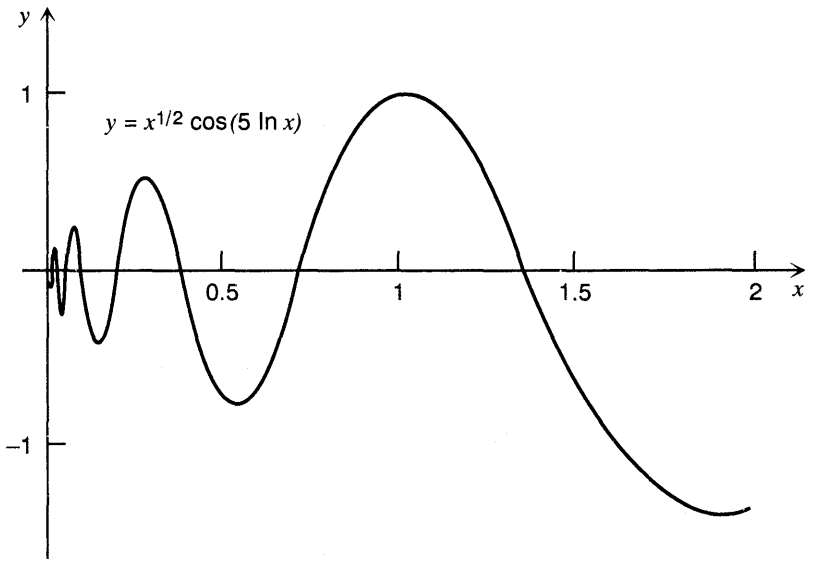


FIGURA 5.5.3 Solución de una ecuación de Euler; raíces complejas con parte real positiva.

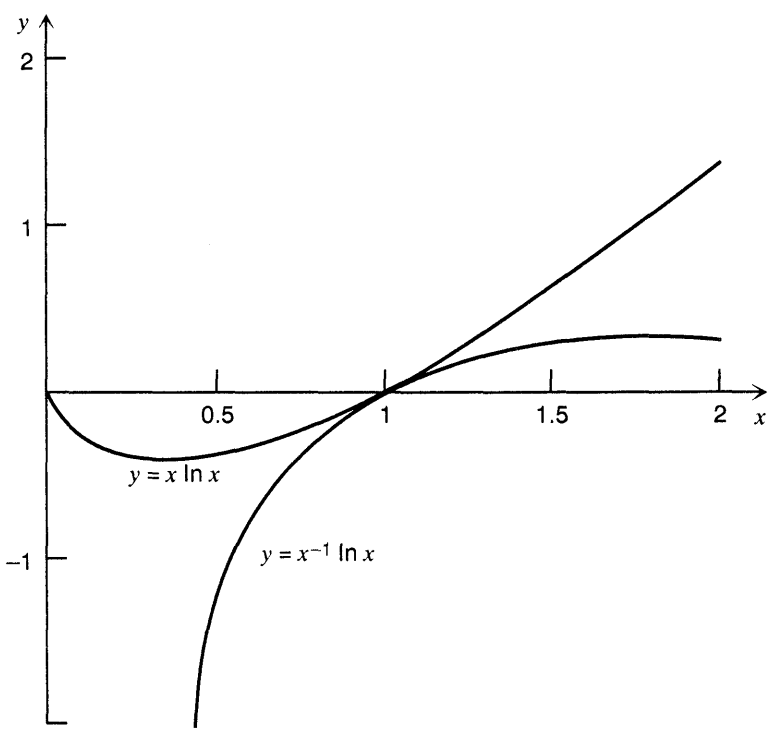


FIGURA 5.5.4 Soluciones de una ecuación de Euler; raíces repetidas.

definido ln x para $x < 0$, pero en general son de valores complejos. Es posible demostrar que las soluciones de la ecuación de Euler que se han dado para $x > 0$ son válidas para $x < 0$, pero en general son de valores complejos. Por tanto, en el ejemplo 1, la solución $x^{1/2}$ es imaginaria para $x < 0$.

Siempre es posible obtener soluciones de valores reales de la ecuación de Euler (1) en el intervalo $x < 0$ al hacer el cambio de variable que se indica a continuación. Sea $x = -\xi$, en donde $\xi > 0$, y sea $y = u(\xi)$; entonces se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{21}$$

Por tanto, para $x < 0$ la ecuación (1) toma la forma

$$\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi\frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \qquad \xi > 0. \tag{22}$$

Pero este es exactamente el problema que se acaba de resolver; por las ecuaciones (6), (11) y (18) se tiene

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_2} \\ (c_1 + c_2 \ln \xi)\xi^{r_1} \\ c_1\xi^{\lambda}\cos(\mu \ln \xi) + c_2\xi^{\lambda}\operatorname{sen}(\mu \ln \xi), \end{cases} \tag{23}$$

dependiendo de si los ceros de $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ son reales y diferentes, reales e iguales o complejos conjugados. A fin de obtener u en términos de x se sustituye ξ por $-x$ en las ecuaciones (23).

Se puede combinar los resultados para $x > 0$ y $x < 0$ al recordar que $|x| = x$ si $x > 0$ y que $|x| = -x$ si $x < 0$. Por tanto, basta sustituir x por $|x|$ en (6), (11) y (18) para obtener soluciones de valores reales válidas en cualquier intervalo que no contenga el origen (ver también los problemas 30 y 31). Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 5.5.1 La solución general de la ecuación de Euler (1)

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

en cualquier intervalo que no contenga el origen queda determinada por las raíces r_1 y r_2 de la ecuación

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0.$$

Si las raíces son reales y diferentes, entonces

$$y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}. \tag{24}$$

Si las raíces son reales e iguales, entonces

$$y = (c_1 + c_2 \ln |x|)|x|^{r_1}. \tag{25}$$

Si las raíces son complejas, entonces

$$y = |x|^{\lambda}[c_1\cos(\mu \ln |x|) + c_2\operatorname{sen}(\mu \ln |x|)] \tag{26}$$

en donde $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

Las soluciones de una ecuación de Euler de la forma

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0 \tag{27}$$

son semejantes a las dadas en el teorema 5.5.1. Si se buscan soluciones de la forma $y = (x - x_0)^r$, entonces la solución general se expresa por las ecuaciones (24), (25) o (26), en donde x se sustituye por $x - x_0$. De otra manera, se puede reducir la ecuación (27) a la forma de la ecuación (1) al efectuar el cambio de variable independiente $t = x - x_0$.

La situación para una ecuación diferencial general de segundo orden con un punto singular regular es semejante a la de la ecuación de Euler. Este problema se considera en la sección siguiente.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 12 determine la solución general de la ecuación diferencial dada que sea válida en cualquier intervalo que no incluya el punto singular.

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x + 1)^2y'' + 3(x + 1)y' + 0.75y = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2y'' - xy' + y = 0$
6. $(x - 1)^2y'' + 8(x - 1)y' + 12y = 0$
7. $x^2y'' + 6xy' - y = 0$
8. $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
10. $(x - 2)^2y'' + 5(x - 2)y' + 8y = 0$
11. $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

En cada uno de los problemas 13 a 16, encuentre la solución del problema con valor inicial dado.

13. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4$
14. $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -3$
15. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 3$
16. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$

17. Halle todos los valores de α para los que todas las soluciones de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tienden a cero cuando $x \to 0$.
18. Halle todos los valores de β para los que todas las soluciones de $x^2y'' + \beta y = 0$ tienden a cero cuando $x \to 0$.
19. Halle γ de modo que la solución del problema con valor inicial $x^2y'' - 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \gamma$ sea acotado cuando $x \to 0$.
20. Encuentre todos los valores de α para los que todas las soluciones de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tiendan a cero cuando $x \to \infty$.
21. Considere la ecuación de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$. Determine las condiciones sobre α y β de modo que
    a) todas las soluciones tiendan a cero cuando $x \to 0$.
    b) todas las soluciones sean acotadas cuando $x \to 0$.
    c) todas las soluciones tiendan a cero cuando $x \to \infty$.
    d) todas las soluciones sean acotadas cuando $x \to \infty$.
    e) todas las soluciones sean acotadas cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$.
22. Con aplicación el método de reducción de orden, demuestre que si r_1 es una raíz repetida de $r(r - 1) + \alpha r + \beta = 0$, entonces x^{r_1} y $x^{r_1} \ln x$ son soluciones de $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ para $x > 0$.

23. **Transformación a una ecuación con coeficientes constantes.** La ecuación de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ se puede reducir a una ecuación con coeficientes constantes mediante un cambio de la variable independiente. Sea $x = e^z$ o $z = \ln x$, y considere sólo el intervalo $x > 0$.

a) Demuestre que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}.$$

b) Demuestre que la ecuación de Euler queda

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0.$$

Si por r_1 y r_2 se denotan las raíces de $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$, demuestre que

c) si r_1 y r_2 son reales y diferentes, entonces

$$y = c_1e^{r_1z} + c_2e^{r_2z} = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}.$$

d) si r_1 y r_2 son reales e iguales, entonces

$$y = (c_1 + c_2z)e^{r_1z} = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}.$$

e) si r_1 y r_2 son complejos conjugados, $r_1 = \lambda + i\mu$, entonces

$$y = e^{\lambda z}[c_1 \cos(\mu z) + c_2 \operatorname{sen}(\mu z)] = x^{\lambda}[c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\mu \ln x)].$$

En cada uno de los problemas 24 a 29, aplique el método del problema 23 para resolver la ecuación dada para $x > 0$.

24. $x^2y'' - 2y = 0$
25. $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x$
26. $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$
27. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x$
28. $x^2y'' + xy' + 4y = \operatorname{sen}(\ln x)$
29. $3x^2y'' + 12xy' + 9y = 0$

30. Demuestre que si $L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y$, entonces

$$L[(-x)^r] = (-x)^rF(r)$$

para toda $x < 0$, en donde $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$. De donde, concluye que si $r_1 \neq r_2$ son raíces de $F(r) = 0$, entonces dos soluciones linealmente independientes de $L[y] = 0$ para $x < 0$ son $(-x)^{r_1}$ y $(-x)^{r_2}$.

31. Suponga que x^{r_1} y x^{r_2} son soluciones de una ecuación de Euler, en donde $r_1 \neq r_2$ y r_1 es un entero. Según la ecuación (24), la solución general en cualquier intervalo que no contenga el origen es $y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$. Demuestre que la solución general también puede escribirse como $y = k_1x^{r_1} + k_2x^{r_1}$.

Sugerencia: demuestre mediante una elección adecuada de las constantes, que las expresiones son idénticas para $x > 0$, y con una elección diferente de constantes que son idénticas para $x < 0$.

Coeficientes complejos. Si las constantes α y β de la ecuación de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ son números complejos, sigue siendo posible obtener soluciones de la forma x^r. Sin embargo, en general, las soluciones ya no son de valores reales. En cada uno de los problemas 32 a 34, determine la solución general de la ecuación dada.

32. $x^2y'' + 2ixy' - iy = 0$
33. $x^2y'' + (1 - i)xy' + 2y = 0$
34. $x^2y'' + xy' - 2iy = 0$

5.6 Soluciones en serie cerca de un punto singular regular, parte I

A continuación se considerará la cuestión de resolver la ecuación lineal general de segundo orden

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

en la vecindad de un punto singular regular $x = x_0$. Por conveniencia, se supone que $x_0 = 0$. Si $x_0 \neq 0$, la ecuación puede transformarse en una para la que el punto singular regular está en el origen al hacer $x - x_0$ igual a t.

El hecho de que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (1) significa que $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ y $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ tienen límites finitos cuando $x \to 0$ y que son analíticas en $x = 0$. Por tanto, tienen desarrollos en series de potencias de la forma

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

que son convergentes para algún intervalo $|x| < \rho$, $\rho > 0$, alrededor del origen. Para hacer que las cantidades $xp(x)$ y $x^2q(x)$ aparezcan en (1), es conveniente dividir la entre $P(x)$ y después multiplicar por x^2, obtener

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{3a}$$

o bien,

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)y' + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)y = 0. \tag{3b}$$

Si todos los p_n y los q_n son cero excepto

$$p_0 = \lim_{x \to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}, \tag{4}$$

la ecuación (3) se reduce a la ecuación de Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \tag{5}$$

que se estudió en la sección anterior. Por supuesto, en general algunos de los p_n y los q_n, $n \geq 1$, no son cero. Sin embargo, el carácter esencial de las soluciones de (3) es idéntico al de las soluciones de la ecuación de Euler. La presencia de los términos $p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots$ y $q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots$ tan sólo complica los cálculos.

Principalmente, el análisis se restringirá al intervalo $x > 0$. Puede tratarse el intervalo $x < 0$ del mismo modo que para la ecuación de Euler, al hacer el cambio de variable $x = -\xi$ y después resolver la ecuación resultante para $\xi > 0$.

Dado que los coeficientes de la ecuación (3) son "coeficientes de Euler" multiplicados por series de potencias, es natural buscar soluciones de la forma "soluciones de Euler" multiplicadas por series de potencias. Así se supone que

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r}, \tag{6}$$

en donde $a_0 \neq 0$. En otras palabras, r es el exponente del primer término de la serie y a_0 es su coeficiente. Como parte de la solución, es necesario determinar:

1. Los valores de r para los que la ecuación (1) tiene una solución de la forma (6)
2. La relación de recurrencia para los coeficientes a_n.
3. El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

La teoría general se debe a Frobenius[9] y es bastante complicada. En vez de intentar presentar esta teoría, simplemente se supondrá en ésta y en las tres secciones siguientes que en realidad existe una solución de la forma propuesta. En particular, se supone que cualquier serie de potencias en una expresión de una solución tiene un radio de convergencia diferente de cero y la atención se concentra en demostrar la manera de determinar los coeficientes en esa serie. A fin de ilustrar el método de Frobenius, en primer lugar se considerá un ejemplo

Ejemplo 1 Resolver la ecuación diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0. \tag{7}$$

Es fácil demostrar que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (7). Por comparación con las ecuaciones (3a) y (3b), se ve que $xp(x) = -1/2$ y $x^2q(x) = (1 + x)/2$. Por tanto, $P_0 = -1/2$, $q_0 = 1/2$ y todos las demás p y q son cero. Entonces, por la ecuación (5), la ecuación de Euler correspondiente a la (7) es

$$2x^2y'' - xy' + y = 0. \tag{8}$$

Para resolver la ecuación (7) se supone que existe una solución de la forma (6). Entonces y' y y'' se expresan por

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n + r)x^{n+r-1} \tag{9}$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n + r)(n + r - 1)x^{n+r-2}. \tag{10}$$

Al sustituir las expresiones para y, y' y y'' en (7) se obtiene

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = &\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n + r)(n + r - 1)x^{n+r} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n + r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

El último término en la ecuación (11) se puede escribir como $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r}$, de modo que al combinar los términos de (11) se obtiene

[9] Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) fue (como Fuchs) estudiante y finalmente profesor en la Universidad de Berlín. Demostró cómo construir soluciones en serie alrededor de puntos singulares regulares en 1874. Sin embargo, su trabajo más distinguido fue en álgebra, en donde fue uno de los primeros en desarrollar la teoría de grupos.

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = a_0[2r(r-1) - r + 1]x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \{[2(n + r)(n + r - 1) - (n + r) + 1]a_n + a_{n-1}\}x^{n+r} = 0. \tag{12}$$

Si se debe satisfacer la ecuación (12) para toda x, el coeficiente de cada potencia de x de (12) debe ser cero. De los coeficientes de x^r se obtiene, dado que $a_0 \neq 0$,

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0. \tag{13}$$

La ecuación (13) se llama **ecuación indicial** de la ecuación (7). Nótese que es exactamente la ecuación polinomial que se hubiera obtenido para la ecuación de Euler (8) asociada con la ecuación (7). Las raíces de la ecuación indicial son

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 1/2. \tag{14}$$

Estos valores de r se llaman **exponentes de la singularidad** en el punto singular regular $x = 0$, y determinan el comportamiento cualitativo de la solución (6) en la vecindad del punto singular.

Ahora se regresa a la ecuación (12) y se iguala a cero el coeficiente de x^{n+r}, esto da la relación

$$[2(n + r)(n + r - 1) - (n + r) + 1]a_n + a_{n-1} = 0 \tag{15}$$

o bien,

$$a_n = -\frac{1}{2(n + r)^2 - 3(n + r) + 1}\, a_{n-1} = -\frac{1}{[(n + r) - 1][2(n + r) - 1]}\, a_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{16}$$

Para cada raíz r_1 y r_2 de la ecuación inicial se aplica la relación de recurrencia (16) para determinar un conjunto de coeficientes $a_1, a_2, \ldots$. Para $r = r_1 = 1$, la ecuación (16) queda

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n + 1)n}, \qquad n \geq 1.$$

Por tanto,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{(3 \cdot 5)(1 \cdot 2)},$$

y

$$a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 3} = -\frac{a_0}{(3 \cdot 5 \cdot 7)(1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

En general, se tiene

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n + 1)]n!}\, a_0, \qquad n \geq 1. \tag{17}$$

De donde, si se omite el multiplicador constante a_0, una solución de la ecuación (8) es

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n + 1)]n!}\right], \qquad x > 0. \tag{18}$$

Para determinar el radio de convergencia de la serie dada en (18) se aplica la prueba de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(2n+3)(n+1)} = 0$$

para toda x. Por tanto, la serie converge para toda x.

De manera correspondiente, para la segunda raíz $r = r_2 = \frac{1}{2}$ se procede análoga. Por la ecuación (16) se tiene

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(n-\frac{1}{2})} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \qquad n \geq 1.$$

De donde,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1\cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = \frac{a_0}{(1\cdot 2)(1\cdot 3)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3\cdot 5} = -\frac{a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 3\cdot 5)},$$

y en general

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n![1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]}, \qquad n \geq 1. \tag{19}$$

Una vez más, si se omite el multiplicador constante a_0, se obtiene la segunda solución

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n![1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]}\right], \qquad x > 0. \tag{20}$$

Como antes, es posible demostrar que la serie de la ecuación (20) converge para toda x. Como los primeros términos las soluciones en serie y_1 y y_2 son x y $x^{1/2}$, respectivamente, es evidente que las soluciones son linealmente independientes. De donde la solución general de la ecuación (7) es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad x > 0.$$

El ejemplo anterior ilustra que si $x = 0$ es un punto singular regular, entonces a veces se tienen dos soluciones de la forma (6) en la vecindad de este punto. De manera análoga, si hay un punto singular regular en $x = x_0$, entonces puede haber dos soluciones de la forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{21}$$

que son válidas cerca de $x = x_0$, sin embargo, precisamente como una ecuación de Euler puede no tener dos soluciones de la forma $y = x^r$, así una ecuación más general con un punto singular regular puede no tener dos soluciones de la forma (6) o (21). En particular, en la siguiente sección se demostrará que si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación inicial son iguales, o difieren en un entero, la segunda solución normalmente tiene una estructura más complica-

da. Aunque en todo caso, es posible encontrar por lo menos una solución de la forma (6) o (21); si r_1 y r_2 difieren en un entero, esta solución corresponde al valor más grande de r. Si sólo existe una de esas soluciones, la segunda solución comprende un término logarítmico, del mismo modo que para la ecuación de Euler cuando las raíces de la ecuación característica son iguales. En estos casos se puede recurrir al método de reducción de orden o a algún otro procedimiento para determinar la segunda solución. Esto se analiza en las secciones 5.8 y 5.9.

Si las raíces de la ecuación inicial son complejas, entonces no pueden ser iguales o diferir en un entero, de modo que siempre existen dos soluciones de la forma (6) o (21). Por supuesto, estas soluciones son funciones de valores complejos de x. Sin embargo, así como para la ecuación de Euler, es posible obtener soluciones de valores reales al tomar las partes real e imaginaria de las soluciones complejas.

Por último, se menciona una cuestión práctica. Si P, Q y R son polinomios, a menudo es mucho mejor trabajar directamente con la ecuación (1) que con la (3). Esto evita la necesidad de expresar $xQ(x)/P(x)$ y $x^2R(x)/P(x)$ como series de potencias. Por ejemplo, es más conveniente considerar la ecuación

$$x(1 + x)y'' + 2y' + xy = 0$$

que escribirla en la forma

$$x^2y'' + \frac{2x}{1 + x}y' + \frac{x^2}{1 + x}y = 0,$$

lo cual impone desarrollar $2x/(1 + x)$ y $x^2/(1 + x)$ en series de potencias.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 10, demuestre que la ecuación diferencial dada tiene un punto singular regular en $x = 0$. Determine la ecuación indicial, la relación de recurrencia y las raíces de la ecuación indicial. Halle la solución en serie ($x > 0$) correspondiente a la raíz más grande. Si las raíces son desiguales y no difieren en un entero, encuentre también la solución en serie correspondiente a la raíz más pequeña.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$
3. $xy'' + y = 0$
4. $xy'' + y' - y = 0$
5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$
7. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$
8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9. $x^2y'' - x(x + 3)y' + (x + 3)y = 0$
10. $x^2y'' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$

11. La ecuación de Legendre de orden α es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

La solución de esta ecuación cerca del punto ordinario $x = 0$ se analizó en los problemas 20 y 21 de la sección 5.3. En el ejemplo 4 de la sección 5.4 se demostró que $x = \pm 1$ son puntos singulares regulares. Determine la ecuación indicial y sus raíces para el punto $x = 1$. Encuentre una solución en serie en potencias de $x - 1$ para $x - 1 > 0$.
Sugerencia: escriba $1 + x = 2 + (x - 1)$ y $x = 1 + (x - 1)$. De manera opcional haga el cambio de variable $x - 1 = t$ y determine una solución en serie en potencias de t.

12. La ecuación de Chebyshev es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

en donde α es una constante; ver el problema 10 de la sección 5.3.
a) Demuestre que $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares y encuentre los exponentes en cada una de estas singularidades.
b) Encuentre dos soluciones linealmente independientes alrededor de $x = 1$.

13. La ecuación diferencial de Laguerre[10] es

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular. Determine la ecuación indicial, sus raíces, la relación de recurrencias y una solución ($x > 0$). Demuestre que si $\lambda = m$, un entero positivo, esta solución se reduce a un polinomio. Si se normaliza adecuadamente, este polinomio se conoce como polinomio de Laguerre, $L_m(x)$.

14. La ecuación de Bessel de orden cero es

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular; que las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = r_2 = 0$, y que una solución para $x > 0$ es

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Observe que la serie converge para toda x, no sólo para $x > 0$. En particular, $J_0(x)$ es acotada cuando $x \to 0$. La función J_0 se conoce como función de Bessel de primera clase de orden cero.

15. Con referencia al problema 14 demuestre, con la aplicación del método de reducción de orden, que la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero contiene un término logarítmico.
Sugerencia: si $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, entonces

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Encuentre el primer término en el desarrollo en series de $1/x[J_0(x)]^2$.

16. La ecuación de Bessel de orden uno es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

a) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular; que las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$, y que una solución para $x > 0$ es

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!n!2^{2n}}.$$

Como en el problema 14, observe que la serie en realidad converge para toda x y que $J_1(x)$ es acotada cuando $x \to 0$. La función J_1 se conoce como función de Bessel de primera clase de orden uno.

[10] Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886), geómetra y analista francés, estudió alrededor de 1879 los polinomios que llevan su nombre.

b) Demuestre que es imposible determinar una segunda solución de la forma

$$x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$

5.7 Soluciones en serie cerca de un punto singular regular, parte II

A continuación considérese el problema general de determinar una solución de la ecuación

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0 \tag{1}$$

en donde

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

y las dos series tienen radios de convergencia diferentes de cero (ver la ecuación (3b) de la sección 5.6). El punto $x = 0$ es un punto singular regular y la ecuación de Euler correspondiente es

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0. \tag{2}$$

Se busca una solución de la ecuación (1) para $x > 0$ y se supone que tiene la forma

$$y = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \tag{3}$$

en donde $a_0 \neq 0$. Si se sustituye en la (1) da

$$\begin{aligned}
&a_0r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\
&\quad + (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots) \\
&\quad \times [a_0rx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots] \\
&\quad + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots) \\
&\quad \times (a_0x^r + a_1x^{r+1} + \cdots + a_nx^{r+n} + \cdots) = 0.
\end{aligned}$$

Al multiplicar entre sí las series infinitas y luego de agrupar términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
&a_0F(r)x^r + [a_1F(r+1) + a_0(p_1r + q_1)]x^{r+1} \\
&\quad + \{a_2F(r+2) + a_0(p_2r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\}x^{r+2} \\
&\quad + \cdots + \{a_nF(r+n) + a_0(p_nr + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}] \\
&\quad + \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\}x^{r+n} + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

o bien, en forma más compacta,

$$a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right\}x^{r+n} = 0, \tag{4}$$

en donde

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0. \tag{5}$$

Si la ecuación (4) se debe satisfacer idénticamente, el coeficiente de cada potencia de x debe ser cero.

Dado que $a_0 \neq 0$, el término que comprende x^r da lugar a la ecuación $F(r) = 0$. Esta ecuación se llama **ecuación indicial**; nótese que es exactamente la ecuación que se obtendría al buscar soluciones $y = x^r$ de la ecuación de Euler (2). Denótense las raíces de la ecuación indicial por r_1 y r_2, con $r_1 \geq r_2$ si las raíces son reales. Si las raíces son complejas, entonces no importa su designación. Sólo para estos valores de r es posible esperar que se encuentren soluciones de la ecuación (1) de la forma (3). Las raíces r_1 y r_2 se llaman **exponentes de la singularidad**, y determinan la naturaleza cualitativa de la solución en la vecindad del punto singular.

Si se igualan a cero el coeficiente de x^{r+n} de la ecuación (4) da relación de recurrencia

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \qquad n \geq 1. \tag{6}$$

La ecuación (6) muestra que, en general, a_n depende del valor de r y de todos los coeficientes precedentes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. También muestra que es posible calcular sucesivamente $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ en términos de los coeficientes de la serie para $xp(x)$ y $x^2q(x)$, en el supuesto de que $F(r+1), F(r+2), \ldots, F(r+n), \ldots$ no sean cero. Los únicos valores de r para los que $F(r) = 0$ son $r = r_1$ y $r = r_2$; dado que $r_1 + n$ no es igual a r_1 o a r_2 para $n \geq 1$, se concluye que $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$. De donde, siempre es posible determinar una solución

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right]. \tag{7}$$

Aquí se ha introducido la notación $a_n(r_1)$ para indicar que se ha determinado a_n a partir de la ecuación (6), con $r = r_1$. Asimismo, para definir, se ha tomado a_0 como uno.

Si r_2 no es igual a r_1 y $r_1 - r_2$ no es un entero positivo, entonces $r_2 + n$ no es igual a r_1 para ningún valor de $n \geq 1$; de donde, $F(r_2 + n) \neq 0$ y es posible obtener una segunda solución

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right]. \tag{8}$$

Antes de proseguir, se harán varias observaciones sobre las soluciones en serie (7) y (8). Dentro de sus radios de convergencia, las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definen funciones que son analíticas en $x = 0$. Por tanto, el comportamiento singular, en caso de presentarse, de las soluciones y_1 y y_2 queda determinado por los términos x^{r_1} y x^{r_2}, que multiplican estas dos funciones analíticas, respectivamente. A continuación, a fin de obtener soluciones de valores reales para $x < 0$, se puede hacer la sustitución $x = -\xi$ con $\xi > 0$. Como podría esperarse con base en el análisis hecho de la ecuación de Euler, resulta que basta reemplazar x^{r_1} de (7) y x^{r_2} en (8) por $|x|^{r_1}$ y $|x|^{r_2}$, respectivamente. Por último, se observa que si r_1 y r_2 son números complejos, entonces necesariamente son complejos conjugados y $r_2 \neq r_1 + N$. Por tanto, es posible calcular dos soluciones en serie de la forma (2); sin embargo, son funciones de valores complejos de x. Se pueden obtener soluciones de valores reales al tomar las partes real e imaginaria de las soluciones de valores complejos.

Si $r_1 = r_2$, sólo se obtiene una solución de la forma (2). La segunda solución contiene un término logarítmico. En la sección 5.8 se analiza un procedimiento para determinar una segunda solución se da un ejemplo en la sección 5.9.

Si $r_1 - r_2 = N$, en donde N es un entero positivo, entonces $F(r_2 + N) = F(r_1) = 0$, y no se puede determinar $a_N(r_2)$ a partir de la ecuación (6), a menos que su suma también sea cero para $n = N$. De ser así, es posible demostrar que a_N arbitraria y que puede obtenerse una segunda solución en serie; de no ser así, solamente se tiene una solución en serie de la forma (2). Si se trata de este último caso, entonces la segunda solución contiene un término logarítmico. El procedimiento se analiza brevemente en la sección 5.8 y en la sección 5.9 se dan ejemplos de los dos casos.

La siguiente cuestión que es necesario considerar es la convergencia de la serie infinita en las soluciones formales. Como podría esperarse, esto se relaciona con los radios de convergencia de las series de potencias para $xp(x)$ y $x^2q(x)$. En el siguiente teorema se resumen los resultados del análisis que se acaba de hacer y las conclusiones adicionales acerca de la convergencia de la solución en serie.

Teorema 5.7.1 Considérese la ecuación diferencial (1)

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

en donde $x = 0$ es un punto singular regular. Entonces, $xp(x)$ y $x^2q(x)$ son analíticas en $x = 0$ con los desarrollos convergentes en series de potencias

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para $|x| < \rho$, en donde $\rho > 0$ es el mínimo de los radios de convergencia de las series de potencias de $xp(x)$ y $x^2q(x)$. Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

con $r_1 \geq r_2$ si r_1 y r_2 son reales. Entonces en cualquiera de los dos intervalos $-\rho < x < 0$ o $0 < x < \rho$, existe una solución de la forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] \tag{9}$$

en donde las $a_n(r_1)$ se expresan por la relación de recurrencia (6) con $a_0 = 1$ y $r = r_1$. Si $r_1 - r_2$ no es cero o es un entero positivo, entonces en cualquiera de los dos intervalos $-\rho < x < 0$ ó $0 < x < \rho$, existe una segunda solución linealmente independiente de la forma

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right]. \tag{10}$$

Las $a_n(r_2)$ también quedan determinadas por la relación de recurrencia (6) con $a_0 = 1$ y $r = r_2$. Las series de potencias dadas en (9) y (10) convergen por lo menos para $|x| < \rho$.

Aunque es muy difícil dar aquí una demostración de este teorema, es posible hacer varias observaciones. En primer lugar, las series dadas en (9) y (10) pueden tener radios de convergencia mayores que ρ; de ser así, las soluciones (9) y (10) son válidas en intervalos

correspondientemente más grandes. Además, los valores de r_1 y r_2 y los exponentes en el punto singular son fáciles de determinar, basta resolver la ecuación

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{11}$$

cuyos coeficientes se expresan por

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x). \tag{12}$$

Nótese que éstos son exactamente los límites que es necesario comprobar para clasificar la singularidad como punto singular regular; por tanto, suelen determinarse en una etapa previa de la investigación.

Además, si $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{13}$$

en donde las funciones P, Q y R son polinomios, entonces $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ y $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Por tanto,

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}. \tag{14}$$

Por último, los radios de convergencia de las series dadas en (9) y (10) son por lo menos iguales a la distancia del origen al cero más próximo de P que no sea el propio de $x = 0$.

Ejemplo 1 Analizan la naturaleza de las soluciones de la ecuación

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

cerca de los puntos singulares.

Esta ecuación es de la forma (13) con $P(x) = 2x(1+x)$, $Q(x) = 3+x$ y $R(x) = -x$. Es evidente que los puntos $x = 0$ y $x = -1$ son puntos singulares. El punto $x = 0$ es un punto singular regular, ya que

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0.$$

Además, por la ecuación (14), $p_0 = \frac{3}{2}$ y $q_0 = 0$. Por tanto, la ecuación indicial es $r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$, y las raíces son $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Como estas raíces no son iguales y no difieren en un entero, existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \quad \text{y} \quad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\tfrac{1}{2})x^n\right]$$

para $0 < x < \rho$. Una cota inferior para el radio de convergencia de cada serie es 1, la distancia de $x = 0$ a $x = -1$, el otro cero de $P(x)$. Nótese que la solución y_1 es acotada cuando $x \to 0$; de hecho es analítica allí. Por otra parte, la segunda solución y_2 es no acotada cuando $x \to 0$.

El punto $x = -1$ también es un punto singular regular, ya que

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1,$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0.$$

En este caso, $p_0 = -1$, $q_0 = 0$, por lo que la ecuación indicial es $r(r-1) - r = 0$. Las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 2$ y $r_2 = 0$. Correspondiendo a la raíz más grande, existe una solución de la forma

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right].$$

La serie converge por lo menos para $x + 1 < 1$. Dado que las dos raíces difieren en un entero positivo, puede o no haber una segunda solución de la forma

$$y_2(x) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n\right].$$

No es posible decir más sin un análisis más profundo.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 12, halle todos los puntos singulares regulares de la ecuación diferencial dada. Determine la ecuación indicial y los exponentes de la singularidad en cada punto singular regular.

1. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$
2. $x^2y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0$
3. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$
4. $y'' + 4xy' + 6y = 0$
5. $x^2y'' + 3(\operatorname{sen} x)y' - 2y = 0$
6. $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$
7. $x^2y'' + \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x)y' + y = 0$
8. $(x+1)^2y'' + 3(x^2-1)y' + 3y = 0$
9. $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$
10. $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$
11. $(4-x^2)y'' + 2xy' + 3y = 0$
12. $x(x+3)^2y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

13. Demuestre que

$$x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y = 0$$

tiene un punto singular regular $x = 0$ y que las raíces de la ecuación indicial son ± 1. Determine los tres primeros términos diferentes de cero de la serie correspondiente a la raíz más grande.

14. Demuestre que

$$(\ln x)y'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0$$

tiene un punto singular regular en $x = 1$. Determine las raices de la ecuación indicial en $x = 1$. Determine los tres primeros términos diferentes de cero de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{r+n}$ correspondientes a la raíz más grande. Tome $x - 1 > 0$. ¿Cuál espera que sea el radio de convergencia de la serie?

15. En varios problemas de física matemática (por ejemplo, la ecuación de Schrödinger para un átomo de hidrógeno) es necesario estudiar la ecuación diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{i}$$

en donde α, β y γ son constantes. Esta ecuación se conoce como ecuación **hipergeométrica**.

a) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $1 - \gamma$.

b) Demuestre que $x = 1$ es un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $\gamma - \alpha - \beta$.

c) Si se supone que $1 - \gamma$ no es un entero positivo, demuestre que en la vecindad de $x = 0$ una solución de (i) es

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \cdots.$$

¿Cuál espera que sea el radio de convergencia de esta serie?

d) Si se supone que $1 - \gamma$ no es un entero o cero, demuestre que una segunda solución para $0 < x < 1$ es

$$y_2(x) = x^{(1-\gamma)}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2 + \cdots\right].$$

* e) Demuestre que el punto en el infinito es un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son α y β. Ver el problema 21 de la sección 5.4.

16. Considere la ecuación diferencial

$$x^3y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$

en donde α y β son constantes reales.

a) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular irregular.

b) Al intentar determinar una solución de la forma $x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, demuestre que la ecuación indicial para r es lineal y, en consecuencia, que solamente existe una solución formal de la forma supuesta.

c) Demuestre que si $\beta/\alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots$, entonces la solución formal en serie termina y, por consiguiente, en realidad es una solución. Para otros valores de β/α, demuestre que la solución formal en serie tiene un radio cero de convergencia y, por tanto, no representa en realidad una solución en cualquier intervalo.

17. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = 0, \tag{i}$$

en donde $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ son números reales y s y t son enteros positivos que, por el momento, son arbitrarios.

a) Demuestre que si $s > 1$ o $t > 2$, entonces el punto $x = 0$ es un punto singular irregular.

b) Intente encontrar una solución de la ecuación (i) de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0. \tag{ii}$$

Demuestre que si $s = 2$ y $t = 2$, entonces existe sólo un valor posible de r para el que existe una solución formal de (i), de la forma (ii).

c) Demuestre que si $s = 1$ y $t = 3$, no existen soluciones de (i), de la forma (ii).

d) Demuestre que los valores máximos de s y t para los que la ecuación indicial es cuadrática en r [y por tanto puede esperarse encontrar dos soluciones de la forma (ii)] son $s = 1$ y $t = 2$. Estas son precisamente las condiciones que distinguen una "singularidad débil", o punto singular regular, de un punto singular irregular, como se definieron en la sección 5.4.

Como nota de advertencia, es necesario señalar que aunque a veces es posible obtener una solución formal en serie de la forma (ii) en un punto singular irregular, la serie puede no tener un radio de convergencia positivo.

*5.8 Soluciones en serie cerca de un punto singular regular; $r_1 = r_2$ y $r_1 - r_2 = N$

Ahora se consideran los casos en los que las raíces de la ecuación indicial son iguales o difieren en un entero positivo, $r_1 - r_2 = N$. Por analogía con la ecuación de Euler, podría esperarse que si $r_1 = r_2$, entonces la segunda solución contiene un término logarítmico. Esto también puede ser cierto si las raíces difieren en un entero. El siguiente teorema, continuación en un entero. El siguiente teorema, continuación del teorema 5.7.1, resume la situación en estos dos casos excepcionales.

Teorema 5.8.1

Considérese la ecuación diferencial

$$L[y] = x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{1}$$

en donde $x = 0$ es un punto singular regular. Entonces, las funciones $xp(x)$ y $x^2q(x)$ son analíticas en $x = 0$ con las representaciones en serie de potencias

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

que convergen en algún intervalo $|x| < \rho$. Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{3}$$

en donde $r_1 \geq r_2$ si las raíces son reales. Entonces, en cualquiera de los dos intervalos $-\rho < x < 0$ y $0 < x < \rho$, la ecuación (1) tiene una solución de la forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right]. \tag{4}$$

Si $r_1 = r_2$, entonces la segunda solución es

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n. \tag{5}$$

Si $r_1 - r_2 = N$, un entero positivo, entonces

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]. \tag{6}$$

Los coeficientes $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ y la constante a pueden determinarse al sustituir por y la forma de las soluciones en serie en la ecuación (1). Puede resultar que la constante a sea cero, en cuyo caso no hay término logarítmico en la solución (6). Cada una de las series dadas en (4), (5) y (6) converge por lo menos para $|x| < \rho$ y define una función que es analítica en alguna vecindad de $x = 0$.

Raíces iguales. El método para hallar la segunda solución es en esencia el mismo que el usado para encontrar la segunda solución de la ecuación de Euler (ver la sección 5.5) cuando las raíces de la ecuación indicial fueron iguales. Se busca una solución de la ecuación (1), de la forma

$$y = \phi(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^r\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right), \tag{7}$$

en donde se ha escrito $y = \phi(r, x)$ para hacer resaltar el hecho de que ϕ depende de la elección de r. Si se sustituyen $xp(x)$ y $x^2q(x)$ por las series (2), se calculan y sustituyen y' y y'' a partir de la ecuación (7) y, por último, se agrupan términos, se obtiene (ver la ecuación (4) de la sección 5.7)

$$L[\phi](r, x) = a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_nF(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right\}x^{r+n}, \tag{8}$$

en donde

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0. \tag{9}$$

Si las dos raíces de la ecuación indicial son iguales a r_1, es posible obtener una solución al hacer r igual a r_1 y elegir las a_n de modo que cada término de la serie dado en la ecuación (8) sea cero.

Para determinar una segunda solución se considera r como una variable continua y se determinan las a_n como una función de r al requerir que el coeficiente de x^{r+n}, $n \geq 1$, de la ecuación (8) sea cero. Entonces, si se supone que $F(r+n) \neq 0$, se tiene

$$a_n(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]}{F(r+n)}, \qquad n \geq 1. \tag{10}$$

Con esta elección de las $a_n(r)$ para $n \geq 1$, (8) se reduce a

$$L[\phi](r, x) = a_0x^rF(r). \tag{11}$$

Dado que r_1 es una raíz repetida de $F(r)$, por la ecuación (9) se deduce que $F(r) = (r - r_1)^2$. Si se hace $r = r_1$ en la (11), se encuentra que $L[\phi](r_1, x) = 0$; de donde, como ya se sabe,

$$y_1(x) = \phi(r_1, x) = x^{r_1}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad x > 0, \tag{12}$$

es una solución de la ecuación (1). Pero lo que es más importante, también de (11) se deduce, como para la ecuación de Euler, que

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right](r_1, x) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r}\left[x^r(r - r_1)^2\right]\Big|_{r=r_1} \\ &= a_0\left[(r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r\right]\Big|_{r=r_1} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

De donde, una segunda solución de la ecuación (1) es

$$\begin{aligned} y_2(x) = \frac{\partial \phi(r, x)}{\partial r}\Big|_{r=r_1} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right]\right\}\Big|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1} \ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n \\ &= y_1(x) \ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n, \qquad x > 0, \end{aligned} \tag{14}$$

en donde $a_n'(r_1)$ denota da_n/dr evaluada en $r = r_1$ y $a_n(r)$ está dada por la ecuación (10).

Nótese que además de las suposiciones que ya se hicieron, también se ha supuesto que es permisible derivar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^n$ término a término con respecto a r. Además, puede ser difícil determinar $a_n(r_1)$ y $a_n'(r_1)$; sin embargo, la determinación de dos soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden con un punto singular regular no es, en general, una tarea fácil.

En resumen, existen tres maneras en las que es posible proceder para encontrar una segunda solución cuando $r_1 = r_2$. En primer lugar, es posible calcular los $b_n(r_1)$ directamente al sustituir y por la expresión (5) en la ecuación (1). En segundo, es posible calcular $b_n(r_1) = a_n'(r_1)$ al determinar primero $a_n(r)$ y después calcular $a_n'(r_1)$. Nótese que al calcular la primera solución es necesario conocer $a_n(r_1)$ de modo que sea fácil calcular la expresión general para los $a_n(r)$, a partir de la cual pueden calcularse $a_n(r_1)$ y $a_n'(r_1)$. El primer procedimiento puede ser más conveniente si sólo se requieren unos cuantos términos de la serie para $y_2(x)$ o si la fórmula para $a_n(r_1)$ es muy complicada o difícil de obtener. La tercera posibilidad es aplicar el método de reducción de orden, aunque esto no evitará el uso de series.

Raíces que difieren en un entero. Para este caso, los argumentos detallados para deducir la forma (6) de la segunda solución son considerablemente más complicados, por lo que no se darán aquí. Sin embargo, se hará notar que si se supone $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_2+n}$ entonces puede ser difícil calcular $a_N(r_2)$ a partir de la ecuación (10), ya que $F(r + N) = (r + N - r_1) \times (r + N - r_2) = (r - r_2)(r + N - r_2)$ se anula para $r = r_2$. Esta dificultad se supera al elegir a_0, que puede elegirse arbitariamente, como $r - r_2$. Entonces, cada una de las a será proporcional a $r - r_2$, de modo que habrá un factor de $r - r_2$ en el numerador de (10) para cancelar el

factor correspondiente en el denominador, que si presenta cuando $n = N$. Si se sigue un análisis semejante al del caso $r_1 = r_2$, resulta que la solución es de la forma (6) con

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}\left[(r - r_2)a_n(r)\right]\Big|_{r=r_2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

en donde $a_n(r)$ se expresa por la ecuación (10) con $a_0 = 1$ y con

$$a = \lim_{r \to r_2} (r - r_2)a_N(r). \tag{16}$$

Si $a_N(r_2)$ es finito, entonces $a = 0$ y no existe término logarítmico en y_2. El procedimiento se analiza en el libro de Coddington (capítulo 4).

En la práctica, la mejor manera de determinar si a es cero en la segunda solución es simplemente intentar calcular las a_n correspondientes a la raíz r_2 y ver si es posible determinar $a_N(r_2)$. En caso de ser posible, no hay mayor problema. Si no es así es necesario usar la forma (6) con $a \neq 0$.

Una vez más, en resumen, hay tres maneras para encontrar una segunda solución cuando $r_1 - r_2 = N$. En primer lugar, se puede calcular directamente a y $c_n(r_2)$ al sustituir por la expresión (6) en la ecuación (1). En segundo, se puede calcular $c_n(r_2)$ y a de la ecuación (6) si se aplican las fórmulas (15) y (16). Si este es el procedimiento planeado, entonces al calcular la solución correspondiente a $r = r_1$ es necesario asegurarse de obtener la fórmula general para $a_n(r)$ en vez de sólo para $a_n(r_1)$. La tercera posibilidad es aplicar el método de reducción de orden.

En la sección siguiente se dan tres ejemplos que ilustran los casos $r_1 = r_2$, $r_1 - r_2 = N$ con $a = 0$ y $r_1 - r_2 = N$ con $a \neq 0$.

*5.9 Ecuación de Bessel

En esta sección se consideran tres casos especiales de la ecuación de Bessel,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \tag{1}$$

en donde v es una constante, que ilustran la teoría analizada en la sección 5.8. Es fácil demostrar que $x = 0$ es un punto singular regular. Por sencillez, sólo se considera el caso $x > 0$.

Ecuación de Bessel de orden cero. Este ejemplo ilustra la situación en la que las raíces de la ecuación indicial son iguales. Si se hace $v = 0$ en la ecuación (1) da

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{2}$$

Al sustituir

$$y = \phi(r, x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{r+n}, \tag{3}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(n + r)(n + r - 1) + (n + r)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+2} \\ &= a_0[r(r - 1) + r]x^r + a_1[(r + 1)r + (r + 1)]x^{r+1} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n[(n+r)(n+r-1)+(n+r)] + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \qquad (4)$$

Las raíces de la ecuación indicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ son $r_1 = 0$ y $r_2 = 0$; de donde, se tiene el caso de raíces iguales. La ecuación de recurrencia es

$$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)(n+r-1)+(n+r)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}, \qquad n \geq 2. \qquad (5)$$

Para determinar $y_1(x)$, se hace r igual a cero. Entonces, por la ecuación (4), se concluye que para que el coeficiente de x^{r+1} sea cero es necesario elegir $a_1 = 0$. De donde, por la ecuación (5), $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$. Además,

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots,$$

o bien, si se hace $n = 2m$,

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Por tanto,

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$a_4(0) = -\frac{a_2(0)}{(2\cdot 2)^2} = +\frac{a_0}{(2\cdot 2)^2 2^2} = \frac{a_0}{2^4 2^2}$$

$$a_6(0) = -\frac{a_4(0)}{(2\cdot 3)^2} = -\frac{a_0}{(2\cdot 3)^2 2^4 2^2} = -\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (6)$$

De donde,

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x > 0. \qquad (7)$$

La función entre corchetes se conoce como *función de Bessel de primera clase de orden cero* y se denota por $J_0(x)$. Por el teorema 5.7.1 se deduce que la serie converge para toda x y que J_0 es analítica en $x = 0$. Algunas de las propiedades importantes de J_0 se analizan en los problemas. En la figura 5.9.1 se muestran las gráficas de $y = J_0(x)$ y de algunas de las sumas parciales de la serie (7).

En este ejemplo, se determina $y_2(x)$ al calcular $a_n'(0)$. El procedimiento alternativo en el que simplemente se sustituye la forma (5) de la sección 5.8 en la ecuación (2) y luego se determinan las b_n, se analiza en el problema 10. En primer lugar se observa, a partir del coeficiente de x^{r+1} de la ecuación (4), que $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. Se concluye que no sólo $a_1(0) = 0$, sino que también $a_1'(0) = 0$. Es fácil deducir, a partir de la relación de recurrencia (5), que $a_3'(0) = a_5'(0) = \cdots = a_{2n+1}'(0) = \cdots = 0$; de donde, basta calcular $a_{2m}'(0)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Por la ecuación (5),

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(2m+r)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

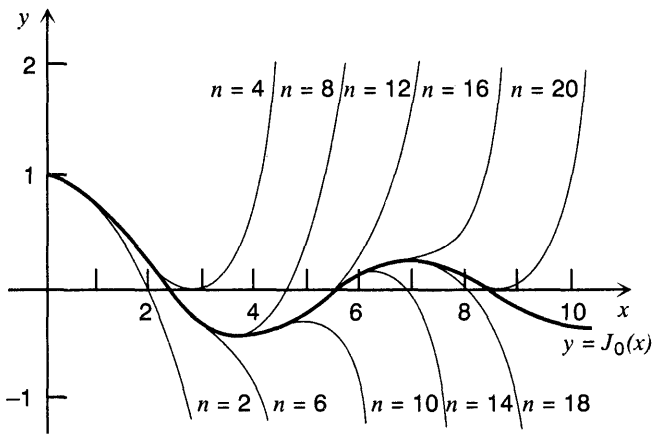


FIGURA 5.9.1 Aproximaciones polinomiales para $J_0(x)$. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.

De donde,

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(2+r)^2}$$

$$a_4(r) = -\frac{a_2(r)}{(4+r)^2} = +\frac{a_0}{(4+r)^2(2+r)^2}$$

$$a_6(r) = -\frac{a_4}{(6+r)^2} = -\frac{a_0}{(6+r)^2(4+r)^2(2+r)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2\cdots(4+r)^2(2+r)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

El cálculo de $a'_{2m}(r)$ puede efectuarse de manera más conveniente al observar que si

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n},$$

entonces

$$f'(x) = \beta_1(x-\alpha_1)^{\beta_1-1}[(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}] + \beta_2(x-\alpha_2)^{\beta_2-1}[(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}] + \cdots.$$

De donde, para x no igual a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}.$$

Por tanto, por la ecuación (8)

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{2m+r} + \frac{1}{2m-2+r} + \cdots + \frac{1}{2+r}\right),$$

y, si se hace r igual a 0, se obtiene

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2(m-2)} + \cdots + \frac{1}{2}\right]a_{2m}(0).$$

Al sustituir $a_{2m}(0)$ de la ecuación (6) y hacer

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1, \tag{9}$$

Finalmente se obtiene

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

La segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero se encuentra al hacer $a_0 = 1$ y sustituir $y_1(x)$ y $a'_{2m}(0) = b_{2m}(0)$ en la ecuación (5) de la sección 5.8. Se obtiene

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \qquad x > 0. \tag{10}$$

En vez de y_2, la segunda solución suele considerarse como cierta combinación lineal de J_0 y y_2. Ésta se conoce como función de Bessel de segunda clase de orden cero y se denota por Y_0. De acuerdo con Copson (capítulo 12), se define[11]

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]. \tag{11}$$

En este caso, γ es una constante conocida como constante de Euler-Máscheroni (1750–1800); se define por la ecuación

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) \cong 0.5772. \tag{12}$$

Si se sustituye $y_2(x)$ en la ecuación (11), se obtiene

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right], \qquad x > 0. \tag{13}$$

La solución general de la ecuación de Bessel de orden cero para $x > 0$ es

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x).$$

Nótese que, como $J_0(x) \to 1$ cuando $x \to 0$, $Y_0(x)$ tiene una singularidad logarítmica en $x = 0$; es decir, $Y_0(x)$ se comporta como $(2/\pi)\ln x$ cuando $x \to 0$ con valores positivos. Por tanto, si se tiene interés en las soluciones de la ecuación de Bessel de orden cero que sean finitas en el origen, lo cual ocurre a menudo, es necesario descartar Y_0. En la figura 5.9.2 se muestran las gráficas de las funciones J_0 y Y_0.

Es interesante hacer notar, con base en la figura 5.9.2, que para x grande $J_0(x)$ y $Y_0(x)$ son oscilatorias. Ese comportamiento podría preverse a partir de la ecuación original; de hecho,

[11] Otros autores utilizan otras definiciones para Y_0. La presente elección de Y_0 también se conoce como función de Weber (1842-1913).

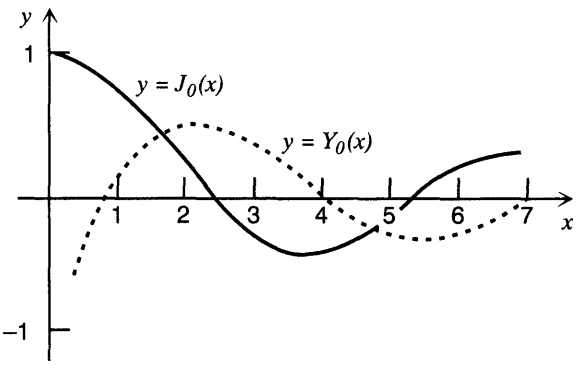


FIGURA 5.9.2 Funciones de Bessel de orden cero.

es cierto para las soluciones de la ecuación de Bessel de orden ν. Si la ecuación (1) se divide entre x^2, se obtiene

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Para x muy grande es razonable sospechar que los términos $(1/x)y'$ y (ν^2/x^2) y son pequeños, por lo que es posible despreciarlos. Si esto es cierto, la ecuación de Bessel de orden ν puede aproximarse por

$$y'' + y = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son sen x y cos x; por tanto, podría anticiparse que las soluciones de la ecuación de Bessel para x grande son semejantes a combinaciones lineales de sen x y cos x. Esto es correcto en tanto las funciones de Bessel sean oscilatorias; sin embargo, sólo es parcialmente correcto. Para x grande, las funciones J_0 y Y_0 también decaen cuando x crece; por tanto, la ecuación $y'' + y = 0$ no proporciona una aproximación adecuada para la ecuación de Bessel para x grande y se requiere un análisis más delicado. De hecho, es posible demostrar que

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \tag{14}$$

Como se puede ver en la figura 5.9.3, esta aproximación asintótica en realidad es razonablemente exacta para toda $x \geq 1$. Por tanto, para tener una aproximación de $J_0(x)$ sobre todo el intervalo desde cero hasta el infinito, es posible usar dos o tres términos de la serie (7) para $x \leq 1$ y la aproximación asintótica (14) para $x \geq 1$.

Ecuación de Bessel de orden un medio. Este ejemplo ilustra la situación en la que las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero positivo, pero en la segunda solución no hay término logarítmico. Si se hace $\nu = \frac{1}{2}$ en la ecuación (1) se obtiene

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0. \tag{15}$$

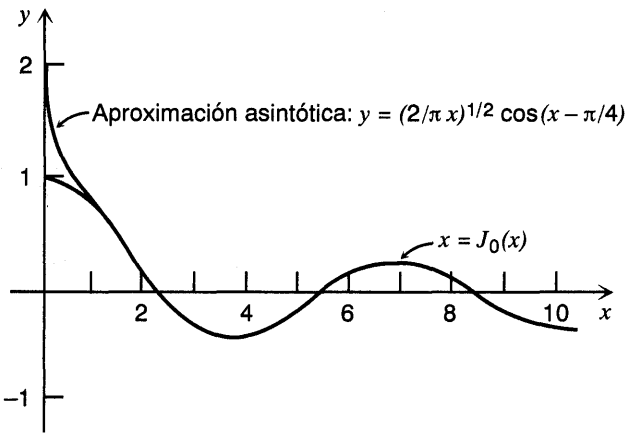


FIGURA 5.9.3 Aproximación asintótica para $J_0(x)$.

Si se sustituye $y = \phi(r, x)$ por la serie (3), se obtiene

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} [(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \tfrac{1}{4}]a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= (r^2 - \tfrac{1}{4})a_0 x^r + [(r+1)^2 - \tfrac{1}{4}]a_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2}$; de donde, las raíces difieren en un entero. La relación de recurrencia es

$$[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}]a_n = -a_{n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{17}$$

Correspondiendo a la raíz más grande $r_1 = \frac{1}{2}$, a partir del coeficiente de x^{r+1} de la ecuación (16) se encuentra que $a_1 = 0$. De donde, con base en la ecuación (17), $a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$. Además, para $r = \frac{1}{2}$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

o bien, si se hace $n = 2m$,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+1)2m}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Por tanto,

$$a_2 = -\frac{a_0}{3 \cdot 2} = -\frac{a_0}{3!},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{5 \cdot 4} = +\frac{a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{a_0}{5!},$$

$$\vdots$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{18}$$

De donde, si se toma $a_0 = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] \\ &= x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{19}$$

La serie de potencias de la ecuación (19) es precisamente la serie de Taylor para sen x; de donde, una solución de la ecuación de Bessel de orden un medio es $x^{-1/2}$ sen x. La función de Bessel de primera clase de orden un medio, $J_{1/2}$, se define como $(2/\pi)^{1/2} y_1$. Por tanto,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x, \qquad x > 0. \tag{20}$$

Correspondiendo a la raíz $r_2 = -\frac{1}{2}$ es posible que se tengan dificultades al calcular a_1, ya que $N = r_1 - r_2 = 1$. Sin embargo, a partir de la ecuación (16), para $r = -\frac{1}{2}$ los coeficientes de a_0 y a_1 son cero y, por consiguiente, a_0 y a_1 se pueden elegir arbitariamente. Entonces, correspondiendo a a_0 se obtiene $a_2, a_4, \ldots$ a partir de la relación de recurrencia (17), y correspondiendo a a_1 se obtienen $a_3, a_5, a_7, \ldots$. De donde, la segunda solución no contiene término logarítmico. Se deja como ejercicio demostrar, con base en la ecuación (17), que para $r = -\frac{1}{2}$,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

y

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

De donde,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1/2}}, \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{21}$$

La constante a_1 simplemente introduce un múltiplo de $y_1(x)$. La segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden un medio suele considerarse como la solución generada por a_0, con $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$; se denota por $J_{-1/2}$. Entonces

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \qquad x > 0. \tag{22}$$

La solución general de la ecuación (15) es $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

Ecuación de Bessel de orden uno. Este ejemplo ilustra la situación en la que las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero positivo y la segunda solución comprende un término logarítmico. Si se hace $\nu = 1$ en la ecuación (1) da

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \tag{23}$$

Si se sustituye $y = \phi(r, x)$ por la serie (3) y se agrupan términos como en los ejemplos anteriores, se obtiene

$$L[\phi](r, x) = a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r + 1)^2 - 1]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r + n)^2 - 1]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \tag{24}$$

Las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$. La relación de recurrencia es

$$[(r + n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \qquad n \geq 2. \tag{25}$$

Correspondiendo a la raíz más grande $r = 1$, la relación de recurrencia es

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n + 2)n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

A partir de los coeficientes de x^{r+1} de la ecuación (24) también se encuentra que $a_1 = 0$; de donde, por la relación de recurrencia, $a_3 = a_5 = \cdots = 0$ para valores pares de n, sea $n = 2m$; entonces,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m + 2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m + 1)m}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Por tanto,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(2)(1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2(3)(2)} = +\frac{a_0}{2^4(3 \cdot 2)(2 \cdot 1)} = \frac{a_0}{2^4 3!2!},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2(4)(3)} = -\frac{a_0}{2^6 4!3!},$$

$$\vdots$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m + 1)!m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

Con $a_0 = 1$ se tiene

$$y_1(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m + 1)!m!}. \tag{27}$$

La función de Bessel de primera clase de orden uno suele tomarse como $\frac{1}{2}y_1$ y se denota por J_1:

$$J_1(x) = \frac{1}{2}y_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m + 1)!m!}. \tag{28}$$

La serie converge absolutamente para toda x; de donde, la función J_1 está definida para toda x.

En la determinación de una segunda solución de la ecuación de Bessel de orden uno, se ilustrará el método de sustitución directa. El cálculo del término general de la ecuación (29) que se da en segundo es un tanto complicado, pero se pueden hallar los primeros coeficientes con bastante facilidad. Según el teorema 5.8.1, se supone que

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \qquad x > 0. \tag{29}$$

Si se calculan $y_2'(x)$, $y_2''(x)$, se sustituyen en (23) y se aplica el hecho de que J_1 es una solución de (23), da

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0, \tag{30}$$

en donde $c_0 = 1$. Si se sustituye $J_1(x)$ por su expresión dada en (28), se desplazan los índices de suma de las dos series y se efectúan varios pasos algebraicos da

$$\begin{aligned} -c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n \\ = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Con base en la ecuación (31) se observa primero que $c_1 = 0$ y que $a = -c_0 = -1$. En seguida, dado que a la derecha sólo hay potencias impares de x, los coeficientes de cada potencia par de x en la izquierda deben ser cero. Por tanto, como $c_1 = 0$, se tiene $c_3 = c_5 = \cdots = 0$. Correspondiendo a las potencias impares de x se obtiene la relación de recurrencia (sea $n = 2m + 1$ en la serie del segundo miembro de (31))

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{32}$$

Cuando en la ecuación (32) se hace $m = 1$, se obtiene

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!).$$

Nótese que c_2 puede elegirse arbitrariamente y después esta ecuación determina a c_4. Nótese también que en la ecuación para el coeficiente de x, c_2 aparece multiplicado por 0 y que la ecuación se utilizó para determinar a. Que c_2 sea arbitrario no es sorprendente, ya que c_2 es el coeficiente de x en la expresión $x^{-1}[1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n]$. Como consecuencia, c_2 simplemente genera un múltiplo de J_1 y y_2 sólo queda determinada hasta un múltiplo aditivo de J_1. De acuerdo con la costumbre, se elige $c_2 = 1/2^2$; entonces se obtiene

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-1}{2^4 \cdot 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right] \\ &= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!}(H_2 + H_1). \end{aligned}$$

Es posible demostrar que la solución de la relación de recurrencia (32) es

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

en la inteligencia de que $H_0 = 0$. Por tanto,

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}\, x^{2m}\right], \qquad x > 0. \tag{33}$$

El cálculo de $y_2(x)$ si se aplica el procedimiento alternativo [ver las ecuaciones (15) y (16) de la sección 5.8] en los que se determinan los $c_n(r_2)$ es ligeramente más sencillo. En particular, éste último procedimiento produce la fórmula general para c_{2m}, sin necesidad de resolver una relación de recurrencia de la forma (32) (ver el problema 11). En este sentido, quizá el lector quiera comparar los cálculos de la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero dados en el texto y en el problema 10.

La segunda solución de la ecuación (23), la función de Bessel de segunda clase de orden uno, Y_1, suele tomarse como cierta combinación lineal de J_1 y y_2. De acuerdo con Copson (capítulo 12), Y_1 se define como

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)], \tag{34}$$

en donde γ se define en la (12). La solución general de (23), para $x > 0$, es

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

Nótese que mientras J_1 es analítica en $x = 0$, la segunda solución Y_1 se vuelve no acotada de la misma manera que $1/x$ cuando $x \to 0$.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, demuestre que la ecuación diferencial dada tiene un punto singular regular en $x = 0$ y determine dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$
2. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$
3. $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$
4. $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$

5. Encuentre dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden $\frac{3}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{9}{4})y = 0, \qquad x > 0.$$

6. Demuestre que la ecuación de Bessel de orden un medio,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0, \qquad x > 0,$$

se puede reducir a la ecuación

$$v'' + v = 0$$

mediante el cambio de la variable dependiente $y = x^{-1/2}v(x)$. A partir de esto, concluya que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ y $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación de Bessel de orden un medio.

7. Demuestre directamente que la serie para $J_0(x)$, ecuación (7), converge absolutamente para toda x.
8. Demuestre directamente que la serie para $J_1(x)$, ecuación (28), converge absolutamente para toda x y que $J_0'(x) = -J_1(x)$.
9. Considere la ecuación de Bessel de orden ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad x > 0.$$

Tome ν real y mayor que cero.

a) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son ν y $-\nu$.

b) Correspondiendo a la mayor raíz ν, demuestre que una solución es

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)(m+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

c) Si 2ν no es un entero, demuestre que una segunda solución es

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)(m-\nu-1)\cdots(2-\nu)(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

Observe que $y_1(x) \to 0$ cuando $x \to 0$ y que $y_2(x)$ es no acotada cuando $x \to 0$.

d) Compruebe por métodos directos que las series de potencias de las expresiones para $y_1(x)$ y $y_2(x)$ convergen absolutamente para toda x. Verifique también que y_2 es una solución con el único supuesto de que ν no sea un entero.

10. En esta sección se demostró que una solución de la ecuación de Bessel de orden cero,

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

es J_0, en donde J_0 se expresa por la ecuación (7) con $a_0 = 1$. Según el teorema 5.8.1, una segunda solución tiene la forma ($x > 0$)

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

a) Demuestre que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ_0'(x). \tag{i}$$

b) Si se sustituye por $J_0(x)$ la presentación en series de la ecuación (i), demuestre que

$$b_1x + 2^2b_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n^2b_n + b_{n-2})x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{ii}$$

c) Observe que en el segundo miembro de (ii) sólo aparecen potencias pares de x. Demuestre que $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$, $b_2 = 1/2^2(1!)^2$ y que

$$(2n)^2b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Deduzca que

$$b_4 = \frac{-1}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad b_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

La solución general de la relación de recurrencia es $b_{2n} = (-1)^{n+1} H_n / 2^{2n}(n!)^2$. Si se sustituyen los b_n de la expresión para $y_2(x)$ se obtiene la solución dada en la ecuación (11).

11. Encuentre una segunda solución de la ecuación de Bessel de orden uno al calcular los $c_n(r_2)$ y a de la ecuación (6) de la sección 5.8 de acuerdo con las fórmulas (15) y (16) de esa sección. A continuación se dan algunos lineamientos para efectuar este cálculo. En primer lugar use la ecuación (24) para demostrar que $a_1(-1)$ y $a_1'(-1)$ son cero. Después demuestre que $c_1(-1) = 0$ y, a partir de la relación de recurrencia, que $c_n(-1) = 0$ para $n = 3, 5, \ldots$. Por último, utilice la ecuación (25) para demostrar que

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(2m + r + 1)(2m + r - 1)^2(2m + r - 3)^2 \cdots (r + 3)^2(r + 1)},$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$, y calcule $c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})/2^{2m} m!(m-1)!$.

12. Mediante un cambio adecuado de variables a menudo es posible transformar una ecuación diferencial con coeficientes variables en una ecuación de Bessel de cierto orden. Por ejemplo, demuestre que una solución de

$$x^2 y'' + (\alpha^2 \beta^2 x^{2\beta} + \tfrac{1}{4} - \nu^2 \beta^2) y = 0, \qquad x > 0,$$

se expresa por $y = x^{1/2} f(\alpha x^{\beta})$ en donde $f(\xi)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden ν.

13. Aplique el resultado del problema 12 para demostrar que la solución general de la ecuación de Airy

$$y'' - xy = 0, \qquad x > 0,$$

es $y = x^{1/2}[c_1 f_1(\frac{2}{3} i x^{3/2}) + c_2 f_2(\frac{2}{3} i x^{3/2})]$ en donde $f_1(\xi)$ y $f_2(\xi)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden un tercio.

14. Es posible demostrar que J_0 tiene una infinidad de ceros para $x > 0$. En particular, los tres primeros ceros son aproximadamente 2.405, 5.520 y 8.653 (ver la figura 5.9.1). Si se denota por λ_j, $j = 1, 2, \ldots$, los ceros de J_0, se concluye que

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Comprende que $y = J_0(\lambda_j x)$ satisface la ecuación diferencial,

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \lambda_j^2 y = 0, \qquad x > 0.$$

De donde, demuestre que

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_i x) J_0(\lambda_j x)\, dx = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Esta importante propiedad de $J_0(\lambda_i x)$, conocida como propiedad de ortogonalidad, es útil al resolver problemas con valores en la frontera.

Sugerencia: escriba la ecuación diferencial para $J_0(\lambda_i x)$. Multiplíquela por $xJ_0(\lambda_i x)$ y réstela de $xJ_0(\lambda_i x)$ multiplicado por la ecuación diferencial para $J_0(\lambda_j x)$; a continuación, integre de 0 a 1.

BIBLIOGRAFÍA

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall).

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford: Oxford University).

Las demostraciones de los teoremas 5.3.1, 5.7.1 y 5.8.1 pueden encontrarse en libros para nivel intermedio o avanzado; por ejemplo, ver los capítulos 3 y 4 del libro de Coddington o los capítulos 3 y 4 de

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations* (2a ed.)(New York; Macmillan).

También consulte estos textos para un análisis del punto en el infinito, que se mencionó en el problema 21 de la sección 5.4. El comportamiento de las soluciones cerca de un punto singular irregular es un tema aún más avanzado; un breve análisis puede encontrarse en el capítulo 5 de

Coddington, E. A., y Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York; McGraw-Hill).

Análisis más completos de la ecuación de Bessel, de la ecuación de Legendre y de muchas otras de las ecuaciones mencionadas pueden encontrarse en libros avanzados sobre ecuaciones diferenciales, métodos de matemáticas aplicadas y funciones especiales. Un texto que trata de funciones especiales como los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel es

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics* (New York; Holt).

Una excelente recopilación de fórmulas, gráficas y tablas de las funciones de Bessel, de las funciones de Legendre y otras funciones especiales de la física matemática pueden encontrarse en

Abramowitz, M., y Stegun, I. A. (eds.) *Handbook of Mathematical Functions* (New York; Dover, 1965); originalmente publicado por la National Bureau of Standards, Washington, D. C

Capítulo 6 La transformada de Laplace

Muchos problemas prácticos en la ingeniería comprenden sistemas mecánicos o eléctricos que reciben la acción de términos de fuerza discontinuos o de impulso. Para estos problemas, a menudo los métodos descritos en el capítulo 3 son un tanto difíciles de aplicar. Otro método que se adapta especialmente bien a estos problemas, aunque su utilidad es mucho más general, se basa en la transformada de Laplace. En este capítulo se describe cómo se aplica este importante método, haciendo resaltar los problemas comunes que surgen en las aplicaciones de ingeniería.

6.1 Definición de la transformada de Laplace

Entre los instrumentos que resultan muy útiles al resolver ecuaciones diferenciales lineales se encuentran las **transformadas integrales.** Una transformada integral es una relación de la forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

en donde una función dada f se transforma en otra función F por medio de una integral. Se dice que la función F es la transformada de f y la función K se llama **kernel** (núcleo en alemán) de la transformación. La idea general es aplicar la relación (1) a fin de transformar un problema para f en un problema más sencillo para F, resolver este problema más simple y luego recuperar la función deseada f a partir de su transformada F. Al hacer una elección apropiada del kernel K y de los límites de integración α y β, a menudo es posible simplificar de manera sustancial un problema que incluya una ecuación diferencial lineal. Varias transformaciones integrales se aplican con amplitud, y cada una es adecuada para resolver ciertos tipos de problemas.

En este capítulo se analizan las propiedades y algunas de las aplicaciones de la transformada de Laplace.[1] Esta transformada se define como sigue: sea $f(t)$ dada para $t \geq 0$ y supongase que f satisface ciertas condiciones que se dan un poco después; entonces, la transformada de Laplace de f, que se denotará par $\mathscr{L}\{f(t)\}$, o por $F(s)$, se define por la ecuación

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{2}$$

En esta transformada se usa el kernel $K(s,t) = e^{-st}$ y, por consiguiente, se asocia de modo natural a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La transformada de Laplace es particularmente valiosa en análisis de circuitos, en donde son comunes términos de fuerza discontinuos o de impulso, pero también es importante en otras aplicaciones.

En virtud de que la transformada de Laplace se define ante una integral sobre el intervalo de cero al infinito, será de utilidad repasar primero algunos hechos básicos sobre esas integrales. En primer lugar, una integral sobre un intervalo no acotado se llama **integral impropia** y se define como un límite de integrales sobre intervalos finitos; por tanto,

$$\int_a^\infty f(t)\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(t)\, dt, \tag{3}$$

en donde A es un número real positivo. Si la integral desde a hasta A existe para toda $A > a$ y si el límite existe cuando $A \to \infty$, entonces se dice que la integral impropia **converge** a ese valor límite; en caso contrario, se dice que la integral **diverge** o que no existe. Los ejemplos siguientes ilustran las dos posibilidades.

Ejemplo 1 Sea $f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$, en donde c es una constante real diferente de cero; entonces,

$$\int_0^\infty e^{ct}\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{ct}\, dt = \lim_{A \to \infty} \frac{e^{ct}}{c}\bigg|_0^A$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{1}{c}(e^{cA} - 1).$$

Se concluye que la integral impropia converge si $c < 0$ y diverge si $c > 0$. Si $c = 0$, entonces el integrando es la unidad y una vez más la integral diverge.

Ejemplo 2 Sea $f(t) = 1/t$, $t \geq 1$; entonces

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A \to \infty} \ln A.$$

Como $\lim_{A \to \infty} \ln A = \infty$, la integral impropia diverge.

[1] La transformada de Laplace recibe su nombre en honor del eminente matemático francés P. S. Laplace, quien estudió la relación (2) en 1782. Sin embargo, las técnicas descritas en este capítulo no fueron desarrolladas hasta un siglo más tarde o más. Se deben principalmente a Oliver Heaviside (1850-1925), un ingeniero electricista inglés, innovador aunque no convencional, quien hizo contribuciones importantes al desarrollo y aplicación de la teoría electromagnética.

Ejemplo 3 Sea $f(t) = t^{-p}$, $t \geq 1$, en donde p es una constante real y $p \neq 1$, el caso $p = 1$ se consideró en el ejemplo 2; entonces

$$\int_1^\infty t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_1^A t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-p}(A^{1-p} - 1).$$

Cuando $A \to \infty$, $A^{1-p} \to 0$ si $p > 1$, pero $A^{1-p} \to \infty$ si $p < 1$. De donde, $\int_1^\infty t^{-p}\,dt$ converge para $p > 1$, pero (al incorporar el resultado del ejemplo 2) diverge para $p < 1$. Estos resultados son análogos a los de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Antes de analizar la posible existencia de $\int_a^\infty f(t)\,dt$, ayuda definir ciertos términos. Se dice que una función f es seccionalmente **continua** sobre un intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ si el intervalo puede partirse mediante un número finito de puntos $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ de modo que

1. f sea continua sobre cada subintervalo abierto $t_{i-1} < t < t_i$.
2. f tienda a un límite finito si se tiende a los puntos extremos de cada subintervalo desde el interior del subintervalo.

En otras palabras, f es seccionalmente continua sobre $\alpha \leq t \leq \beta$ si es continua allí excepto por un número finito de discontinuidades por salto. Si f es seccionalmente continua sobre $\alpha \leq t \leq \beta$ para toda $\beta > \alpha$, entonces se dice que f es seccionalmente continua sobre $t \geq \alpha$. En la figura 6.1.1 se muestra un ejemplo de una función seccionalmente continua.

Si f es seccionalmente continua sobre el intervalo $a \leq t \leq A$, entonces es posible demostrar que $\int_a^A f(t)\,dt$ existe. De donde, si f es seccionalmente continua para $t \geq a$, entonces $\int_a^A f(t)\,dt$ existe para cada $A > a$. Sin embargo, la continuidad por secciones no basta para asegurar la convergencia de la integral impropia $\int_a^\infty f(t)\,dt$, como se hace ver en los ejemplos anteriores.

Si f no puede integrarse con facilidad en términos de funciones elementales, puede ser difícil aplicar la definición de convergencia $\int_a^\infty f(t)\,dt$. Con frecuencia, la manera más conveniente para probar la convergencia o divergencia de una integral impropia es mediante el siguiente teorema de comparación, que es análogo a un teorema similar para las series infinitas.

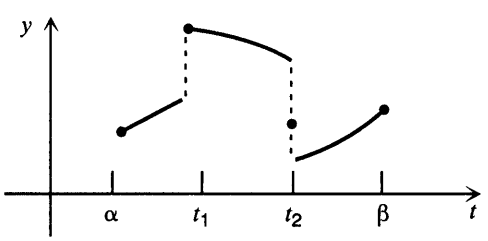


FIGURA 6.1.1 Función seccionalmente continua.

Teorema 6.1.1 Si f es seccionalmente continua para $t \geq a$, si $|f(t)| \leq g(t)$ cuando $t \geq M$ para alguna constante positiva M y si $\int_M^\infty g(t)\,dt$ converge, entonces $\int_a^\infty f(t)\,dt$ también converge. Por otra parte, si $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ y si $\int_M^\infty g(t)\,dt$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(t)\,dt$ también diverge.

No se dará aquí la demostración de este resultado del cálculo. Sin embargo, se hace plausible al comparar las áreas representadas por $\int_M^\infty g(t)\,dt$ y $\int_M^\infty |f(t)|\,dt$. Las funciones más útiles para fines de comparación son e^{ct} y t^{-p}, que se consideraron en los ejemplos 1, 2 y 3.

A continuación se volverá a considerar la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ o $F(s)$, que se define por la ecuación (2), siempre que esta integral impropia converja. En general, el parámetro s puede ser complejo, pero para el presente análisis basta considerar valores reales de s. Según el análisis precedente de las integrales, la función f debe satisfacer ciertas condiciones para que exista su transformada de Laplace. En el siguiente teorema se dan las más simples y útiles de estas condiciones.

Teorema 6.1.2 Supóngase que

1. f es seccionalmente continua sobre el intervalo $0 \leq t \leq A$ para cualquier A positiva.
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ cuando $t \geq M$. En esta desigualdad, K, a y M son constantes reales, K y M son necesariamente positivas

Entonces la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, definida por la ecuación (2), existe para $s > a$.

Para establecer este teorema, sólo es necesario demostrar que la integral dada en la ecuación (2) converge para $s > a$. Al separar en dos partes la integral impropia, se tiene

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^M e^{-st} f(t)\,dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)\,dt. \tag{4}$$

La primera integral del segundo miembro de (4) existe por la hipótesis 1) del teorema; de donde, la existencia de $F(s)$ depende de la convergencia de la segunda integral. Por la hipótesis 2) se tiene, para $t \geq M$,

$$|e^{-st} f(t)| \leq Ke^{-st}e^{at} = Ke^{(a-s)t},$$

y por tanto, por el teorema 6.1.1, $F(s)$ existe siempre que $\int_M^\infty e^{(a-s)t}\,dt$ converja. Con referencia al ejemplo 1, si se reemplaza c por $a - s$, se ve que esta última integral converge cuando $a - s < 0$, lo que establece el teorema 6.1.2.

A menos que se especifique lo contrario, en este capítulo sólo se estudian funciones que satisfacen las condiciones del teorema 6.1.2. Estas funciones se describen como seccionalmente continuas y de **orden exponencial** cuando $t \to \infty$. En los ejemplos siguientes se dan las transformadas de Laplace de algunas funciones elementales importantes.

Ejemplo 4 Sea $f(t) = 1$, $t \geq 0$; entonces

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

Ejemplo 5 Sea $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$; entonces,

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt$$
$$= \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.$$

Ejemplo 6 Sea $f(t) = \operatorname{sen} at$, $t \geq 0$; entonces

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt, \qquad s > 0.$$

Dado que

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt,$$

después de integrar por partes se obtiene

$$F(s) = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\bigg|_0^A - \frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt.$$

Entonces una segunda integración por partes de

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s).$$

De donde, al despejar $F(s)$ se tiene

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0.$$

Supóngase que f_1 y f_2 son dos funciones cuyas transformadas de Laplace existen para $s > a_1$ y $s > a_2$, respectivamente. Entonces, para s mayor que el máximo de a_1 y a_2,

$$\mathscr{L}\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)]\,dt$$
$$= c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)\,dt;$$

de donde

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathscr{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathscr{L}\{f_2(t)\}. \tag{5}$$

La ecuación (5) es una proposición del hecho de que la transformada de Laplace es un *operador lineal.* Esta propiedad es de capital importancia y posteriormente se aplicará con frecuencia.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, trace la gráfica de la función dada. En cada caso, determinar si f es continua, seccionalmente continua o ninguna de las dos cosas, sobre el intervalo $0 \le t \le 3$.

1. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 1 \\ 2 + t, & 1 < t \le 2 \\ 6 - t, & 2 < t \le 3 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \le 2 \\ 1, & 2 < t \le 3 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & 1 < t \le 2 \\ 3 - t, & 2 < t \le 3 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 3 - t, & 1 < t \le 2 \\ 1, & 2 < t \le 3 \end{cases}$

5. Encuentre la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones
   a) t b) t^2 c) t^n, en donde n es un entero positivo.
6. Encuentre la transformada de Laplace de $f(t) = \cos at$ en donde a es una constante real.

Recuerde que $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ y $\operatorname{senh} bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$. En cada uno de los problemas 7 a 10, halle la transformada de Laplace de la función dada; a y b son constantes reales.

7. $\cosh bt$
8. $\operatorname{senh} bt$
9. $e^{at} \cosh bt$
10. $e^{at} \operatorname{senh} bt$

En cada uno de los problemas 11 a 14 recuerde que $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ y $\operatorname{sen} bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$. Si se supone que las fórmulas de integración elementales necesarias se extienden hasta este caso, halle la transformada de Laplace de la función dada; a y b son constantes reales.

11. $\operatorname{sen} bt$
12. $\cos bt$
13. $e^{at} \operatorname{sen} bt$
14. $e^{at} \cos bt$

En cada uno de las problemas 15 a 20, aplique la integración por partes para hallar la transformada de Laplace de la función dada; n es un entero positivo y a es una constante real.

15. te^{at}
16. $t \operatorname{sen} at$
17. $t \cosh at$
18. $t^n e^{at}$
19. $t^2 \operatorname{sen} at$
20. $t^2 \operatorname{senh} at$

En cada uno de los problemas 21 a 24, determine si la integral dada converge o diverge.

21. $\int_0^\infty (t^2 + 1)^{-1}\, dt$
22. $\int_0^\infty te^{-t}\, dt$
23. $\int_1^\infty t^{-2} e^t\, dt$
24. $\int_0^\infty e^{-t} \cos t\, dt$

25. Suponga que f y f' son continuas para $t \ge 0$ y de orden exponencial cuando $t \to \infty$. Demuestre por integración por partes que si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, entonces $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$.

El resultado en realidad es cierto en condiciones menos restrictivas, como las del teorema 6.1.2.

26. **La función gamma**. La función gamma se denota por $\Gamma(p)$ y se define por la integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx. \tag{i}$$

Esta integral converge en el infinito para toda p. Para $p < 0$ también es impropia porque el integrando se vuelve no acotado cuando $x \to 0$. Sin embargo, es posible demostrar que la integral converge en $x = 0$ para $p > -1$.

a) Demuestre que para $p > 0$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

b) Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.

c) Si (p) es un entero positivo n, demuestre que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Dado que $\Gamma(p)$ también se define cuando p no es un entero, esta función suministra una extensión de la función factorial para valores no enteros de la variable independiente. Observe que también es coherente para definir $0! = 1$.

d) Demuestre que para $p > 0$

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \Gamma(p+n)/\Gamma(p).$$

Por tanto, puede determinarse $\Gamma(p)$ para todos los valores positivos de p si se conoce $\Gamma(p)$ en un solo intervalo de longitud unitaria, por ejemplo, $0 < p \leq 1$. Es posible demostrar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Encuentre $\Gamma(\frac{3}{2})$ y $\Gamma(\frac{11}{2})$.

27. Considere la transformada de Laplace de t^p, en donde $p > -1$.

a) Con referencia al problema 26, demuestre que

$$\mathscr{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}t^p\,dt = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx$$
$$= \Gamma(p+1)/s^{p+1}, \qquad s > 0.$$

b) Si p es un entero positivo n, demuestre que

$$\mathscr{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}, \qquad s > 0.$$

c) Demuestre que

$$\mathscr{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad s > 0.$$

Es posible demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

de donde,

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}, \qquad s > 0.$$

d) Demuestre que

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}, \qquad s > 0.$$

6.2 Solución de problemas con valor inicial

En esta sección se muestra cómo se puede aplicar la transformada de Laplace para resolver problemas con valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La utilidad de la transformada de Laplace a este respecto radica principalmente en el hecho de que la transformada de f' está relacionada de una manera sencilla con la transformada de f. La relación se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 6.2.1 Supóngase que f es continua y que f' es seccionalmente continua sobre cualquier intervalo $0 \le t \le A$. Supóngase además que existen las constantes K, a y M tales que $|f(t)| \le Ke^{at}$ para $t \ge M$. Entonces, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > a$ y además

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \tag{1}$$

Para probar este teorema se considerará la integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ denotan los puntos en el intervalo $0 \le t \le A$ en donde f' es discontinua, se obtiene

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Si se integra por partes cada término de la derecha se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = {} & e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A} \\ & + s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)\, dt\right].\end{aligned}$$

Dado que f es continua, se cancelan las contribuciones de los términos integrados en t_1, $t_2, \ldots, t_n$. Al combinar las integrales da

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt.$$

Cuando $A \to \infty$, $e^{-sA} f(A) \to 0$ siempre que $s > a$. De donde, para $s > a$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

con lo que se establece el teorema.

Si f' y f'' satisfacen las mismas condiciones impuestas sobre f y f', respectivamente, en el teorema 6.2.1, entonces se concluye que la transformada de Laplace de f'' también existe para $s > a$ y se expresa por

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

De hecho, siempre que la función f y sus derivadas satisfagan condiciones adecuadas, puede obtenerse una expresión para la transformada de la n-ésima derivada $f^{(n)}$, mediante aplicaciones sucesivas de este teorema. Este resultado se da en el siguiente corolario.

Corolario Supóngase que las funciones $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas, y que $f^{(n)}$ es seccionalmente continua sobre cualquier intervalo $0 \le t \le A$. Supóngase además que existen las constantes K, a y M tales que $|f(t)| \le Ke^{at}, |f'(t)| \le Ke^{at}, \ldots, |f^{(n-1)}(t)| \le Ke^{at}$ para $t \ge M$. Entonces $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ y se expresa por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{3}$$

A continuación se muestra cómo es posible aplicar la transformada de Laplace para resolver problemas con valor inicial. En primer lugar considérese la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{4}$$

y las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{5}$$

Este problema simple se resuelve con facilidad por los métodos de la sección 3.1. La ecuación característica es

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0, \tag{6}$$

y, como consecuencia, la solución general de (4) es

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}. \tag{7}$$

Para satisfacer las condiciones iniciales (5) es necesario tener $c_1 + c_2 = 1$ y $-c_1 + 2c_2 = 0$; de donde, $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = \frac{1}{3}$, de modo que la solución del problema con valor inicial (4) y (5) es

$$y = \phi(t) = \tfrac{2}{3}e^{-t} + \tfrac{1}{3}e^{2t}. \tag{8}$$

Ahora se resolverá el problema dado por medio de la transformada de Laplace. Para hacerlo, se debe suponer que el problema tiene una solución $y = \phi(t)$, lo que con sus dos primeras derivadas satisface las condiciones del corolario. Entonces, si se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (4), se obtiene

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \tag{9}$$

en donde se aplicó la linealidad de la transformada para escribir la transformada de una suma como la suma de las transformadas por separado. Después de aplicar el corolario para expresar $\mathscr{L}\{y''\}$ y $\mathscr{L}\{y'\}$ en términos de $\mathscr{L}\{y\}$, se encuentra que la ecuación.(9) toma la forma

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathscr{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathscr{L}\{y\} = 0,$$

o bien,

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0, \tag{10}$$

en donde $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$. Si se sustituyen $y(0)$ $y'(0)$ de la ecuación (10) para sus valores dados en las condiciones iniciales (5) y, a continuación, se despeja $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)}. \tag{11}$$

Por tanto, se ha obtenido una expresión para la transformada de Laplace $Y(s)$ de la solución $y = \phi(t)$ del problema con valor inicial dado. Para determinar la función ϕ es necesario encontrar la función cuya transformada de Laplace es $Y(s)$, según se define por la ecuación (11).

Se puede hacer esto con mayor facilidad al desarrollar en fracciones parciales el segundo miembro de (11). De este modo, se escribe

$$Y(s) = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)} = \frac{a}{s - 2} + \frac{b}{s + 1} = \frac{a(s + 1) + b(s - 2)}{(s - 2)(s + 1)}. \tag{12}$$

Entonces, si se igualan los numeradores de los miembros segundo y cuarto de (12) se obtiene

$$s - 1 = a(s + 1) + b(s - 2),$$

ecuación que debe cumplirse para toda s. En particular, si se hace $s = 2$, entonces se deduce que $a = \frac{1}{3}$. De manera semejante, si se hace $s = -1$, entonces se encuentra que $b = \frac{2}{3}$. Al sustituir estos valores de a y b, respectivamente, se tiene

$$Y(s) = \frac{1/3}{s - 2} + \frac{2/3}{s + 1}. \tag{13}$$

Por último, si se aplica el resultado del ejemplo 5 de la sección 6.1, se concluye que $\frac{1}{3}e^{2t}$ tiene la transformada $\frac{1}{3}(s - 2)^{-1}$; de modo semejante, $\frac{2}{3}e^{-t}$ tiene la transformada $\frac{2}{3}(s + 1)^{-1}$. De donde, por la linealidad de la transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \tfrac{1}{3}e^{2t} + \tfrac{2}{3}e^{-t}$$

tiene la transformada (13). Por supuesto, esta es la misma solución que se obtuvo antes de diferente manera.

Puede aplicarse el mismo procedimiento a la ecuación lineal general de segundo orden con coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = f(t). \tag{14}$$

Si se supone que la solución $y = \phi(t)$ satisface las condiciones del corolario para $n = 2$, se puede tomar la transformada de la ecuación (14) y obtener así

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s), \tag{15}$$

en donde $F(s)$ es la transformada de $f(t)$. Al despejar $Y(s)$ de (15) se encuentra que

$$Y(s) = \frac{(as + b)\,y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}. \tag{16}$$

Entonces el problema se resuelve siempre que sea posible encontrar la función $y = \phi(t)$ cuya transformada sea $Y(s)$.

Incluso en esta etapa inicial del análisis se pueden señalar algunas de las características esenciales del método de la transformada. En primer lugar, la transformada $Y(s)$ de la función desconocida $y = \phi(t)$ se encuentra al resolver una *ecuación algebraica* en lugar de una *ecuación diferencial,* la ecuación (10) en vez de la (4), o en general la ecuación (15) en vez de la (14). Esta es la clave de la utilidad de las transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias: el problema se reduce de una ecuación diferencial a una algebraica. En seguida, la solución que satisface las condiciones iniciales dadas se encuentra automáticamente, de modo que no surge la tarea de determinar valores adecuados para las constantes arbitrarias de la solución general. Además, como se indica en la ecuación (15), las ecuaciones no homogéneas se manejan exactamente de la misma manera que las homogéneas; no es necesario resolver primero la ecuación homogénea correspondiente. Por último, el método puede aplicarse de la misma manera a ecuaciones de orden superior, en la medida en que se suponga que la solución satisface las condiciones del corolario para el valor apropiado de n.

Obsérvese que el polinomio $as^2 + bs + c$ del denominador del segundo miembro de la ecuación (16) es precisamente el polinomio característico asociado con la ecuación (14). Debido a que el empleo de un desarrollo en fracciones parciales de $Y(s)$ para determinar $\phi(t)$ requiere que este polinomio se factorice, la aplicación de la transformada de Laplace no evita la necesidad de encontrar las raíces de la ecuación característica. Para ecuaciones de orden superior al segundo, este puede ser un problema algebraico difícil, en especial si las raíces son irracionales o complejas.

La dificultad más importante que se presenta al resolver problemas con valor inicial mediante la técnica de la transformada reside en el problema de determinar la función $y = \phi(t)$ que corresponda a la transformada $Y(s)$. Este problema se conoce como problema de inversión de la transformada de Laplace; $\phi(t)$ a partir de $Y(s)$es la transformada inversa correspondiente a $Y(s)$, y el proceso de encontrar $\phi(t)$ se llama "inversión de la transformada". Para denotar la transformada inversa de $Y(s)$ también se usa la notación $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Existe una fórmula general para la transformada inversa de Laplace, pero su uso requiere conocimientos de la teoría de las funciones de una variable compleja, por lo que no se trata en este libro. Sin embargo, todavía es posible desarrollar muchas propiedades importantes de la transformada de Laplace y resolver muchos problemas interesantes, sin usar variables complejas.

Al resolver el problema con valor inicial (4), (5) no se consideró la cuestión de si puede haber funciones diferentes a la dada por la ecuación (8) que también tengan la transformada

(13). De hecho, es posible demostrar que si f es una función continua con la transformada de Laplace F, entonces no existe otra función continua que tenga la misma transformada. En otras palabras, existe esencialmente una correspondencia uno a uno entre las funciones y sus transformadas de Laplace. Este hecho sugiere la recopilación de una tabla (análoga en cierta forma a una tabla de integrales) que dé a las transformadas de funciones de uso

TABLA 6.2.1 Transformadas elementales de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notas
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ej. 4
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Ej. 5
3. t^n, $n =$ entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 27
4. t^p, $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 27
5. sen at	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ej. 6
6. cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 6
7. senh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1; Prob. 8
8. cosh at	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1; Prob. 7
9. e^{at} sen bt	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 13
10. e^{at} cos bt	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 14
11. $t^n e^{at}$, $n =$ entero positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3; Prob. 19
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2; Prob. 28

frecuente y viceversa (ver la tabla 6.2.1).[2] Las entradas de la segunda columna son las transformadas de las de la primera. Quizá es más importante que las funciones de la primera columna son las transformadas inversas de las que están en la segunda columna. De donde, por ejemplo, si se conoce la transformada de la solución de una ecuación diferencial, a menudo puede encontrarse la propia solución simplemente al observar la tabla. Algunas de las entradas de la tabla 6.2.1 se han utilizado como ejemplos o aparecen como problemas en la sección 6.1, mientras que otras se desarrollarán posteriormente en este capítulo. La tercera columna de la tabla indica en dónde es posible encontrar la deducción de las transformadas dadas.

Con frecuencia, una transformada de Laplace $F(s)$ es expresable como una suma de varios términos,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s). \tag{17}$$

Supóngase que $f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f_1(s)\}, \ldots, f_n(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f_n(s)\}$; Entonces la función

$$f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

tiene la transformada de Laplace $F(s)$. Por la propiedad de unicidad antes enunciada, no existe otra función continua f que tenga la misma transformada. Por tanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \cdots + \mathscr{L}^{-1}\{F_n(s)\}; \tag{18}$$

es decir, la transformada inversa de Laplace también es un operador lineal.

En muchos problemas es conveniente aplicar esta propiedad al descomponer una transformada dada en suma de funciones cuyas transformadas inversas ya se conozcan o puedan encontrarse en la tabla. Los desarrollos en fracciones parciales son particularmente útiles a este respecto y en el problema 38 se da un resultado general que abarca muchos casos. Otras propiedades útiles de las transformadas de Laplace se deducirán después en este capítulo.

Como ilustraciones adicionales de la técnica para resolver problemas con valor inicial por medio de la transformada de Laplace y los desarrollos en fracciones parciales, considérense los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1 Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y = \operatorname{sen} 2t \tag{19}$$

que satisfaga las condiciones iniciales

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1. \tag{20}$$

Se supone que este problema con valor inicial tiene una solución $y = \phi(t)$, que con sus dos primeras derivadas satisface las condiciones del corolario del teorema 6.2.1. Entonces, si se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, se tiene

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2/(s^2 + 4),$$

[2] También existen tablas más grandes. Ver la bibliografía al final del capítulo.

en donde se obtuvo la transformada de sen $2t$ del renglón 5 de la tabla 6.2.1. Al sustituir $y(0)$ y $y'(0)$ por sus valores dados en las condiciones iniciales y despejar $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{21}$$

Si se aplican fracciones parciales, es posible escribir $Y(s)$ en la forma

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{22}$$

Al desarrollar el numerador del segundo miembro de la ecuación (22) e igualarlo al numerador de la (21) se encuentra que

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

para toda s. Entonces, si se comparan los coeficientes de potencias iguales de s, se tiene

$$a + c = 2, \qquad b + d = 1,$$
$$4a + c = 8, \qquad 4b + d = 6.$$

Como consecuencia, $a = 2$, $c = 0$, $b = \frac{5}{3}$ y $d = -\frac{2}{3}$, de lo cual se deduce que

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}. \tag{23}$$

Con base en los renglones 5 y 6 de la tabla 6.2.1, la solución del problema con valor inicial dado es

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \tfrac{5}{3}\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 2t. \tag{24}$$

Ejemplo 2 Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y^{iv} - y = 0, \tag{25}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 0. \tag{26}$$

En este problema es necesario suponer que la solución $y = \phi(t)$ satisface las condiciones del corolario del teorema 6.2.1, para $n = 4$. La transformada de Laplace de la ecuación diferencial (25) es

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0.$$

En consecuencia, si se aplican las condiciones iniciales (26) y se despeja $Y(s)$, se tiene

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}. \tag{27}$$

El desarrollo en fracciones parciales de $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 - 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 1},$$

y se concluye que

$$(as + b)(s^2 + 1) + (cs + d)(s^2 - 1) = s^2 \tag{28}$$

para toda s. Al hacer $s = 1$ y $s = -1$, respectivamente, en la ecuación (28), se obtienen el par de ecuaciones

$$2(a + b) = 1, \qquad 2(-a + b) = 1,$$

y, por lo tanto, $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$. Si en la ecuación (28) se hace $s = 0$, entonces $b - d = 0$, de modo que $d = \frac{1}{2}$. por último, al igualar los coeficientes de los términos cuadráticos de cada miembro de la ecuación (28), se encuentra que $a + c = 0$, de modo que $c = 0$. Por tanto,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s^2 - 1} + \frac{1/2}{s^2 + 1}, \tag{29}$$

y de los renglones 4 y 5 de la tabla 6.2.1, la solución del problema con valor inicial (25), (26) es

$$y = \phi(t) = \frac{\operatorname{senh} t + \operatorname{sen} t}{2}. \tag{30}$$

Las aplicaciones elementales más importantes de la transformada de Laplace se encuentran en el estudio de las vibraciones mecánicas y en el análisis de los circuitos eléctricos; las ecuaciones que los rigen se dedujeron en la sección 3.8. La ecuación del movimiento de un sistema vibrante resorte-masa es

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t), \tag{31}$$

en donde m es la masa, c el coeficiente de amortiguamiento, k la constante de resorte y $F(t)$ la fuerza externa aplicada. La ecuación que describe un circuito eléctrico que contiene una inductancia L, una resistencia R y una capacitancia C (un circuito LRC) es

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t), \tag{32}$$

en donde $Q(t)$ es la carga en el condensador y $E(t)$ es el voltaje aplicado. En términos de la corriente $I(t) = dQ(t)/dt$, se puede escribir la ecuación (32) en la forma

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}(t). \tag{33}$$

También es necesario especificar condiciones iniciales adecuadas para u, Q o I.

Con anterioridad, en la sección 3.8, se hizo notar que la ecuación (31) para el sistema resorte-masa y las ecuaciones (32) y (33) para el circuito eléctrico son matemáticamente idénticas y sólo difieren en la interpretación de las constantes y variables que aparecen en

ellas. Existen otros problemas físicos que también conducen a la misma ecuación diferencial. Por tanto, una vez que se resuelve el problema matemático, su solución puede interpretarse en términos de cualquiera que sea el problema físico correspondiente de interés inmediato.

En los problemas que siguen a esta y otras secciones de este capítulo se dan numerosos problemas con valor inicial para ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Muchos pueden interpretarse como modelos de sistemas físicos particulares, pero por lo común no se señala esto explícitamente.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 10 encuentre la transformada inversa de Laplace de la función dada.

1. $\dfrac{3}{s^2+4}$
2. $\dfrac{4}{(s-1)^3}$
3. $\dfrac{2}{s^2+3s-4}$
4. $\dfrac{3s}{s^2-s-6}$
5. $\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$
6. $\dfrac{2s-3}{s^2-4}$
7. $\dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$
8. $\dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$
9. $\dfrac{1-2s}{s^2+4s+5}$
10. $\dfrac{2s-3}{s^2+2s+10}$

En cada uno de los problemas 11 a 23 aplique la transformada de Laplace para resolver el problema con valor inicial dado.

11. $y'' - y' - 6y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
13. $y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' - 2y' - 2y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
16. $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
17. $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$
18. $y^{iv} - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$
19. $y^{iv} - 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = 0$
20. $y'' + \omega^2 y = \cos 2t, \quad \omega^2 \neq 4; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 2y = \cos t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
22. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
23. $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

En cada uno de los problemas 24 a 26 encuentre la transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ de la solución del problema con valor inicial dado. En la sección 6.3 se desarrollará un método para determinar las transformadas inversas.

24. $y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & \pi \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

25. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

26. $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

*27. Se pueden hallar de manera conveniente las transformadas de Laplace de ciertas funciones a partir de sus desarrollos en serie de Taylor.

a) Use la serie de Taylor para sen t,

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

y suponga que puede calcularse término a término la transformada de Laplace de esta serie; compruebe que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2 + 1}, \qquad s > 1.$$

b) Sea

$$f(t) = \begin{cases} (\operatorname{sen} t)/t, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Encuentre la serie de Taylor de f alrededor de $t = 0$. Suponga que la transformada de Laplace de esta función puede calcularse término a término y compruebe que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \arctan 1/s, \qquad s > 1.$$

c) La función de Bessel de primera clase de orden cero, J_0, tiene la serie de Taylor (ver la sección 5.9)

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Si se supone que las siguientes transformadas de Laplace pueden calcularse término a término, verificar que

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\} = (s^2 + 1)^{-1/2}, \qquad s > 1,$$

y que

$$\mathscr{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = s^{-1} e^{-1/4s}, \qquad s > 0.$$

Los problemas 28 a 36 están relacionados con la derivación de la transformada de Laplace.

28. Sea

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Es posible demostrar que mientras f satisfaga las condiciones del teorema 6.1.2, es válido derivar bajo el signo integral con respecto al parámetro s, cuando $s > a$.

a) Demuestre que $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

b) Demuestre que $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$; por tanto, la derivación de la transformada de Laplace corresponde a multiplicar por $-t$ la función original.

En cada uno de los problemas 29 a 34, aplique el resultado del problema 28 para encontrar la transformada de Laplace de la función dada; a y b son números reales y n es un entero positivo.

29. te^{at}
30. $t^2 \operatorname{sen} bt$
31. t^n
32. $t^n e^{at}$
33. $te^{at} \operatorname{sen} bt$
34. $te^{at} \cos bt$

*35. Considere la ecuación de Bessel de orden cero

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

Recuerde por lo visto en la sección 5.4 que $t = 0$ es un punto singular regular de esta ecuación y que, por lo tanto, las soluciones pueden volverse no acotadas cuando $t \to 0$. Sin embargo, se intentará determinar si existen soluciones que permanezcan finitas en $t = 0$ y tengan derivadas finitas allí. Si se supone que existe una solución de este tipo $y = \phi(t)$, sea $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$.

a) Demuestre que $Y(s)$ satisface

$$(1 + s^2)Y'(s) + sY(s) = 0.$$

b) Demuestre que $Y(s) = c(1 + s^2)^{-1/2}$, en donde c es una constante arbitraria.

c) Desarrolle $(1 + s^2)^{-1/2}$ en una serie binomial válida para $s > 1$ y si se supone que es permisible tomar la transformada inversa término a término, demuestre que

$$y = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = cJ_0(t),$$

en donde J_0 es la función de Bessel de primera clase de orden cero. Observe que $J_0(0) = 1$ y que J_0 tiene derivadas finitas de todos los órdenes en $t = 0$. En la sección 5.9 se demostró que la segunda solución de esta ecuación se vuelve no acotada cuando $t \to 0$.

36. En cada uno de los problemas con valor inicial siguientes, use los resultados del problema 28 para encontrar la ecuación diferencial que satisface $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$, en donde $y = \phi(t)$ es la solución del problema con valor inicial dado.

a) $y'' - ty = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (ecuación de Airy)

b) $(1 - t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (ecuación de Legendre)

Observe que la ecuación diferencial para $Y(s)$ es de primer orden en el inciso a), pero de segundo orden en el inciso b). Esto se debe al hecho de que t aparece cuando mucho a la primera potencia en la ecuación del inciso a), mientras que en la del inciso b) aparece a la segunda potencia. Esto ilustra que a menudo la transformada de Laplace no es útil al resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, a menos que todos los coeficientes sean cuando mucho funciones lineales de la variable independiente.

37. Suponga que

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Si $G(s)$ y $F(s)$ son las transformadas de Laplace de $g(t)$ y $f(t)$, respectivamente, demuestre que

$$G(s) = F(s)/s.$$

38. En este problema se muestra cómo es posible utilizar un desarrollo general en fracciones parciales para calcular muchas transformadas inversas de Laplace. Suponga que

$$F(s) = P(s)/Q(s),$$

en donde $Q(s)$ es un polinomio de grado n con ceros diferentes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ y $P(s)$ es un polinomio de grado menor que n. En este caso es posible demostrar que $P(s)/Q(s)$ tiene un desarrollo en fracciones parciales de la forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n}, \tag{i}$$

en donde es necesario determinar los coeficientes $A_1, \ldots, A_n$.

a) Demuestre que

$$A_k = P(r_k)/Q'(r_k), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{ii}$$

Sugerencia: una forma de hacerlo es multiplicar la ecuación (i) por $s - r_k$ y, a continuación, tomar el límite cuando $s \to r_k$.

b) Demuestre que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t}. \tag{iii}$$

6.3 Funciones escalón

En la sección 6.2 se describió el procedimiento general que se sigue al resolver problemas con valor inicial por medio de la transformada de Laplace. Algunas de las aplicaciones elementales más interesantes del método de la transformada se presentan en la solución de ecuaciones diferenciales lineales con funciones de fuerza discontinuas o de impulso. En el análisis del flujo de corriente en circuitos eléctricos o en las vibraciones de sistemas mecánicos surgen con frecuencia ecuaciones de este tipo. En esta sección y en las siguientes se desarrollan algunas propiedades adicionales de la transformada de Laplace que resultan útiles en la solución de estos problemas. A menos que de manera específica se indique lo contrario, se supondrá que todas las funciones que se presentan en seguida son seccionalmente continuas y de orden exponencial, de modo que existe su transformada de Laplace, por lo menos para s suficientemente grande.

A fin de tratar eficazmente con funciones que presentan discontinuidades por salto, es muy útil introducir una función conocida como **función escalón unitario**, denotada por u_c y que se define por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c, \end{cases} \qquad c \geq 0. \tag{1}$$

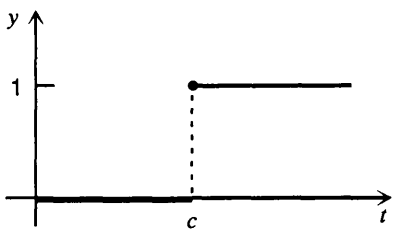


FIGURA 6.3.1 Gráfica de $y = u_c(t)$.

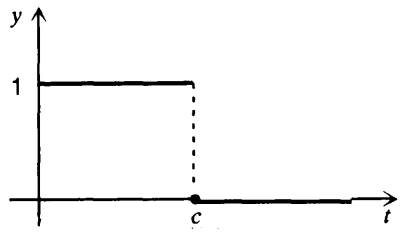


FIGURA 6.3.2 Gráfica de $y = 1 - u_c(t)$.

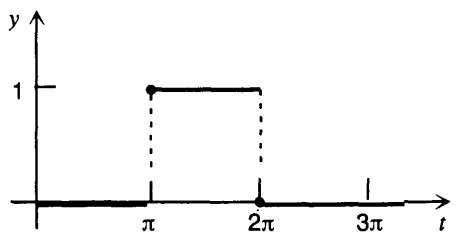


FIGURA 6.3.3 Gráfica de $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

En la figura 6.3.1 se muestra la gráfica de u_c. El escalón también puede ser negativo. Por ejemplo, en la figura 6.3.2 se da la gráfica de $y = 1 - u_c(t)$; puede concebirse esta función como si representara un pulso rectangular.

Ejemplo 1 Trazar la gráfica de $y = h(t)$, en donde

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \qquad t \geq 0.$$

Por la definición de $u_c(t)$ dada en la ecuación (1) se tiene

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi, \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t < \infty. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación $y = h(t)$ tiene la gráfica que se muestra en la figura 6.3.3.

Para una función dada f a menudo es necesario considerar la función relacionada g que se define por

$$y = g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t - c), & t \geq c, \end{cases}$$

la cual representa una traslación de f una distancia c en la dirección t positiva; ver la figura 6.3.4. En términos de la función escalón unitario es posible escribir $g(t)$ en la forma conveniente

$$g(t) = u_c(t) f(t - c).$$

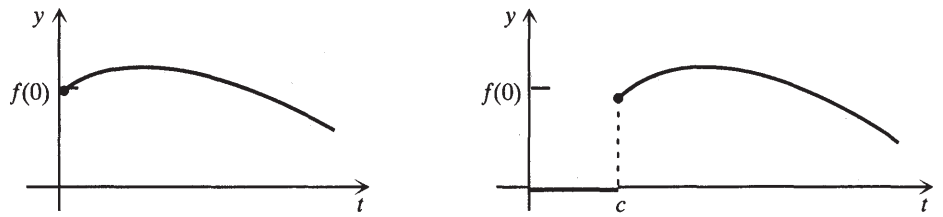


FIGURA 6.3.4 Traslación de la función dada. *a*) $y = f(t)$; *b*) $y = u_c(t)f(t-c)$.

La transformada de Laplace de u_c se determina con facilidad:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)\,dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st}\,dt \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

La función escalón unitario es particularmente importante en la teoría de la transformada debido a la relación que se da en seguida entre la transformada de $f(t)$ y la de su traslación $u_c(t)f(t-c)$.

Teorema 6.3.1

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ y si c es una constante positiva, entonces

$$\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathscr{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > a. \tag{3}$$

A la inversa, si $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, entonces

$$u_c(t)f(t-c) = \mathscr{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}. \tag{4}$$

El teorema 6.3.1 simplemente afirma que la traslación de $f(t)$ una distancia c en la dirección t positiva corresponde a la multiplicación de $F(s)$ por e^{-cs}. Para probar el teorema 6.3.1 basta calcular la transformada de $u_c(t)f(t-c)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt.\end{aligned}$$

Si se introduce una nueva variable de integración $\xi = t - c$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s}f(\xi)\,d\xi = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi \\ &= e^{-cs}F(s).\end{aligned}$$

Por tanto, se establece la ecuación (3); la (4) se deduce al tomar la transformada inversa de los dos miembros de la ecuación (3).

Se tiene un ejemplo simple de este teorema si se toma $f(t) = 1$. Si se recuerda que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, de inmediato se tiene por la ecuación (3) que $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$. Este resultado concuerda con el de la (2). En los ejemplos 2 y 3 se ilustra aun más cómo es posible aplicar el teorema 6.3.1 para calcular transformadas y transformadas inversas.

Ejemplo 2 Si se define la función f por

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi/4, \\ \operatorname{sen} t + \cos(t - \pi/4), & t \ge \pi/4, \end{cases}$$

encontrar $\mathcal{L}\{f(t)\}$. La gráfica de $y = f(t)$ se muestra en la figura 6.3.5.

Nótese que $f(t) = \operatorname{sen} t + g(t)$, en donde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/4, \\ \cos(t - \pi/4), & t \ge \pi/4. \end{cases}$$

Por tanto,

$$g(t) = u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4),$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)\} \\ &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + e^{-\pi s/4}\mathcal{L}\{\cos t\}. \end{aligned}$$

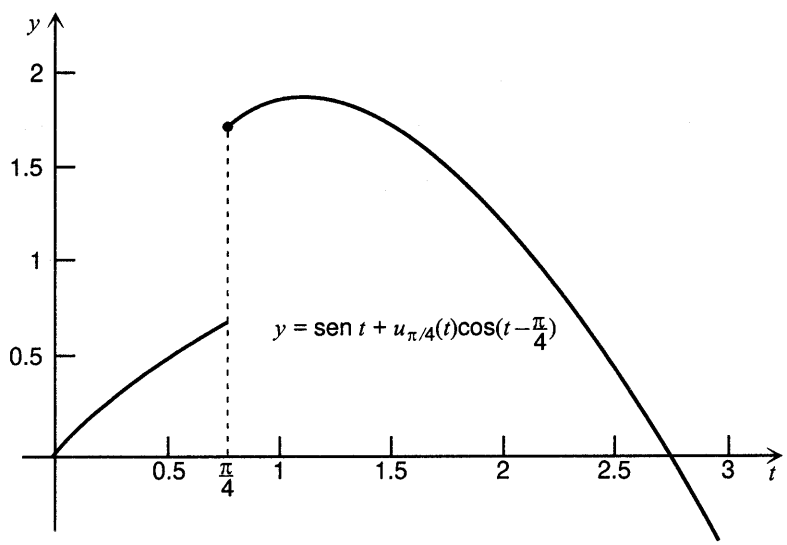


FIGURA 6.3.5 Gráfica de la función del ejemplo 2.

Si se introducen las transformadas de sen t y cos t, se obtiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2 + 1}$$

$$= \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2 + 1}.$$

El lector debe comparar este método con el cálculo de $\mathscr{L}\{f(t)\}$, directamente a partir de la definición.

Ejemplo 3 Encontrar la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Por la linealidad de la transformada inversa se tiene

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$$
$$= t - u_2(t)(t - 2).$$

La función f también puede escribirse como

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ 2, & t \ge 2. \end{cases}$$

El siguiente teorema contiene otra propiedad bastante útil de las transformadas de Laplace, que es en tanto análoga a la que se da en el teorema 6.3.1.

Teorema 6.3.2 Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \ge 0$ y si c es una constante, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\} = f(s - c), \qquad s > a + c. \tag{5}$$

A la inversa, si $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, entonces

$$e^{ct}f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s - c)\}. \tag{6}$$

Según el teorema 6.3.2, la multiplicación de $f(t)$ por e^{ct} da por resultado una traslación de la transformada $F(s)$ una distancia c en la dirección s positiva e inversamente. La demostración de este teorema sólo requiere la evaluación de $\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\}$. Por tanto,

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)\,dt$$
$$= F(s - c),$$

que es la ecuación (5). La restricción $s > a + c$ se deduce de la observación de que, según la hipótesis (ii) del teorema 6.1.2, $f(t) \le Ke^{at}$; de donde $e^{ct}f(t) \le Ke^{(a+c)t}$. La ecuación (6) se concluye al tomar la transformada inversa de la (5) y la demostración queda completa.

La aplicación principal del teorema 6.3.2 se encuentra en la evaluación de ciertas transformadas inversas, como se ilustra en el ejemplo 4.

Ejemplo 4 Encontrar la transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}.$$

Al completar el cuadrado del denominador es posible escribir

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2),$$

en donde $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$. Como $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \text{sen } t$, por el teorema 6.3.2 se concluye que

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t} \text{sen } t.$$

Los resultados de esta sección a menudo son útiles para resolver ecuaciones diferenciales, en especial las que tienen funciones de fuerza discontinuas. La siguiente sección se dedica a presentar ejemplos que ilustran este hecho.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, trace la gráfica de la función dada sobre el intervalo $t \geq 0$.

1. $u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
2. $(t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$
3. $f(t-\pi)u_\pi(t)$, en donde $f(t) = t^2$
4. $f(t-3)u_3(t)$, en donde $f(t) = \text{sen } t$
5. $f(t-1)u_2(t)$, en donde $f(t) = 2t$
6. $f(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)$

En cada uno de los problemas 7 a 12, encuentre la transformada de Laplace de la función dada.

7. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

8. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t < 2\pi \end{cases}$

10. $f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$

11. $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$

12. $f(t) = t - u_1(t)(t-1), \quad t \geq 0$

En cada uno de los problemas 13 a 18 encuentre la transformada inversa de Laplace de la función dada.

13. $F(s) = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$

14. $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2}$

15. $F(s) = \dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2}$

16. $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2 - 4}$

17. $F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3}$

18. $F(s) = \dfrac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$

19. Suponga que $f(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$.
    a) Demuestre que si c es una constante positiva, entonces

$$\mathscr{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \qquad s > ca.$$

    b) Demuestre que si k es una constante positiva, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right).$$

    c) Demuestre que si a y b son constantes con $a > 0$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(as + b)\} = \frac{1}{a} e^{-bt/a} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

En cada uno de los problemas 20 a 23 aplique los resultados del problema 19 para encontrar la transformada inversa de Laplace de la función dada.

20. $F(s) = \dfrac{2^{n+1} n!}{s^{n+1}}$

21. $F(s) = \dfrac{2s + 1}{4s^2 + 4s + 5}$

22. $F(s) = \dfrac{1}{9s^2 - 12s + 3}$

23. $F(s) = \dfrac{e^2 e^{-4s}}{2s - 1}$

En cada uno de los problemas 24 a 27, encuentre la transformada de Laplace de la función dada. En el problema 27, suponga que es permisible la integración término a término de la serie infinita.

24. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

25. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$

26. $f(t) = 1 - u_1(t) + \cdots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k(t)$

27. $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k(t)$. Ver la figura 6.3.6.

*28. Suponga que $f(t + T) = f(t)$ para toda $t \geq 0$ y para algún número positivo fijo T; se dice que f es periódica con periodo T sobre $0 \leq t < \infty$. demuestre que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-sT}}.$$

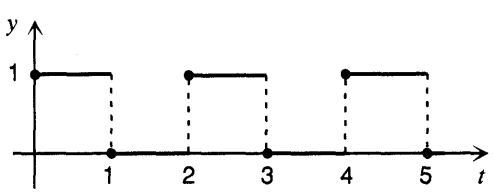


FIGURA 6.3.6 Onda cuadrada.

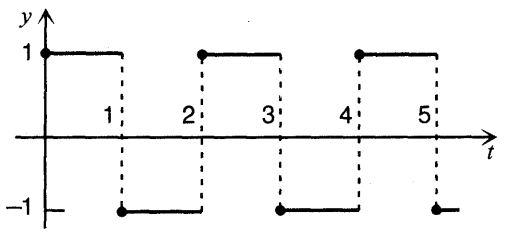


FIGURA 6.3.7 Onda cuadrada.

En cada uno de los problemas 29 a 32, aplique el resultado del problema 28 para encontrar la transformada de Laplace de la función dada.

*29. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t + 2) = f(t)$.

Comparar con el problema 27.

*30. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t + 2) = f(t)$.

Ver la figura 6.3.7.

*31. $f(t) = t, \quad 0 \le t < 1;$
$f(t + 1) = f(t)$.

Ver la figura 6.3.8.

*32. $f(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t < \pi;$
$f(t + \pi) = f(t)$.

Ver la figura 6.3.9.

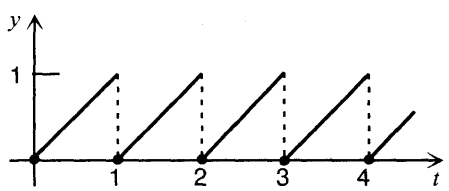


FIGURA 6.3.8 Onda diente de sierra.

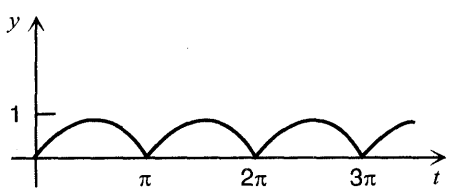


FIGURA 6.3.9 Onda senoidal rectificada.

*33. a) Si $f(t) = 1 - u_1(t)$, encuentre $\mathcal{L}\{f(t)\}$; compare con el problema 24. Trace la gráfica de $y = f(t)$.

b) Sea $g(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi$, en donde la función f está definida en el inciso a). Trace la gráfica de $y = g(t)$ y encuentre $\mathcal{L}\{g(t)\}$.

c) Sea $h(t) = g(t) - u_1(t)g(t-1)$, en donde g está definida en el inciso b).Trace la gráfica de $y = h(t)$ y encuentre $\mathcal{L}\{h(t)\}$.

*34. Considere la función p definida por

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t < 2; \end{cases} \qquad p(t + 2) = p(t).$$

a) Trace la gráfica de $y = p(t)$.

b) Encuentre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ al observar que p es la extensión periódica de la función h del problema 33 c) y aplicar el resultado del problema 28.

c) Encuentre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ al observar que

$$p(t) = \int_0^t f(t)\,dt,$$

en donde f es la función del problema 30 y aplicar el teorema 6.2.1.

6.4 Ecuaciones diferenciales con funciones de fuerza discontinuas

En esta sección la atención se centra en algunos ejemplos en los que el término no homogéneo, o función de fuerza, es discontinuo.

Ejemplo 1 Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y' + \tfrac{5}{4}y = g(t), \tag{1}$$

en donde

$$g(t) = 1 - u_\pi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Supóngase que las condiciones iniciales son

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{3}$$

Este problema rige la carga en el condensador de un circuito eléctrico simple con un voltaje aplicado en la forma de un pulso rectangular. Alternativamente, y puede representar la respuesta de un oscilador amortiguado sujeto a la fuerza aplicada $g(t)$.

La transformada de Laplace de la ecuación (1) es

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) + \tfrac{5}{4}Y(s) &= \mathscr{L}\{1\} - \mathscr{L}\{u_\pi(t)\} \\ &= (1 - e^{-\pi s})/s. \end{aligned}$$

Si se introducen los valores iniciales (3) y se despeja $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + s + \frac{5}{4})}. \tag{4}$$

Para encontrar $y = \phi(t)$ es conveniente escribir $Y(s)$ como

$$Y(s) = (1 - e^{-\pi s})H(s) \tag{5}$$

en donde

$$H(s) = 1/s(s^2 + s + \tfrac{5}{4}). \tag{6}$$

Entonces, si $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}$, se tiene

$$y = h(t) - u_\pi(t)h(t - \pi). \tag{7}$$

Obsérvese que se ha aplicado el teorema 6.3.1 para escribir la transformada inversa de $e^{-\pi s}H(s)$. Por último, para determinar $h(t)$ se aplica el desarrollo en fracciones parciales de $H(s)$:

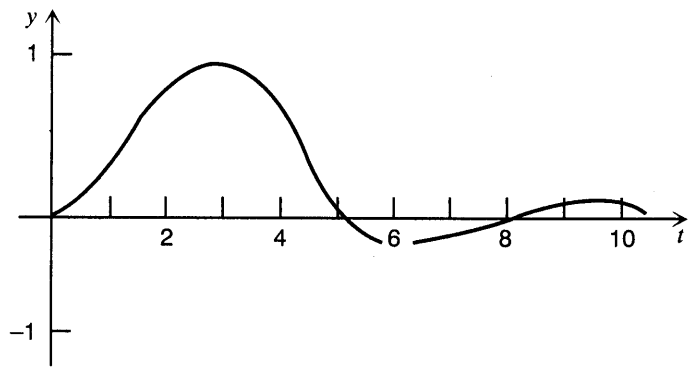


FIGURA 6.4.1 Solución del problema con valor inicial (1), (2), (3).

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + s + \frac{5}{4}}. \tag{8}$$

Una vez que se determinan los coeficientes, se encuentra que $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$ y $c = -\frac{4}{5}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{4/5}{s} - \frac{4}{5}\frac{s+1}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \\ &= \frac{4/5}{s} - \frac{4}{5}\frac{s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1}, \end{aligned} \tag{9}$$

de modo que, con referencia a los renglones 9 y 10 de la tabla 6.2.1, se obtiene

$$h(t) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}(e^{-t/2}\cos t + \tfrac{1}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t). \tag{10}$$

En la figura 6.4.1 se muestra la gráfica de $y = \phi(t)$ de las ecuaciones (7) y (10).

Puede observarse el efecto de la discontinuidad en la función de fuerza si se examina con más detalle la solución $\phi(t)$ del ejemplo 1. Al escribir $\phi(t)$ sin usar la función escalón unitario, se tiene

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{4}{5} - (\frac{4}{5}e^{-t/2}\cos t + \frac{2}{5}e^{-t/2}\operatorname{sen} t), & t < \pi, \\ -(1 + e^{\pi/2})(\frac{4}{5}e^{-t/2}\cos t + \frac{2}{5}e^{-t/2}\operatorname{sen} t), & t \geq \pi. \end{cases} \tag{11}$$

Según el teorema de existencia y unicidad 3.2.1, la solución ϕ y sus dos primeras derivadas son continuas, excepto quizá en el punto $t = \pi$. Esto también se puede ver de inmediato a partir de la ecuación (7). También es posible demostrar por cálculo directo a partir de la (11) que ϕ y ϕ' son continuas incluso en $t = \pi$. Sin embargo, si se calcula ϕ'', se obtiene

$$\phi''(t) = \begin{cases} e^{-t/2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t, & t < \pi, \\ (1 + e^{\pi/2})(e^{-t/2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t), & t > \pi. \end{cases} \tag{12}$$

Como consecuencia,

$$\lim_{t \to \pi -} \phi''(t) = -e^{-\pi/2}, \qquad \lim_{t \to \pi +} \phi''(t) = -(1 + e^{\pi/2})e^{-\pi/2}.$$

Por lo tanto, en $t = \pi$ la función ϕ'' tiene un salto de

$$\lim_{t\to\pi+} \phi''(t) - \lim_{t\to\pi-} \phi''(t) = -(1 + e^{\pi/2})e^{-\pi/2} + e^{-\pi/2} = -1.$$

Obsérvese que esto es exactamente lo mismo que el salto en la función de fuerza en el mismo punto.

Considérese ahora la ecuación lineal general de segundo orden,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{13}$$

en donde p y q son continuas en algún intervalo $\alpha < t < \beta$, pero g sólo es seccionalmente continua allí. Si $y = \psi(t)$ es una solución de la ecuación (13), entonces ψ y ψ' son continuas sobre $\alpha < t < \beta$, pero ψ'' tiene discontinuidades por salto en los mismos puntos que g. Se aplican observaciones semejantes a las ecuaciones de orden superior; la derivada más alta de la solución que aparece en la ecuación diferencial tiene discontinuidades por salto en los mismos puntos que la función de fuerza, pero la propia solución y sus derivadas inferiores son continuas incluso en esos puntos.

Una manera alternativa de resolver el problema con valor inicial (1), (2) y (3) es resolver la ecuación diferencial en los dos intervalos separados $0 < t < \pi$ y $t > \pi$. En el primero de estos intervalos las constantes arbitrarias de la solución general se eligen para satisfacer las condiciones iniciales dadas. En el segundo intervalo, las constantes se eligen para hacer que la solución ϕ y su derivada ϕ' sean continuas en $t = \pi$. Nótese que no se dispone de suficientes constantes para requerir que también ϕ''sea continua allí. Puede aplicarse el mismo procedimiento general en otros problemas que tengan funciones de fuerza seccionalmente continuas. Sin embargo, una vez que se desarrolla la teoría necesaria, suele ser más fácil aplicar la transformada de Laplace para resolver todos esos problemas de inmediato.

Ejemplo 2

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 4y = g(t) \tag{14}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{15}$$

en donde

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi/2, \\ \pi/2, & t \ge \pi/2. \end{cases} \tag{16}$$

En este ejemplo, la función de fuerza tiene la forma que se muestra en la figura 6.4.2 y se conoce como carga de rampa. Es conveniente introducir la función escalón unitario y escribir

$$g(t) = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2), \tag{17}$$

como el lector puede comprobar. Para resolver el problema se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial y se aplican las condiciones iniciales, con lo que se obtiene

$$(s^2 + 4)Y(s) = (1 - e^{-\pi s/2})/s^2,$$

o bien,

$$Y(s) = (1 - e^{-\pi s/2})H(s), \tag{18}$$

en donde

$$H(s) = 1/s^2(s^2 + 4). \tag{19}$$

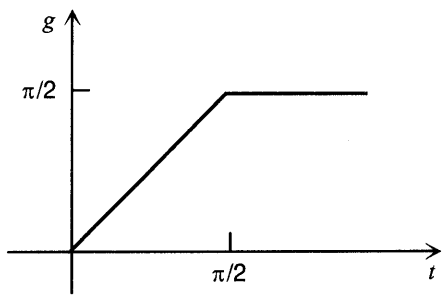


FIGURA 6.4.2 Carga de rampa.

Por tanto, la solución del problema con valor inicial (14), (15), (16) es

$$y = \phi(t) = h(t) - u_{\pi/2}(t)h(t - \pi/2), \tag{20}$$

en donde $h(t)$ es la transformada inversa de $H(s)$. El desarrollo en fracciones parciales de $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2 + 4}, \tag{21}$$

y entonces se concluye, con base en los renglones 3 y 5 de la tabla 6.2.1, que

$$h(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 2t. \tag{22}$$

En la figura 6.4.3 se muestra la gráfica de $y = \phi(t)$.

Nótese que en este ejemplo la función de fuerza g es continua, pero g' es discontinua en $t = \pi/2$. Se deduce que la solución ϕ y sus dos primeras derivadas son continuas, pero ϕ''' tiene una discontinuidad en $t = \pi/2$ que se corresponde con la discontinuidad en g' en ese punto

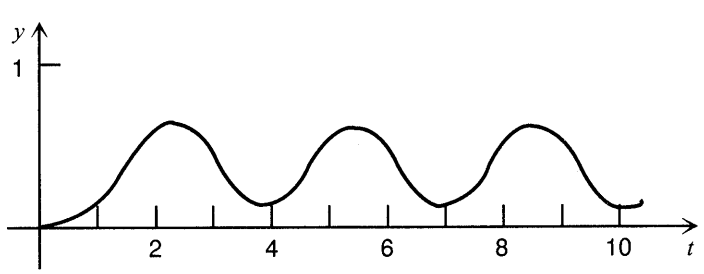


FIGURA 6.4.3 Solución del problema con valor inicial (14), (15), (16).

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 13, encuentre la solución del problema con valor inicial dado.

1. $y'' + y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le t < \infty \end{cases}$
2. $y'' + 2y' + 2y = h(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0 \le t < \pi \text{ y } t \ge 2\pi \end{cases}$
3. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t - u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
4. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t + u_{\pi}(t)\operatorname{sen}(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 2y' + y = f(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$
6. $y'' + 3y' + 2y = u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
7. $y'' + y = u_{\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
8. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$
10. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad g(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$
11. $y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
12. $y^{iv} - y = u_1(t) - u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
13. $y^{iv} + 5y'' + 4y = 1 - u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

*14. Sea la función f definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & \pi \le t < 2\pi, \end{cases}$$

y para todos los demás valores positivos de t de modo que $f(t + 2\pi) = f(t)$. Es decir, f es periódica con periodo 2π (ver el problema 28 de la sección 6.3). Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$y'' + y = f(t); \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

6.5 Funciones impulso

En algunas aplicaciones es necesario tratar con fenómenos de naturaleza impulsiva; por ejemplo, voltajes o fuerzas de gran magnitud que actúan durante intervalos de tiempo muy breves. Estos problemas suelen dar origen a ecuaciones diferenciales de la forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{1}$$

en donde $g(t)$ es grande durante un corto intervalo $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ y es cero en cualquier otro caso.

La integral $I(\tau)$, definida por

$$I(\tau) = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} g(t)\, dt, \tag{2}$$

o, dado que $g(t) = 0$ fuera del intervalo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$,

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt, \tag{3}$$

es una medida de la intensidad de la función de fuerza. En un sistema mecánico, en donde $g(t)$ es una fuerza, entonces $I(\tau)$ es el **impulso** total de la fuerza $g(t)$ durante el intervalo de tiempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. De manera semejante, si y es la corriente en un circuito eléctrico y $g(t)$ es la derivada con respecto al tiempo del voltaje, entonces $I(\tau)$ representa el voltaje total aplicado al circuito durante el intervalo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

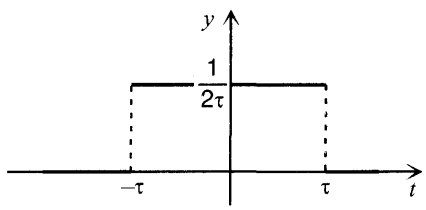


FIGURA 6.5.1 Gráfica de $y = d_\tau(t)$.

En particular, supóngase que t_0 es cero y que $g(t)$ se expresa por

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau, \\ 0, & t \le -\tau \text{ o } t \ge \tau, \end{cases} \tag{4}$$

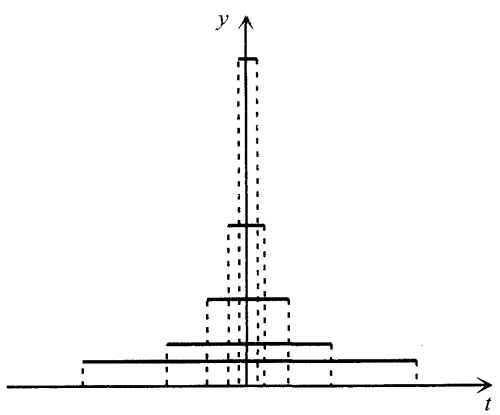


FIGURA 6.5.2 Gráficas de $y = d_\tau(t)$ cuando $\tau \to 0$.

en donde τ es una constante positiva pequeña (ver la figura 6.5.1). Según la ecuación (2) o la (3), se concluye de inmediato que, en este caso, $I(\tau) = 1$ independientemente del valor de τ, en tanto que $\tau \neq 0$. Ahora se idealizará la función de fuerza $d\tau$ al prescribir que actúa en intervalos de tiempo cada vez más y más cortos; es decir, se requiere que $\tau \to 0$, como se indica en la figura 6.5.2. Como resultado de esta operación de tomar el límite se obtiene

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0, \qquad t \neq 0. \tag{5}$$

Además, como $I(\tau) = 1$ para cada $\tau \neq 0$, se concluye que

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1. \tag{6}$$

Se pueden utilizar las ecuaciones (5) y (6) para definir una **función impulso unitario** δ ideal, que imparta un impulso de magnitud uno en $t = o$, para que sea cero para todos los valores de t diferentes de cero; es decir, la "función" δ se define como la que tiene las propiedades

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0; \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{8}$$

Es evidente que no existe función ordinaria de la clase estudiada en cálculo elemental que satisfaga las dos ecuaciones (7) y (8). La "función" δ, definida por estas ecuaciones, es un ejemplo de lo que se conoce como funciones generalizadas y suele denominarse **función delta** de Dirac[3]. Con frecuencia es conveniente representar funciones impulsivas de fuerza por medio de la función delta. Como $\delta(t)$ corresponde a un impulso unitario en $t = 0$, un impulso unitario en un punto arbitrario $t = t_0$ se define por $\delta(t - t_0)$. A partir de las ecuaciones (7) y (8) se concluye que

$$\delta(t - t_0) = 0, \qquad t \neq t_0; \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1. \tag{10}$$

La función delta no satisface las condiciones del teorema 6.1.2, pero, a pesar de ello, su transformada de Laplace puede definirse formalmente. Dado que $\delta(t)$ se define como el límite de $d_\tau(t)$ cuando $\tau \to 0$, es natural definir la transformada de Laplace de δ como un límite semejante de la transformada de d_τ. En particular, se supondrá que $t_0 > 0$ y $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}$ se define por la ecuación

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{\tau \to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\}. \tag{11}$$

para evaluar el límite de la ecuación (11) primero se observa que si $\tau < t_0$, lo que finalmente debe ser el caso cuando $\tau \to 0$, entonces $t_0 - \tau > 0$. Como $d\tau(t - t_0)$ es diferente de cero sólo en el intervalo de $t_0 - \tau$ a $t_0 + \tau$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} d_\tau(t - t_0)\, dt \\ &= \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} d_\tau(t - t_0)\, dt. \end{aligned}$$

[3] Paul A. M. Dirac (1902-1984), físico matemático inglés, recibió su doctorado en filosofía en Cambridge en 1926 y fue profesor de matemáticas allí hasta 1969. Fue galardonado con el Premio Nobel en 1933 (junto con Erwin Schrödinger) por sus investigaciones fundamentales en mecánica cuántica. Su resultado más célebre fue la ecuación relativista del electrón, publicada en 1928. A partir de esta ecuación predijo la existencia de un "anti-electrón", o positrón, que fue observado por primera vez en 1932. Al retirarse de Cambridge, Dirac partió a Estados Unidos, donde obtuvo una plaza de investigador en Florida State University.

Al sustituir $d_\tau(t-t_0)$ por su expresión de la ecuación (4) se obtiene

$$\mathscr{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{2\tau s}e^{-st}\Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau}$$
$$= \frac{1}{2\tau s}e^{-st_0}(e^{s\tau} - e^{-s\tau})$$

o bien,

$$\mathscr{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau}e^{-st_0}. \tag{12}$$

El cociente $(\operatorname{senh} s\tau)/s\tau$ se indetermina cuando $\tau \to 0$, pero es posible evaluar su límite al aplicar la regla de L'Hospital; se obtiene

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh s\tau}{s} = 1.$$

Luego, por la ecuación (11) se concluye que

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}. \tag{13}$$

La ecuación (13) define $\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}$ para cualquier $t_0 > 0$. Este resultado se extiende, a fin de permitir que t_0 sea cero, al hacer que $t_0 \to 0$ en el segundo miembro de (13); por tanto,

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0\to 0} e^{-st_0} = 1. \tag{14}$$

De manera semejante es posible definir la integral del producto de la función delta y cualquier función continua f. Se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt. \tag{15}$$

Si se aplica la definición (4) de $d_\tau(t)$ y el teorema del valor medio para integrales, se encuentra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt = \frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*) = f(t^*),$$

en donde $t_0 - \tau < t^* < t_0 + \tau$. De donde $t^* \to t_0$ cuando $\tau \to 0$ y por la ecuación (15) se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt = f(t_0). \tag{16}$$

A menudo es conveniente introducir la función delta al trabajar con problemas de impulsos y operar formalmente sobre aquélla como si fuese una función ordinaria. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la justificación

final de estos procedimientos se debe basar en un análisis cuidadoso de las operaciones de tomar límites que intervengan. Se ha desarrollado esa rigurosa teoría matemática, pero no se analiza aquí.

Ejemplo 1 Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \tag{17}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{18}$$

Este problema con valor inicial podría surgir en el estudio de algún circuito eléctrico al que se le aplica un impulso unitario de voltaje en el instante $t = \pi$.

Para resolver el problema dado se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, con lo que se obtiene

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = e^{-\pi s},$$

en donde se han aplicado las condiciones iniciales (18). Por tanto,

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} = e^{-\pi s}\frac{1}{(s + 1)^2 + 1}. \tag{19}$$

Por el teorema 6.3.2 o por el renglón 9 de la tabla 6.2.1,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2 + 1}\right\} = e^{-t}\operatorname{sen} t. \tag{20}$$

De donde, por el teorema 6.3.1, se tiene

$$y = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t - \pi), \tag{21}$$

que es la solución formal del problema dado. También es posible escribir y en la forma

$$y = \begin{cases} 0, & t < \pi, \\ e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t - \pi), & t \geq \pi. \end{cases} \tag{22}$$

En la figura 6.5.3 se muestra la gráfica de la ecuación (22).

En virtud de que las condiciones iniciales en $t = 0$ son homogéneas y no hay excitación externa hasta $t = \pi$, no hay respuesta en el intervalo $0 < t < \pi$. El impulso en $t = \pi$ produce una

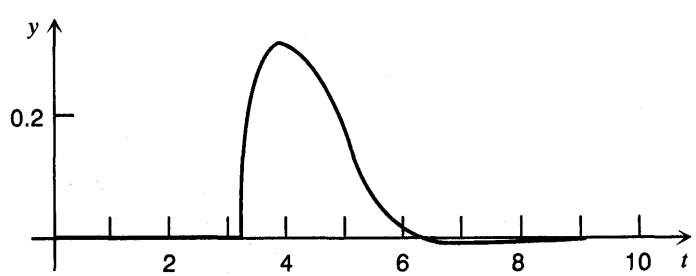


FIGURA 6.5.3 Solución del problema con valor inicial (17), (18).

respuesta que persiste de manera indefinida, aunque decae exponencialmente en ausencia de cualquier excitación externa adicional. La respuesta es continua en $t = \pi$ a pesar de la singularidad de la función de fuerza en ese punto. Sin embargo, la primera derivada de la solución tiene una discontinuidad por salto en $t = \pi$ y la segunda derivada tiene una discontinuidad infinita allí. Esto lo requiere la ecuación diferencial (17), ya que debe compensarse una singularidad en uno de los miembros de la ecuación por otra en el otro miembro.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 12, encuentre la solución del problema con valor inicial dado por medio de la transformada de Laplace.

1. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
4. $y'' - y = 2\delta(t - 1); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 2y' + 3y = \operatorname{sen} t + \delta(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
6. $y'' + \omega^2 y = \delta(t - \pi/\omega); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
7. $y'' + y = \delta(t - \pi)\cos t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' + 4y = 2\delta(t - \pi/4); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + y = u_{\pi/2}(t) + \delta(t - \pi) - u_{3\pi/2}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
10. $y'' + 4y = 4\delta(t - \pi/6)\operatorname{sen} t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
12. $y^{iv} - y = \delta(t - 1); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

*13. a) Demuestre por el método de variación de parámetros que la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = f(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

es

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau.$$

b) Demuestre que si $f(t) = d(t - p)$, entonces la solución del inciso a) se reduce a

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t - \pi),$$

lo cual concuerda con la ecuación (21) del texto.

6.6 Integral de convolución

Algunas veces es posible identificar una transformada de Laplace $H(s)$ como el producto de otras dos transformadas $F(s)$ y $G(s)$ las que corresponden a funciones conocidas f y g, respectivamente. En este caso, podría anticiparse que $H(s)$ sería la transformada del producto de f y g. Sin embargo, no es así; en otras palabras, la transformada de Laplace no puede conmutarse con multiplicaciones ordinarias. Por otra parte, si se introduce un "pro-

ducto generalizado" definido de manera adecuada, entonces cambia la situación, como se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 6.6.1 Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existen para $s > a \geq 0$, entonces

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \qquad s > a, \tag{1}$$

en donde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

La función h se conoce como convolución de f y g; las integrales de la ecuación (2) se llaman integrales de convolución.

La igualdad de las dos integrales de (2) se deduce al efectuar el cambio de variable $t - \tau = \xi$ en la primera integral. Antes de proporcionar la demostración de este teorema se harán algunas observaciones sobre la integral de convolución. Según este teorema, la transformada de convolución de dos funciones, en vez de ser la transformada de sus productos ordinarios, se expresa por el producto de las transformadas separadas. Suele recalcarse que la integral de convolución puede concebirse como un "producto generalizado" al escribir

$$h(t) = (f * g)(t). \tag{3}$$

En particular, la notación $(f * g)(t)$ sirve para indicar la primera integral que aparece en la ecuación (2).

La convolución $f * g$ tiene muchas de las propiedades de la multiplicación ordinaria. Por ejemplo, es relativamente sencillo demostrar que

$$f * g = g * f \qquad \text{(ley conmutativa)} \tag{4}$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \qquad \text{(ley distributiva)} \tag{5}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \qquad \text{(ley asociativa)} \tag{6}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0.$$

Las demostraciones de estas propiedades se dejan al lector. Sin embargo, existen otras propiedades de la multiplicación ordinaria que no tiene la integral de convolución. Por ejemplo, en general no es cierto que $f * 1$ es igual a f. Para ver esto, nótese que

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau) \cdot 1\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\,d\tau.$$

Si, por ejemplo, $f(t) = \cos t$, entonces

$$\begin{aligned}(f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t-\tau)\,d\tau = -\operatorname{sen}(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= -\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen} t \\ &= \operatorname{sen} t.\end{aligned}$$

Es evidente que $(f * 1)(t) \neq f(t)$. De manera semejante, puede no ser cierto que $f * f$ sea no negativo. Ver un ejemplo en el problema 3.

Las integrales de convolución surgen en varias aplicaciones en las que el comportamiento del sistema en el instante t depende no sólo de su estado en ese instante, también del desarrollo de sus estados anteriores. Los sistemas de esta clase algunas veces se les llama hereditarios y ocurren en campos tan diversos como el acarreo de neutrones, la viscoelasticidad y la dinámica de poblaciones.

Volviendo ahora a la demostración del teorema 6.6.1, nótese primero que si

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\, d\xi$$

y

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta)\, d\eta,$$

entonces

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta)\, d\eta. \tag{8}$$

Dado que el integrando de la primera integral no depende de la variable de integración de la segunda, es posible escribir $F(s)G(s)$ como una integral iterada,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta)\, d\eta \int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

Esta expresión puede ponerse en una forma más conveniente al introducir nuevas variables de integración. En primer lugar, sea $\xi = t - \eta$, para η fija. Entonces la integral con respecto a ξ de la ecuación (9) se transforma en una con respecto a t; de donde,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta)\, d\eta \int_\eta^\infty e^{-st} f(t-\eta)\, dt. \tag{10}$$

A continuación, sea $\eta = \tau$; entonces, la ecuación (10) queda

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\, dt. \tag{11}$$

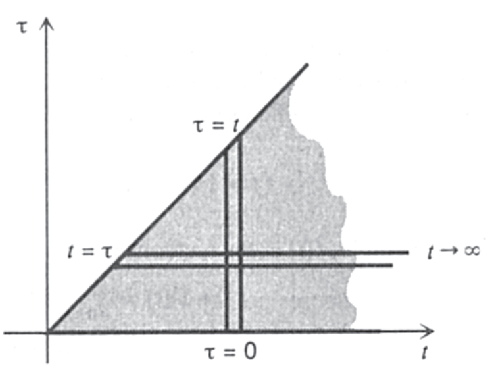


FIGURA 6.6.1 Región de integración de $F(s)G(s)$.

La integral del segundo miembro de (11) se lleva a cabo sobre la región sombreada en forma de cuña que se extiende hacia el infinito en el plano $t\tau$ que se muestra de la figura 6.6.1. En el supuesto de que es posible invertir el orden de la integración, finalmente se obtiene

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

o

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt \\ &= \mathscr{L}\{h(t)\}, \end{aligned} \tag{13}$$

en donde $h(t)$ quede definida por la ecuación (2). Esto completa la demostración del teorema 6.6.1.

Ejemplo 1 Encontrar la transformada inversa de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}. \tag{14}$$

Es conveniente concebir $H(s)$ como el producto de s^{-2} y $a/(s^2 + a^2)$ que, según los renglones 3 y 5 de la tabla 6.2.1, son las transformadas de t y sen at, respectivamente. De donde, por el teorema 6.6.1, la transformada inversa de $H(s)$ es

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\,\text{sen}\,a\tau\,d\tau = \frac{at - \text{sen}\,at}{a^2}. \tag{15}$$

El lector puede demostrar que se obtiene el mismo resultado si se escribe $h(t)$ en la forma alternativa

$$h(t) = \int_0^t \tau\,\text{sen}\,a(t-\tau)\,d\tau,$$

con lo que, en este caso, se comprueba la ecuación (2). Por supuesto, también puede hallarse $h(t)$ si se desarrolla $H(s)$ en fracciones parciales.

Ejemplo 2 Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \tag{16}$$

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1. \tag{17}$$

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial y aplicar las condiciones iniciales, se obtiene

$$s^2Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s),$$

o bien,

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 4} + \frac{G(s)}{s^2 + 4}. \tag{18}$$

Obsérvese que los términos primero y segundo del segundo miembro de la ecuación (18) contienen la dependencia de $Y(s)$ con respecto a las condiciones iniciales y la función de fuerza, respectivamente. Es conveniente escribir $Y(s)$ en la forma

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2 + 4}G(s). \tag{19}$$

Entonces, si se aplican los renglones 5 y 6 de la tabla 6.2.1 y el teorema 6.6.1, se obtiene

$$y = 3\cos 2t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2(t - \tau)g(\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Si se da una función de fuerza g específica, entonces puede evaluarse la integral de la ecuación (20) (mediante métodos numéricos, de ser necesario).

El ejemplo 2 ilustra el poder de la integral de convulción como herramienta para escribir la solución de un problema con valor inicial en términos de una integral. De hecho, es posible proceder de manera bastante parecida en problemas más generales. Considérese el problema que consta de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{21}$$

en donde a, b, y c son constantes reales y g es una función dada, junto con las condiciones iniciales

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \tag{22}$$

El problema con valor inicial (21), (22) a menudo se menciona como problema de entrada-salida. Los coeficientes a, b y c describen las propiedades de algún sistema físico y $g(t)$ es la entrada al sistema. Los valores y_0 y y'_0 describen el estado inicial y la solución y es la salida en el instante t.

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación (21) y aplicar las condiciones iniciales (22), se obtiene

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay'_0 = G(s).$$

Si se hace

$$\Phi(s) = \frac{(as + b)y_0 + ay'_0}{as^2 + bs + c}, \qquad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c}, \tag{23}$$

entonces es posible escribir

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s). \tag{24}$$

Por consiguiente,

$$y = \phi(t) + \psi(t), \tag{25}$$

en donde $\phi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ y $\psi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$. Obsérvese que $y = \phi(t)$ es la solución del problema con valor inicial

$$ay' + by'cy = 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \tag{26}$$

Obtenido a partir de las ecuaciones (21) y (22) al hacer $g(t)$ igual a cero. De manera semejante, $y = \psi(t)$ es la solución de

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{27}$$

en la cual cada uno de los valores de y_0 y y'_0 se han sustituido por cero.

Una vez que se cuenta con valores específicos de a, b, y c, es posible encontrar $\phi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ al utilizar la tabla 6.2.1, tal vez junto con una traslación o un desarrollo en fracciones parciales. Para encontrar $\psi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$ es conveniente escribir $\Psi(s)$ como

$$\Psi(s) = H(s)G(s), \tag{28}$$

en donde $H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1}$. La función H se conoce como **función de transferencia,**[4] y sólo depende de las propiedades del sistema de consideración; es decir, $H(s)$ queda determinada por completo por los coeficientes a, b, y c. Por otra parte, $G(s)$ sólo depende de la excitación externa $g(t)$ que se aplica al sistema. Por el teorema de convolución, es posible escribir

$$\psi(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)G(s)\} = \int_0^t h(t - \tau)g(\tau)\, d\tau, \tag{29}$$

en donde $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}$ y $g(t)$ es la función de fuerza dada.

Para lograr una mejor comprensión de la importancia de $h(t)$, se considerará el caso en el que $G(s) = 1$; como consecuencia, $g(t) = \delta(t)$ y $\Psi(s) = H(s)$. Esto significa que $y = h(t)$ es la solución del problema con valor inicial

$$ay'' + by' + cy = \delta(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \tag{30}$$

obtenida a partir de la ecuación (27) al sustituir $g(t)$ por $\delta(t)$. Por tanto, $h(t)$ es la respuesta del sistema a un impulso unitario aplicado en $t = 0$ y es natural nombrar a $h(t)$ como **respuesta al impulso** del sistema. Entonces, la ecuación (29) afirma que $\psi(t)$ es la convolución de la respuesta al impulso y la función de fuerza.

Con referencia al ejemplo 2, se observa que, en ese caso, la función de transferencia es $H(s) = 1/(s^2 + 4)$ y que la respuesta al impulso es $h(t) = (\text{sen } 2t)/2$. También, los dos primeros términos del segundo miembro de (20) constituyen la función $\phi(t)$, la solución de la ecuación homogénea correspondiente que satisface las condiciones iniciales dadas.

Problemas

1. Establezca las propiedades conmutativa, distributiva y asociativa de la integral de convolución.

[4] Esta terminología surge del hecho de que $H(s)$ es la razón de las transformadas de la salida y la entrada del problema (27).

(a) $f * g = g * f$ (b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
(c) $f * (g * h) = (f * g) * h$

2. Encuentre un ejemplo diferente al que se da en el texto que muestre que $(f * 1)(t)$ no necesariamente es igual a $f(t)$.
3. Demuestre, por medio del ejemplo $f(t) = \operatorname{sen} t$, que $f * f$ no necesariamente es no negativa.

En cada uno de los problemas 4 a 7 encuentre la transformada de Laplace de la función dada.

4. $f(t) = \int_0^t (t - \tau)^2 \cos 2\tau \, d\tau$
5. $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} \tau \, d\tau$
6. $f(t) = \int_0^t (t - \tau) e^{\tau} \, d\tau$
7. $f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t - \tau) \cos \tau \, d\tau$

En cada uno de los problemas 8 a 11 encuentre la transformada inversa de Laplace de la función dada al aplicar el teorema de convolución.

8. $F(s) = \dfrac{1}{s^4(s^2 + 1)}$
9. $F(s) = \dfrac{s}{(s + 1)(s^2 + 4)}$
10. $F(s) = \dfrac{1}{(s + 1)^2(s^2 + 4)}$
11. $F(s) = \dfrac{G(s)}{s^2 + 1}$

En cada uno de los problemas 12 a 19 exprese la solución del problema con valor inicial dado en términos de una integral de convolución.

12. $y'' + \omega^2 y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
13. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} \alpha t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
14. $4y'' + 4y' + 17y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
15. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - u_{\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
16. $y'' + 4y' + 4y = g(t); \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
17. $y'' + 3y' + 2y = \cos \alpha t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
18. $y^{iv} - y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
19. $y^{iv} + 5y'' + 4y = g(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

20. Considere la ecuación

$$\phi(t) + \int_0^t k(t - \xi)\phi(\xi) \, d\xi = f(t),$$

en la que f y k son funciones conocidas y ha de determinarse ϕ. Dado que la función desconocida ϕ aparece bajo un signo integral, la ecuación dada se llama **ecuación integral**; en particular, pertenece a una clase de ecuaciones integrales conocidas como ecuaciones integrales de Volterra. Calcule la transformada de Laplace de la ecuación integral dada y obtenga una expresión para $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ en términos de las transformadas $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y $\mathcal{L}\{k(t)\}$ de las funciones dadas f y k. La transformada inversa de $\mathcal{L}(\phi(t)\}$ es la solución de la ecuación integral original.

21. Considere la ecuación integral de Volterra (ver el problema 20).

$$\phi(t) + \int_0^t (t - \xi)\phi(\xi) \, d\xi = \operatorname{sen} 2t.$$

a) Demuestre que si u es una función total que $u''(t) = \phi(t)$, entonces

$$u''(t) + u(t) - tu'(0) - u(0) = \operatorname{sen} 2t.$$

b) Demuestre que la ecuación integral dada es equivalente al problema con valor inicial

$$u''(t) + u(t) = \operatorname{sen} 2t; \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

c) Resuelva la ecuación integral dada mediante la aplicación de la transformada de Laplace.

d) Resuelva el problema con valor inicial del inciso b) y compruebe que la solución es la misma que la obtenida en c).

*22. **La tautócrona**. Un problema de interés en la historia de las matemáticas es la de encontrar la tautócrona: la curva por la cual una partícula se deslizaría libremente sólo bajo la acción de la gravedad y llega a la parte inferior de esa curva en el mismo tiempo, sin importar su punto de partida sobre la misma. Este problema surgió en la construcción de un reloj de péndulo cuyo periodo es independiente de la amplitud de su movimiento. La tautócrona fue descubierta por Christian Huygens (1629-1695) en 1673 mediante métodos geométricos y posteriormente Leibniz y Jakob Bernoulli lo hicieron aplicando argumentos analíticos. La solución de Bernoulli (en 1690) fue una de las primeras ocasiones en las que se resolvió de manera explícita una ecuación diferencial.

En la figura 6.6.2 se muestra la configuración geométrica.El punto de partida $P(a, b)$ está unido al punto terminal (0, 0) por el arco C. La longitud del arco s se mide desde el origen y $f(t)$ denota la razón de cambio de s con respecto a y:

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{i}$$

Por el principio de conservación de la energía se deduce que el tiempo $T(b)$ necesario para que una partícula se deslice de P al origen es

$$T(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b - y}}\, dy. \tag{ii}$$

a) Suponga que $T(b) = T_0$, una constante, para cada b. Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación (ii) en este caso y aplicar el teorema de convolución, demuestre que

$$F(s) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\, \frac{T_0}{\sqrt{s}}; \tag{iii}$$

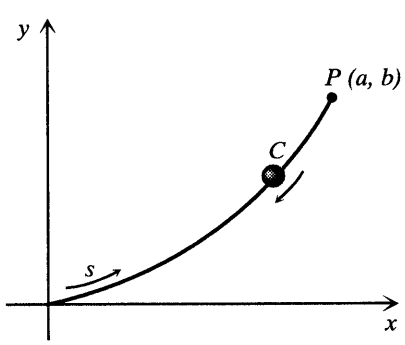


FIGURA 6.6.2 La tautócrona.

en seguida, demuestre que

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}\,T_0}{\pi\sqrt{y}}. \tag{iv}$$

Sugerencia: ver el problema 27 de la sección 6.1.

b) Si se combinan las ecuaciones (i) y (iv), demuestre que

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}, \tag{v}$$

en donde $\alpha = gT_0^2/\pi^2$.

c) Aplique la sustitución $y = 2\alpha\,\text{sen}^2(\theta/2)$ para resolver la ecuación (v) y demuestre que

$$x = \alpha(\theta + \text{sen}\,\theta), \qquad y = \alpha(1 - \cos\theta). \tag{vi}$$

Las ecuaciones (vi) pueden identificarse como las ecuaciones paramétricas de una cicloide. Por tanto, la tautócrona es un arco de cicloide.

BIBLIOGRAFÍA

Los libros enumerados a continuación contienen información adicional sobre la transformada de Laplace y sus aplicaciones:

Churchill, R. V., *Operational Mathematics* (3rd ed.)(New York: McGraw-Hill).

Doetsch, G., *Introduction to the Theory and Applications of the Laplace Transform* (New York: Springer).

Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems* (Reading, Mass: Addison-Wesley).

Kuhfittig, P. K. F., *Introduction to the Laplace Transform* (New York: Plenum).

Miles, J. W., *Integral Transform in Applied Mathematics* (London: Cambridge University Press).

Rainville, E. D., *The Laplace Transform: An Introduction* (New York: Macmillan, 1963).

Cada uno de los libros mencionados contiene una tabla de transformadas. También existen tablas extensas; ver por ejemplo,

Erdelyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms* (vol. 1)(New York: McGraw-Hill).

Roberts, G. E., y Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms* (Philadelphia: Saunders).

Un análisis adicional sobre funciones generalizadas puede encontrarse en

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions* (London: Cambridge University Press).

Capítulo 7 Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Existen muchos problemas físicos que comprenden varios elementos separados vinculados entre sí de alguna manera. Por ejemplo, las redes eléctricas presentan esta característica, como la tienen algunos problemas de la mecánica o de otros campos. En estos casos y en casos semejantes, el problema matemático correspondiente consta de un *sistema* de una o más ecuaciones diferenciales, que siempre es posible escribir como ecuaciones de primer orden. En este capítulo se abordarán los sistemas de ecuaciones *lineales* de primer orden, con la aplicación de algunos de los aspectos elementales del álgebra lineal para unificar la presentación.

7.1 Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas surgen de manera natural en los problemas que incluyen varias variables dependientes, cada una de las cuales es una función de una sola variable independiente. La variable independiente se denota por t, y x_1, x_2, x_3, . . . representan variables dependientes que son funciones de t. La derivación con respecto a t se indica con un apóstrofo.

Por ejemplo, considérese el sistema resorte-masa de la figura 7.1.1. Las dos masas se mueven sobre un superficie sin fricción bajo la influencia de las fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ y también están restringidas por los tres resortes cuyas constantes son k_1, k_2 y k_3, respectivamente. Si se aplican argumentos semejantes a los de la sección 3.8, se encuentran las siguientes ecuaciones para las coordenadas x_1 y x_2 de las dos masas:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_1(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t), \\
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\
&= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t).
\end{aligned} \tag{1}
$$

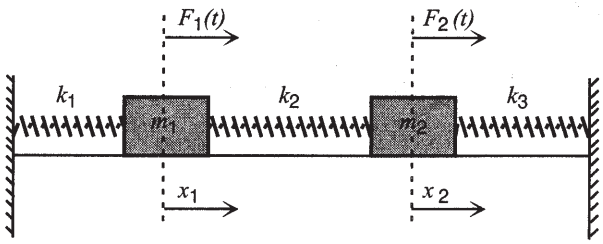


FIGURA 7.1.1 Sistema resorte-masa con dos grados de libertad.

En el problema 17 se describe una deducción de las ecuaciones (1).

A continuación, considérese el circuito paralelo *LRC* que se muestra en la figura 7.1.2. Sean V la caída de voltaje a través del capacitor e I la corriente que pasa por la inductancia. Con referencia a la sección 3.8 y al problema 18 de esta sección, es posible demostrar que el voltaje y la corriente son regidas por el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\
\frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC},
\end{aligned} \tag{2}
$$

en donde L es la inductancia, C la capacitancia y R la resistencia.

Como ejemplo final, se menciona el problema depredador-presa, uno de los problemas fundamentales de la ecología matemática, que se analiza con más detalle en la sección 9.5. Denótese por $H(t)$ y $P(t)$ las poblaciones de dos especies en el instante t, una de las cuales (P) devora a la otra (H). Por ejemplo, $P(t)$ y $H(t)$ pueden ser el número de zorros y conejos, respectivamente, en un bosque, o el número de percas y peces luna (que son devorados por los percas) en un estanque. Sin la presa, los depredadores disminuirán, y sin el depredador, la presa aumentaría. Lotka y Volterra propusieron en 1925 en un modelo matemático que muestra como es posible mantener un equilibrio ecológico cuando están presentes el depredador y su presa. El modelo consta del sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{aligned}
dH/dt &= a_1H - b_1HP, \\
dP/dt &= -a_2P + b_2HP,
\end{aligned} \tag{3}
$$

conocidas como ecuaciones del depredador-presa. En las ecuaciones (3) el coeficiente de a_1 es el índice de natalidad de la población H; de manera semejante, a_2 es el índice de mortalidad de la población P. Los términos HP de las dos ecuaciones modelan la interacción de las dos poblaciones. Se supone que el número de encuentros entre depredador y presa es proporcional al producto de las poblaciones. Dado que cualquiera de esos encuentros tien-

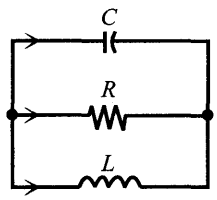


FIGURA 7.1.2 Circuito *LRC* paralelo.

de a ser bueno para el depredador y malo para la presa, entonces el signo de *HP* es negativo en la primera ecuación y positivo en la segunda. Los coeficientes b_1 y b_2 son los coeficientes de interacción entre depredador y presa.

Existe una relación importante entre los sistemas de ecuaciones de primer orden y las ecuaciones simples de orden superior. En primer lugar considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 El movimiento de cierto sistema resorte-masa (ver el ejemplo 3 de la sección 3.8) se describe por la ecuación diferencial de segundo orden

$$u'' + 0.125u' + u = 0. \tag{4}$$

Escribir de nuevo esta ecuación como un sistema de ecuaciones de primer orden.

Sean $x_1 = u$ y $x_2 = u'$; entonces se deduce que $x_1' = x_2$. Además, $u'' = x_2'$. Al sustituir u, u' y u'' de la ecuación (4) se obtiene

$$x_2' + 0.125x_2 = x_1 = 0.$$

Por tanto, x_1 y x_2 satisfacen el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 - 0.125x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

La ecuación general de movimiento de un sistema resorte-masa,

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t), \tag{6}$$

puede transformarse en un sistema de ecuaciones de primer orden de la misma manera. Si se hace $x_1 = u$ y $x_2 = u'$ y se procede como en el ejemplo 1 rápidamente se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -(k/m)x_1 - (\gamma/m)x_2 + F(t)/m. \end{aligned} \tag{7}$$

De hecho, una ecuación arbitraria de n-ésimo orden

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{8}$$

siempre puede reducirse a un sistema de n ecuaciones de primer orden. Para demostrar que esto es cierto, se extiende el método del ejemplo 1 mediante la introducción de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definidas por

$$x_1 = y, \qquad x_2 = y', \qquad x_3 = y'', \ldots, x_n = y^{(n-1)}. \tag{9}$$

Entonces se concluye de inmediato que

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \end{aligned} \tag{10}$$

y, por la ecuación (8),

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{11}$$

Las ecuaciones (10) y (11) son un caso especial del sistema más general

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

De manera semejante, el sistema (1) puede reducirse a un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden de la forma (12), mientras que los sistemas (2) y (3) ya se encuentran en esta forma. De hecho, los sistemas de la forma (12) incluyen casi todos los casos de interés, por lo que gran parte de la teoría más avanzada de ecuaciones diferenciales se dedica a estos sistemas.

Se dice que el sistema (12) tiene una **solución** sobre el intervalo I: $\alpha < t < \beta$ si existe un conjunto de n funciones.

$$x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t), \tag{13}$$

diferenciables en todos los puntos en el intervalo I y que satisfagan el sistema de ecuaciones (12) en todos los puntos de este intervalo. Además del sistema dado de ecuaciones diferenciales también pueden darse condiciones iniciales de la forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \qquad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots \quad x_n(t_0) = x_n^0, \tag{14}$$

en donde t_0 es un valor especificado de t en I y $x_1^0, \ldots, x_n^0$ son números prescritos. Las ecuaciones diferenciales (12) y las condiciones iniciales (14) juntas forman un problema con valor inicial.

Una solución (13) puede considerarse como un conjunto de ecuaciones paramétricas en un espacio n-dimensional. Para un valor dado de t, las ecuaciones (13) dan valores de las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de un punto en el espacio. A medida que t cambia, las coordenadas en general también lo hacen. La colección de puntos correspondientes a $\alpha < t < \beta$ forma una curva en el espacio. A menudo resulta útil pensar en la curva como la trayectoria de una partícula que se desplaza según el sistema de ecuaciones diferenciales (12). Las condiciones iniciales (14) determinan el punto de partida de la partícula en movimiento.

A fin de garantizar que el problema con valor inicial (12), (14) tenga una solución única, es necesario imponer ciertas condiciones sobre las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_n$. El siguiente

teorema es análogo al 2.4.1, el teorema de existencia y unicidad para una sola ecuación de primer orden.

Teorema 7.1.1 Sean cada una de las funciones $F_1, \ldots, F_n$ y las derivadas parciales $\partial F_1/\partial x_1, \ldots, \partial F_1/\partial x_n, \ldots, \partial F_n/\partial x_1, \ldots, \partial F_n/\partial x_n$ continuas en una región R del espacio $tx_1 x_2 \ldots x_n$ definido por $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n$, supóngase que el punto $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ está en R. Entonces existe un intervalo $|t - t_0| < h$ en el que existe una solución única $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (12) que también satisface las condiciones iniciales (14).

La demostración de este teorema puede construirse al generalizar el argumento de la sección 2.11, pero no se da aquí. Sin embargo, nótese que en las hipótesis del teorema nada se dice acerca de las derivadas parciales de $F_1, \ldots, F_n$ con respecto a la variable independiente t. También, en la conclusión no se especifica con exactitud, la longitud $2h$ del intervalo en el que existe la solución y, en algunos casos, puede ser muy corto. Por último, es posible establecer el mismo resultado con base en hipótesis algo más débiles, pero más complicadas, de modo que el teorema según se enuncia no es el más general que se conoce y las condiciones dadas son suficientes, pero no necesarias, para que se cumpla la conclusión.

Si cada una de las funciones $F_1, \ldots, F_n$ de las ecuaciones (12) es una función lineal de las variables dependientes $x_1, \ldots, x_n$, entonces se dice que el sistema de ecuaciones es **lineal**; en caso contrario, es **no lineal**. Por tanto, el sistema general de n ecuaciones lineales de primer orden es de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Si cada una de las funciones $g_1, \ldots, g_n(t)$ es cero para toda t en intervalo I, entonces se dice que el sistema (15) es **homogéneo**; de lo contrario, es **no homogéneo**. Obsérvese que los sistemas (1) y(2) son lineales, pero pero que el sistema (3) es no lineal. El sistema (1) es no homogéneo a menos que $F_1(t) = F_2(t) = 0$, en tanto que el sistema (2) es homogéneo. Para el sistema lineal (15), el teorema de existencia y unicidad es más sencillo y a la vez tiene una conclusión más poderosa. Es análogo a los teoremas 2.2.1 y 3.2.1.

Teorema 7.1.2 Si las funciones $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ son continuas sobre un intervalo abierto I; $\alpha < t < \beta$, entonces existe una solución única $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ del sistema (15) que también satisface las condiciones iniciales (14), en donde $x_1^0, \ldots, x_n^0$ son números preescritos cualesquiera. Además, la solución existe en todo el intervalo I.

Nótese que, en contraste con la situación para un sistema no lineal, la existencia y unicidad de la solución de un sistema lineal queda garantizada en todo el intervalo en el que se

satisfacen las hipótesis. Además, para un sistema lineal los valores iniciales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ en $t = t_0$ son completamente arbitrarios, mientras que en el caso no lineal el punto inicial debe estar en la región R definida en el teorema 7.1.1.

El resto de este capítulo se dedica a sistemas de ecuaciones lineales de primer orden (los sistemas no lineales se incluyen en el análisis en los capítulos 8 y 9). En la presentación se utiliza notación matricial y se supone que el lector está familiarizado con las propiedades de las matrices. En las secciones 7.2 y 7.3 se resumen los hechos necesarios acerca de las matrices; en cualquier libro elemental sobre álgebra lineal se pueden encontrar más detalles.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, reduzca la ecuación dada a un sistema de ecuaciones de primer orden

1. $u'' + 0.5u' + 2u = 0$
2. $u'' + 0.5u' + 2u = 3 \operatorname{sen} t$
3. $t^2u'' + tu' + (t^2 - 0.25)u = 0$
4. $u'''' - u = 0$

5. Considere el problema con valor inicial $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t)$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_0'$. Transfórmelo en un problema con valor inicial para dos ecuaciones de primer orden.
6. Reduzca el sistema (1) a un sistema de ecuaciones de primer orden de la forma (12).
7. Algunas veces es posible transformar los sistemas de ecuaciones de primer orden en una sola ecuación de orden superior. Considere el sistema

$$x_1' = -2x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - 2x_2.$$

a) Despeje x_2 en la primera ecuación y sustituya la expresión resultante en la segunda ecuación, obteniendo así una ecuación de segundo orden para x_1. Resuelva esta ecuación para x_1 y, a continuación, determine también x_2.
b) Encuentre la solución del sistema dado que también satisfaga las condiciones iniciales $x_1(0) = 2, x_2(0) = 3$.
c) Trace la curva, para $t \geq 0$, dada paramétricamente por las expresiones para x_1 y x_2 obtenidas en el inciso b).

En cada uno de los problemas 8 a 12 proceda como en el problema 7 para transformar el sistema dado en una sola ecuación de segundo orden. Después, resuelva para x_1 y x_2, y haga que se cumplan las condiciones iniciales. Por último, trace la gráfica de la solución para $t \geq 0$.

8. $x_1' = 3x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
   $x_2' = 2x_1 - 2x_2, \quad x_2(0) = \frac{1}{2}$
9. $x_1' = 1.25x_1 + 0.75x_2, \quad x_1(0) = -2$
   $x_2' = 0.75x_1 + 1.25x_2, \quad x_2(0) = 1$
10. $x_1' = x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = -1$
    $x_2' = 3x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 2$
11. $x_1' = 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
    $x_2' = -2x_1, \quad x_2(0) = 4$
12. $x_1' = -0.5x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = -2$
    $x_2' = -2x_1 - 0.5x_2, \quad x_2(0) = 2$

13. Transforme las ecuaciones (2) del circuito paralelo en una sola ecuación de segundo orden.
14. Demuestre que si a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son constantes en las que a_{12} y a_{21} no son cero, y si las funciones g_1 y g_2 son diferenciables, entonces el problema con valor inicial

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \qquad x_1(0) = x_1^0$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \qquad x_2(0) = x_2^0$$

puede transformarse en un problema con valor inicial para una sola ecuación de segundo orden. ¿Es posible efectuar el mismo procedimiento si $a_{11}, \ldots, a_{22}$ son funciones de t?

15. Considere el sistema lineal homogéneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y,$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y.$$

Demuestre que si $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ y $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ son dos soluciones del sistema dado, entonces $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ también es una solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2. Este es el principio de superposición.

16. Sean $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ y $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ dos soluciones cualesquiera del sistema lineal no homogéneo.

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t),$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t).$$

Demuestre que $x = x_1(t) - x_2(t)$, $y = y_1(t) - y_2(t)$

17. Las ecuaciones (1) pueden deducirse al trazar un diagrama de cuerpo libre en el que se muestren las fuerzas que actúan sobre cada masa. En la figura 7.1.3*a* se muestra la situación si los dos desplazamientos, x_1 y x_2, de las dos masas son positivos (hacia la derecha) y $x_2 > x_1$, entonces los resortes 1 y 2 se alargan y el 3 se comprime, lo que da lugar a las fuerzas que se indican en la figura 7.1.3*b*. Aplique la ley de Newton ($F = ma$) para deducir las ecuaciones (1).

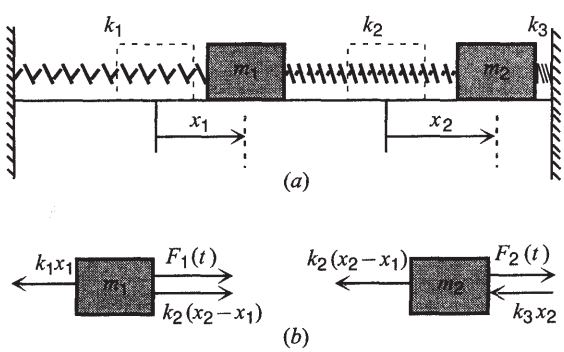


FIGURA 7.1.3. a) Los dos desplazamientos x_1 y x_2 son positivos. b) Diagrama de cuerpo libre del sistema resorte-masa.

Circuitos eléctricos. La teoría de los circuitos eléctricos, como el que se muestra en la figura 7.1.2, que constan de inductancias, resistores y capacitores, se basa en las leyes de Kirchhoff: 1) El flujo neto de corriente en cada nodo (o unión) es cero; 2) la caída neta de voltaje alrededor de cada circuito cerrado es cero. Además de las leyes de Kirchhoff también se cuenta con la relación entre la corriente I, en amperes, que pasa por cada elemento del circuito y la caída de voltaje V, en volts, a través del elemento; a saber,

$$V = RI; \qquad R = \text{resistencia en ohms}$$
$$C\frac{dV}{dt} = I; \qquad C = \text{capacitancia en farads}$$

$$L\frac{dI}{dt} = V; \qquad L = \text{inductancia en henrys.}$$

Las leyes de Kirchhoff y la relación corriente-voltaje para cada elemento del circuito proporcionan un sistema de ecuaciones algebraicas y diferenciales a partir de las cuales es posible determinar el voltaje y la corriente en todo el circuito. Los problemas 18 a 20 ilustran el procedimiento que se acaba de describir.

18. Considere el circuito que se muestra en la figura 7.1.2. Sean I_1, I_2 e I_3 la corriente que pasa por el capacitor, el resistor y la inductancia, respectivamente. De manera semejante, sean V_1, V_2 y V_3 las caídas de voltaje correspondientes. Las flechas denotan las direcciones arbitrariamente elegidas en que se tomarán como positivas las corrientes y las caídas de voltaje.

a) Aplique la segunda ley de Kirchhoff a la espira cerrada superior del circuito y demuestre que

$$V_1 - V_2 = 0. \tag{i}$$

De manera semejante, demuestre que

$$V_2 - V_3 = 0. \tag{ii}$$

b) Aplique la primera ley de Kirchhoff a cualquier nodo del circuito y demuestre que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \tag{iii}$$

c) Aplique la relación corriente-voltaje a cada elemento del circuito para obtener las ecuaciones

$$CV_1' = I_1, \qquad V_2 = RI_2, \qquad LI_3' = V_3. \tag{iv}$$

d) Elimine V_2, V_3, I_1 e I_2 de las ecuaciones (i) a (iv) para obtener

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \qquad LI_3' = V_1. \tag{v}$$

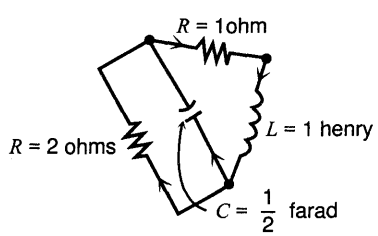


FIGURA 7.1.4 Circuito del problema 19.

Observe que si en las ecuaciones (v) se eliminan los subíndices, entonces se obtiene el sistema (2) del texto.

19. Considere el circuito que se muestra en la figura 7.1.4. Aplique el método descrito en el problema 18 para demostrar que la corriente I que pasa por la inductancia y el voltaje V a través del capacitor satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dI}{dt} = -I - V,$$

$$\frac{dV}{dt} = 2I - V.$$

20. Considere el circuito que se muestra en la figura 7.1.5. Aplique el método descrito en el problema 18 para demostrar que la corriente I que pasa por la inductancia y el voltaje V a través del capacitor satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$L\frac{dI}{dt} = -R_1 I - V,$$

$$C\frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}.$$

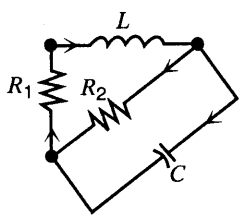


FIGURA 7.1.5 Circuito del problema 20.

7.2 Repaso de matrices

Por razones teóricas y de cálculo es conveniente considerar algunos de los resultados de la teoría de matrices[1] en el problema con valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para efectos de referencia, esta sección y la siguiente se dedican a presentar un breve resumen de los hechos que se necesitarán más tarde. En cualquier libro elemental sobre álgebra lineal pueden encontrarse más detalles. Sin embargo, se supone que el lector está familiarizado con los determinantes y la manera de evaluarlos.

Las matrices se designan por letras mayúsculas negritas **A**, **B**, **C**, . . . , en ocasiones se usan mayúsculas griegas en negritas Φ, Ψ, ... Una matriz **A** consiste en un arreglo rectangular de números, o elementos, dispuestos en m renglones y n columnas, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

[1] Las propiedades de las matrices fueron estudiadas con amplitud por primera vez en 1858, en un artículo del algebrista inglés Arthur Cayley (1821-1895), aunque la palabra matriz la introdujo su buen amigo James Sylvester (1814-1897), en 1850. Cayley realizó parte de su mejor trabajo en matemáticas mientras ejercía como abogado, de 1849 a 1863; entonces se volvió profesor de matemáticas en Cambridge, puesto que conservó durante el resto de su vida. Después del trabajo fundamental de Cayley, el desarrollo de la teoría de matrices avanzó con rapidez, con contribuciones importantes de Charles Hermite, Georg Frobenius y Camille Jordan, entre otros.

Se dice que **A** es una matriz de $m \times n$. Aunque en este capítulo a menudo se supondrá que los elementos de ciertas matrices son números reales, en este sección se supone que los elementos de las matrices pueden ser números complejos. El elemento que se encuentra en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna se designa como a_{ij}, en donde el primer subíndice identifica su renglón y el segundo su columna. Algunas veces se utiliza la notación (a_{ij}) para denotar la matriz cuyo elemento genérico es a_{ij}.

Asociada con cada matriz está la matriz $\mathbf{A}^T$, conocida como **transpuesta** de **A**, y que se obtiene a partir de **A** al intercambiar los renglones y las columnas de ésta. Por tanto, si $\mathbf{A} = (a_{ij})$, entonces $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$. También el conjugado complejo de a_{ij} se denotará por $\overline{a}_{ij}$ y por $\overline{\mathbf{A}}$ se denotará la matriz que se obtiene de **A** al sustituir cada elemento a_{ij} por su conjugado $\overline{a}_{ij}$. La matriz **A** se llama **conjugada** de **A**. También es necesario considerar la transpuesta de la matriz conjugada $\overline{\mathbf{A}}^T$. Esta matriz se llama **adjunta** de **A** y se denota por $\mathbf{A}^*$.

Por ejemplo, sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & 4-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}.$$

Para los efectos de este texto, se tiene un interés particular en dos tipos algo especiales de matrices: Las matrices cuadradas, que tienen el mismo número de renglones y de columnas, es decir, $m = n$ y los vectores (o vectores de columna), que pueden concebirse como matrices de $n \times 1$ o matrices que tienen una sola columna. Se dice que las matrices cuadradas que tienen n renglones y n columnas son de orden n. Los vectores (columna) se denotarán por letras minúsculas negritas **x**, **y**, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, . . . La transpuesta $\mathbf{x}^T$ de un vector columna $n \times 1$ es un vector renglón de $1 \times n$; es decir, la matriz que consta de un renglón cuyos elementos son los mismos que los elementos en las posiciones correspondientes de **x**.

Propiedades algebraicas. 1. **Igualdad.** Se dice que dos matrices **A** y **B** de $m \times n$ son iguales si sus elementos correspondientes son iguales; es decir, si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y j.

2. **Cero.** El símbolo **0** se usará para denotar la matriz (o vector) cada uno de cuyos elementos es cero.

3. **Adición.** La suma de dos matrices **A** y **B** de $m \times n$ se define como la matriz obtenida al sumar elementos correspondientes:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{2}$$

Con esta definición se deduce que la adición de matrices es conmutativa y asociativa, de modo que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \tag{3}$$

4. **Multiplicación por un número.** El producto de una matriz **A** y un número complejo α se define como sigue:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}). \tag{4}$$

Las leyes distributivas

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \qquad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{5}$$

se satisfacen para este tipo de multiplicación. En particular, la negativa de **A**, denotada por $-\mathbf{A}$, se define por

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}. \tag{6}$$

5. **Sustracción.** La diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de dos matrices de $m \times n$ se define por

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{7}$$

Por tanto,

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}), \tag{8}$$

que es semejante a la ecuación (2).

6. **Multiplicación.** El producto **AB** de dos matrices se define siempre que el número de columnas del primer factor sea igual al número de renglones del segundo. Si **A** y **B** son matrices de $m \times n$ y de $n \times r$, respectivamente, entonces el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es una matriz de $m \times r$. El elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna de **C** se encuentra al multiplicar cada elemento del i-ésimo renglón de **A** por el elemento correspondiente de la j-ésima columna de **B** y después sumar los productos resultantes. Simbólicamente,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{9}$$

Es posible demostrar por cálculo directo que la multiplicación de matrices satisface la ley asociativa

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{10}$$

y la ley distributiva

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \tag{11}$$

Sin embargo, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. A fin de que los productos **AB** y **BA** existan y sean del mismo tamaño, es necesario que **A** y **B** sean matrices cuadradas del mismo orden. Incluso en ese caso, no necesariamente los dos productos son iguales, de modo que, en general

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{12}$$

Ejemplo 1 Para ilustrar la multiplicación de matrices, así como el hecho de que ésta no necesariamente es conmutativa, considérense las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con base en la definición de multiplicación que se da en la ecuación (9) se tiene

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De manera semejante, se encuentra que

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

7. **Multiplicación de vectores.** La multiplicación de matrices también se aplica como un caso especial si las matrices **A** y **B** son los vectores renglón y columna de $1 \times n$ y $n \times 1$, respectivamente. Si se denotan estos vectores por $\mathbf{x}^T$ y **y** se tiene

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{13}$$

El resultado de una operación de este tipo es un número (complejo) y por la ecuación (13) se concluye directamente que

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}, \qquad (\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}). \tag{14}$$

Existe otro tipo muy útil de multiplicación vectorial, que también se define para dos vectores cualesquiera que tengan el mismo número de componentes.Este producto, denotado por (x, y), se denomina **producto escalar** o **interno** y se define por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i. \tag{15}$$

El producto escalar también es un número (complejo) y, al comparar las ecuaciones (13) y (15), se ve que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}}. \tag{16}$$

De la ecuación (15) se deduce que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, & (\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\ (\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) &= \bar{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{17}$$

Nótese que aun si el vector **x** tiene elementos con partes imaginarias diferentes de cero, el producto escalar de **x** consigo mismo da lugar a un número real no negativo,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2. \tag{18}$$

La cantidad no negativa $(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$, que a menudo se denota por $\|\mathbf{x}\|$, se llama **longitud** o **magnitud** de $\mathbf{x}$. Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, entonces se dice que los dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son **ortogonales**. Por ejemplo, los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ de la geometría vectorial tridimensional forman un conjunto ortogonal.

Por otra parte, el producto de matrices

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{19}$$

puede no ser un número real. Si todas las componentes del segundo factor de las ecuaciones (13) y (15) son reales, entonces los dos productos son idénticos y se reducen al producto punto que suele encontrarse en contextos físicos y geométricos con $n = 3$.

Por ejemplo, sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(3) = 4 + 3i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2 + 7i,$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 3 + 2i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7.$$

8. **Identidad**. La identidad multiplicativa o simplemente la matriz $\mathbf{I}$, se define por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

De la definición de multiplicación de matrices, se tiene

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{21}$$

para cualquier matriz (cuadrada) $\mathbf{A}$. De donde, la ley conmutativa se cumple para las matrices cuadradas si una de éstas es la identidad.

9. **Inversa**. Para definir una operación para matrices cuadradas, análoga a la división de números, es necesario determinar, para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ dada, otra matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, en donde $\mathbf{I}$ es la identidad. Si $\mathbf{B}$ existe, se denomina inversa multiplicativa, o simplemente inversa, de $\mathbf{A}$ y se escribe $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Es posible demostrar que si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, entonces

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{22}$$

En otras palabras, la multiplicación es conmutativa entre cualquier matriz y su inversa. Si **A** tiene una inversa multiplicativa $\mathbf{A}^{-1}$, entonces se dice que **A** es **no singular**; de lo contrario, **A** es **singular**.

Existen varias maneras de calcular $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de **A**, si se supone que existe. Una de ellas comprende el uso de determinantes. Asociado con cada elemento a_{ij} de una matriz dada se tiene el menor M_{ij}, que es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz original, es decir, el renglón y la columna que contienen a a_{ij}. También, asociado con cada elemento a_{ij} se tiene el cofactor C_{ij} definido por la ecuación

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{23}$$

Si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, es posible demostrar que el elemento general b_{ij} se expresa por

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}}. \tag{24}$$

Aunque la ecuación (24) no es una manera eficiente[2] para calcular $\mathbf{A}^{-1}$, sugiere una condición que debe satisfacer **A** para que tenga una inversa. De hecho, la condición es tanto necesaria como suficiente: **A** es no singular si y sólo si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Si $\det \mathbf{A} = 0$, entonces **A** es singular.

Otra forma por lo común mejor para calcular $\mathbf{A}^{-1}$ es mediante operaciones elementales sobre los renglones. Existen tres de esas operaciones:

1. Intercambio de dos renglones.
2. Multiplicación de un renglón por un escalar diferente de cero.
3. Adición de cualquier múltiplo de un renglón a otro renglón.

Cualquier matriz **A** no singular puede transformarse en la identidad **I** mediante una secuencia sistemática de estas operaciones. Es posible demostrar que si se efectúa la misma secuencia de operaciones sobre **I**, ésta se transforma en $\mathbf{A}^{-1}$. La transformación de una matriz por una secuencia de operaciones elementales sobre los renglones suele mencionarse como **reducción respecto a los renglones**. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

Ejemplo 2 Encontrar la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz **A** puede transformarse en la identidad **I** mediante la siguiente secuencia de operaciones. El resultado de cada paso se muestra en la columna de la derecha.

[2] Para n grande, el número de multiplicaciones necesario para evaluar $\mathbf{A}^{-1}$ mediante la ecuación (24) es proporcional a $n!$. Si se aplican métodos más eficientes, como el procedimiento de reducción respecto a los renglones que se describe después el número de multiplicaciones es proporcional sólo a n^3. Incluso para valores pequeños de n (como $n = 4$), los determinantes no son una herramienta que exija poco para calcular inversas y se prefieren los métodos de reducción respecto a los renglones.

a) Obtener ceros en las posiciones fuera de la diagonal en la primera columna al sumar (–3) veces el primer renglón al segundo y sumar (–2) veces el primer renglón al tercero.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Obtener un uno en la posición de la diagonal en la segunda columna al multiplicar el segundo renglón por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Obtener ceros en las posiciones fuera de la diagonal en la segunda columna al sumar el segundo renglón al primero y sumar (–4) veces el segundo renglón al tercero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

d) Obtener un uno en la posición de la diagonal en la tercera columna al multiplicar el tercer renglón por $(-\frac{1}{5})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Obtener ceros en las posiciones fuera de la diagonal en la tercera columna al sumar $(-\frac{3}{2})$ veces el tercer renglón al primero y sumar $(-\frac{5}{2})$ veces el tercer renglón al segundo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se efectúa la misma secuencia de operaciones, en el mismo orden sobre **I**, se obtiene la siguiente sucesión de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

La última de estas matrices es $\mathbf{A}^{-1}$, resultado que es posible comprobar por multiplicación directa con la matriz original **A**.

Este ejemplo se facilitó ligeramente debido al hecho de que la matriz original **A** tenía un uno en la esquina superior izquierda ($a_{11} = 1$). En caso de no ser así, el primer paso es obtener un uno en esa posición al multiplicar el primer renglón por $1/a_{11}$, en tanto que $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$, entonces es necesario intercambiar el primer renglón con algún otro para llevar un elemento diferente de cero a la posición superior izquierda antes de seguir adelante.

Funciones matriciales. Algunas veces es necesario considerar vectores o matrices cuyos elementos son funciones de una variable real t. Se escribe

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

respectivamente.

Se dice que la matriz $\mathbf{A}(t)$ es continua en $t = t_0$, o sobre un intervalo abierto $\alpha < t < \beta$, si cada elemento de $\mathbf{A}$ es una función continua en el punto o sobre el intervalo dados. De manera semejante, se dice que $\mathbf{A}(t)$ es diferenciable si cada uno de sus elementos es diferenciable, y su derivada $d\mathbf{A}/dt$ se define por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right); \tag{26}$$

es decir, cada elemento de $d\mathbf{A}/dt$ es la derivada del elemento correspondiente de $\mathbf{A}$. De la misma manera, la integral de una función matricial se define como

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)\,dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right). \tag{27}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \int_0^{\pi} \mathbf{A}(t)\,dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Muchas de las reglas del cálculo elemental pueden extenderse con facilidad a las funciones matriciales; en particular,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \qquad \text{en donde } \mathbf{C} \text{ es una matriz constante;} \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}. \tag{30}$$

En las ecuaciones (28) y (30) es necesario tener cuidado en cada término para evitar que se intercambie de manera inadvertida el orden de la multiplicación. Las definiciones expresadas por las ecuaciones (26) y (27) también se aplican como casos especiales a los vectores.

Problemas

1. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

encuentre

(a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$ (c) $\mathbf{AB}$ (d) $\mathbf{BA}$

2. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 3+2i & 2-i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$,

encuentre

(a) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ (b) $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (c) $\mathbf{AB}$ (d) $\mathbf{BA}$

3. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

encuentre

(a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\mathbf{B}^T$ (c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (d) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

4. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix}$,

encuentre

(a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\bar{\mathbf{A}}$ (c) $\mathbf{A}^*$

5. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

verifique que $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

6. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

verifique que

(a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

7. Demuestre cada una de las siguientes leyes del álgebra matricial:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

(c) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ (d) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

(e) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})C$ (f) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

8. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$, encuentre

(a) $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ (b) $\mathbf{y}^T\mathbf{y}$ (c) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (d) $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$

9. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$, demuestre que

(a) $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$ (b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$

En cada uno de los problemas 10 a 19, calcule la inversa de la matriz dada, o bien demuestre que esta última es singular.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

20. Demuestre que si **A** es no singular, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ queda determinada de manera única; es decir, demuestre que no puede haber dos matrices diferentes **B** y **C** tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$.
21. Demuestre que si **A** es no singular entonces $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$; es decir la multiplicación es conmutativa entre cualquier matriz no singular y su inversa.

22. Si $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^{t} & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^{t} & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^{t} & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$,

encuentre

(a) $\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{AB}$ (c) $d\mathbf{A}/dt$ (d) $\int_0^1 \mathbf{A}(t)\,dt$

En cada uno de los problemas 23 a 25, compruebe que el vector dado satisface la ecuación diferencial dada.

23. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$

24. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{t}$

25. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}e^{-t} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}$

En los problemas 26 y 27 compruebe que la matriz dada satisface la ecuación diferencial dada

26. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{\Psi}, \qquad \mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{\Psi}, \qquad \mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^{t} & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^{t} & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$

7.3 Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales; independencia lineal, eigenvalores, eigenvectores

En esta sección se repasan algunos resultados del álgebra lineal que son importantes para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Algunos de estos resultados se demuestran con facilidad y otros no; dado que sólo se tiene interés en resumir algo de información útil, en ningún caso se dan indicaciones sobre las demostraciones. Todos los resultados de esta sección dependen de algunos hechos básicos acerca de la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. Un conjunto de n ecuaciones algebraicas lineales simultáneas en n variables

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{1}$$

puede escribirse como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

en donde se dan la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ y el vector $\mathbf{b}$ y deben determinarse las componentes de $\mathbf{x}$. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces se dice que el sistema es homogéneo; de lo contrario, es **no homogéneo**. Se dice que dos sistemas que tienen precisamente el mismo conjunto de soluciones son **sistemas equivalentes**.

Si la matriz de los coeficientes $\mathbf{A}$ es no singular; es decir, si det $\mathbf{A}$ es diferente de cero, entonces existe una solución única del sistema (2). En virtud de que $\mathbf{A}$ es no singular, existe $\mathbf{A}^{-1}$ y puede hallarse la solución o multiplicar por la izquierda cada miembro de la ecuación (2) por $\mathbf{A}^{-1}$; por tanto,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{3}$$

En particular, el problema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, correspondiente a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ en la ecuación (2), tiene sólo la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Por otra parte, si $\mathbf{A}$ es singular; es decir, si det $\mathbf{A}$ es cero, entonces no existen soluciones de la ecuación (2), o existen pero no son únicas. Dado que $\mathbf{A}$ es singular, $\mathbf{A}^{-1}$ no existe, por lo que la ecuación (3) deja de ser válida. El sistema homogéneo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{4}$$

tiene (una infinidad de) soluciones diferentes de cero además de la solución trivial. La situación para el sistema no homogéneo (2) es más complicada. Este sistema no tiene solución a menos que el vector $\mathbf{b}$ satisfaga cierta condición adicional que, por ningún motivo, es evidentemente necesaria. Esta condición es que

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0, \tag{5}$$

para todos los vectores $\mathbf{y}$ que satisfagan $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$, en donde $\mathbf{A}^*$ es la adjunta de $\mathbf{A}$. Si se satisface la condición (5), entonces el sistema (2) tiene (una infinidad de) soluciones. Cada una de estas soluciones es de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\xi}, \tag{6}$$

en donde $\mathbf{x}^{(0)}$ es una solución particular de la ecuación (2) y $\boldsymbol{\xi}$ es cualquier solución del sistema homogéneo (4). Nótese la semejanza entre (6) y la solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea, la ecuación (7) de la sección 3.6. En los problemas 26 a 30 se describen las demostraciones de algunas de las proposiciones anteriores.

Los resultados del párrafo anterior son importantes como medio para clasificar las soluciones de los sistemas lineales. Sin embargo, para resolver sistemas particulares por lo general es mejor aplicar la reducción respecto a los renglones para transformar el sistema en uno mucho más sencillo, a partir del cual la(s) solución(es), en caso de haber alguna(s), pueda(n) escribirse con facilidad. A fin de lograr esto de manera eficiente es posible formar la **matriz aumentada**

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \tag{7}$$

al unir el vector $\mathbf{b}$ a la matriz de los coeficientes $\mathbf{A}$ como una columna adicional. La línea discontinua sustituye a los signos de igualdad y se dice que parte la matriz aumentada. A continuación se realizan operaciones sobre los renglones de la matriz aumentada para transformar $\mathbf{A}$ en una matriz triangular; es decir, en una matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal principal sean todos cero. Una vez que se hace esto, es fácil ver si el sistema tiene soluciones y hallarlas en caso afirmativo. Obsérvese que las operaciones elementales sobre los renglones de la matriz aumentada (7) corresponden a operaciones válidas sobre las ecuaciones del sistema (1). Los siguientes ejemplos ilustran el proceso.

Ejemplo 1 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4. \end{aligned} \tag{8}$$

La matriz aumentada para el sistema (8) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right). \tag{9}$$

Ahora se efectúan operaciones sobre los renglones de la matriz (9) con la intención de introducir ceros en la parte inferior izquierda de la misma. Se describe cada paso y el resultado se registra en seguida.

a) Sumar el primer renglón al segundo y sumar (–2) veces el primer renglón al tercero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array}\right).$$

b) Multiplicar por –1 el segundo renglón.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array}\right).$$

c) Sumar (–3) veces el segundo renglón al tercero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right).$$

d) Dividir entre –4 el tercer renglón.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

La matriz así obtenida corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ x_3 &= 1, \end{aligned} \tag{10}$$

que es equivalente al sistema original (8). Nótese que los coeficientes de las ecuaciones (10) forman una matriz triangular. De la última de ellas se tiene $x_3 = 1$, de la segunda, $x_2 = -2 + x_3 = -1$ y de la primera, $x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 2$. Por tanto, se obtiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que es la solución del sistema dado (8). De manera incidental, ya que la solución es única, se concluye que la matriz de los coeficientes es no singular.

Ejemplo 2 Analizar las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= b_1. \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_3, \end{aligned} \tag{11}$$

para diversos valores de b_1, b_2 y b_3.

Obsérvese que los coeficientes del sistema (11) son los mismos que los del sistema (8), excepto por el coeficiente de x_3 en la tercera ecuación. La matriz aumentada del sistema (11) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right). \tag{12}$$

Al efectuar los pasos a), b) y c) como en el ejemplo 1, la matriz (12) se transforma en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{array}\right). \tag{13}$$

La ecuación que corresponde al tercer renglón de la matriz (13) es

$$b_1 + 3b_2 + b_3 = 0; \tag{14}$$

por tanto el sistema (11) no tiene solución, a menos que b_1, b_2 y b_3 satisfagan la condición (14). Es posible demostrar que esta condición es precisamente la ecuación (5) del sistema (11).

Supóngase ahora que $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ y $b_3 = -5$, en cuyo caso se satisface la ecuación (14). Entonces, los dos primeros renglones de la matriz (13) corresponde a las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= -3. \end{aligned} \tag{15}$$

Para resolver el sistema (15) es posible elegir de manera arbitraria una de las incógnitas y, a continuación, despejar las otras dos. Si se hace $x_3 = \alpha$, en donde α es arbitraria, se concluye que

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha - 3, \\ x_1 &= 2(\alpha - 3) - 3\alpha + 2 = -\alpha - 4. \end{aligned}$$

Si la solución se escribe en notación vectorial, se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - 4 \\ \alpha - 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Es fácil verificar que el segundo término del segundo miembro de la ecuación (16) es una solución del sistema no homogéneo (11), en tanto que el primer término es la solución más general del sistema homogéneo correspondiente a (11).

La reducción respecto a los renglones también es de utilidad para resolver sistemas homogéneos y sistemas en los que el número de ecuaciones es diferente del número de incógnitas.

Independencia lineal. Se dice que un conjunto de k vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ es **linealmente dependiente** si existe un conjunto de números (complejos) $c_1, \ldots, c_k$, de los cuales por lo menos uno sea diferente de cero, tal que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}. \tag{17}$$

En otras palabras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ son linealmente dependientes si existe una relación lineal entre ellos. Por otra parte si el único conjunto $c_1, \ldots, c_k$ para el que se cumple la ecuación (17) es $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, se dice que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ son **linealmente independientes.**

Considérese ahora un conjunto de n vectores, cada uno de los cuales tiene n componentes. Sea $x_{ij} = x_i^{(j)}$ la i-ésima componente del vector $\mathbf{x}^{(j)}$ y sea $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Entonces la ecuación (17) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \cdots + x_1^{(n)}c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)}c_1 + \cdots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + \cdots + x_{1n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + \cdots + x_{nn}c_n \end{pmatrix} = \mathbf{Xc} = \mathbf{0}. \tag{18}$$

Si det $\mathbf{X} \neq 0$, entonces la única solución de la ecuación (18) es $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, pero si det $\mathbf{X} = 0$, existen soluciones diferentes de cero. Por tanto, el conjunto de vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ es linealmente independiente si y sólo si det $\mathbf{X} \neq 0$.

Ejemplo 3

Determinar si los vectores

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \tag{19}$$

son linealmente independientes o linealmente dependientes. Si son linealmente dependientes, encontrar una relación lineal entre ellos.

Para determinar si $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ y $\mathbf{x}^{(3)}$ son linealmente dependientes, se calcula $\det(x_{ij})$, cuyas columnas son las componentes de $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ y $\mathbf{x}^{(3)}$, respectivamente. Por tanto,

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix},$$

y un cálculo elemental muestra que es cero. Por tanto, $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ y $\mathbf{x}^{(3)}$ son linealmente dependientes y existen las constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + c_3\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}. \tag{20}$$

La ecuación (20) también puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

y resolverse mediante operaciones elementales sobre los renglones a partir de la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array}\right). \tag{22}$$

Se procede como en los ejemplos 1 y 2.

a) Sumar (–2) veces el primer renglón al segundo y sumar el primer renglón al tercero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right).$$

b) Dividir el segundo renglón entre –3; entonces, sumar (–5) veces el segundo renglón al tercero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De esta manera se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0, \\ c_2 - 3c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

A partir de la segunda de las ecuaciones (23), se tiene $c_2 = 3c_3$, y de la primera se obtiene $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. Por tanto, se despejaron c_1 y c_2 en términos de c_3, en donde ésta permanece arbitraria. Si, por conveniencia, se elige $c_3 = -1$, entonces $c_1 = 2$ y $c_2 = -3$. En este caso la relación deseada (20) queda

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}.$$

Con frecuencia resulta útil pensar en las columnas (o los renglones) de una matriz **A** como vectores. Estos vectores columna (o renglón) son linealmente independientes si y sólo si det $\mathbf{A} \neq 0$.

Además, si $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, entonces es posible demostrar que det **C** = (det **A**)(det **B**).

Por consiguiente, si las columnas (o los renglones) de **A** y **B** son linealmente independientes, las columnas (o los renglones) de **C** también lo son.

A continuación se extenderán los conceptos de dependencia e independencia lineales a un conjunto de funciones vectoriales $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ definidas sobre un intervalo $\alpha < t < \beta$. Se dice que los vectores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ son linealmente dependientes sobre $\alpha < t < \beta$ si existe un conjunto de constantes $c_1, \ldots, c_k$, no todas cero, tales que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots c_k\,\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{0}$ para toda t en el intervalo. En caso contrario se dice que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ son linealmente independientes.

Nótese que si $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ son linealmente dependientes sobre un intervalo, entonces son linealmente dependientes en cada punto del intervalo. Sin embargo, si $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ son linealmente independientes sobre un intervalo, pueden o no ser linealmente independiente en cada punto; de hecho, pueden ser linealmente dependientes en cada punto, pero con diferentes conjuntos de constantes en puntos diferentes. Ver el problema 14 como ejemplo.

Eigenvalores y eigenvectores. La ecuación

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{24}$$

puede considerarse como una transformación lineal que mapea (o transforma) un vector **x** dado en un nuevo vector **y**. Los vectores que se transforman en múltiplos de sí mismos

tienen una función importante en muchas aplicaciones.[3] Para encontrar estos vectores se hace $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, en donde λ es un factor escalar de proporcionalidad, y se buscan soluciones de las ecuaciones

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \tag{25}$$

o bien,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

La última ecuación tiene soluciones diferentes de cero si y sólo si se elige λ de modo que

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{27}$$

Los valores de λ que satisfacen la ecuación (27) se llaman **eigenvalores** (o valores propios) de la matriz **A** y las soluciones de las ecuaciones (25) o (26) que se obtienen al usar ese valor de λ se conocen como **eigenvectores** (o vectores propios) correspondientes a ese eigenvalor. Los eigenvectores quedan determinados sólo hasta una constante multiplicativa arbitraria; si se especifica esta constante de alguna manera, se dice que los eigenvectores están **normalizados**. A menudo conviene normalizar un eigenvector **x** al requerir que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$. De manera alternativa, es posible que se desee hacer que una de las componentes sea igual a uno.

Puesto que (27) es una ecuación polinomial en λ de grado n existen n eigenvalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, algunos de los cuales pueden repetirse. Si un eigenvalor dado aparece m veces como una raíz de (27), se dice que ese eigenvalor tiene **multiplicidad** m. Cada eigenvalor tiene asociado por los menos un eigenvector, y un eigenvalor de multiplicidad m puede tener q eigenvectores linealmente independientes, en donde

$$1 \leq q \leq m. \tag{28}$$

En el ejemplo 4 que sigue se ilustra que q puede ser menor que m. Si todos los eigenvalores de una matriz **A** son **simples** (tienen mutiplicidad uno), es posible demostrar que los n eigenvectores de **A**, uno para cada eigenvalor, son linealmente independientes. Por otra parte, si **A** tiene repetidos uno o más eigenvalores, entonces puede haber menos n eigenvectores linealmente independientes asociados con **A**, ya que para un eigenvalor repetido es posible tener $q < m$. Este hecho origina complicaciones más tarde en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 4 Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

[3] Por ejemplo, este problema se encuentra al hallar los ejes principales de esfuerzo o deformación en un cuerpo elástico y al hallar los modos de vibración libre en un sistema conservativo con un número finito de grados de libertad.

Los eigenvalores λ y los eigenvectores $\mathbf{x}$ satisfacen la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, o bien

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Los eigenvalores son las raíces de la ecuación

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Por tanto, los dos eigenvalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$; es decir, el eigenvalor 2 tiene multiplicidad dos.

Para determinar los eigenvalores es necesario volver a la ecuación (30) y usar como λ el valor 2; esto da

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

De donde, se obtiene la condición única $x_1 + x_2 = 0$, que determina x_2 en términos de x_1, o viceversa. Si $x_1 = c$, entonces $x_2 = -c$ y el eigenvector $\mathbf{x}^{(1)}$ es

$$\mathbf{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Por lo general, al encontrar eigenvectores se cancela la constante arbitraria c; por tanto, en vez de la ecuación (33) se escribe

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

y se recuerda que cualquier múltiplo de este vector también es un eigenvector. Obsérvese que sólo existe un eigenvector linealmente independiente asociado con el eigenvalor doble.

Ejemplo 5 Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Los eigenvalores λ y los eigenvectores $\mathbf{x}$ satisfacen la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o bien,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Los eigenvalores son las raíces de la ecuación

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Si se resuelve la ecuación (37), quizá por tanteos, se obtienen tres raíces; a saber, $\lambda_1 = 2$. $\lambda_2 = -1$, y $\lambda_3 = -1$. Por tanto, 2 es un eigenvalor simple y -1 es un eigenvalor con multiplicidad dos.

Para encontrar el eigenvector $\mathbf{x}^{(1)}$ correspondiente al eigenvalor λ_1 se sustituye $\lambda = 2$ en la ecuación (36); esto da el sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Éste se puede reducir al sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

mediante operaciones elementales sobre los renglones. Si se resuelve este sistema se obtiene el eigenvector

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Para $\lambda = -1$, las ecuaciones (36) se reducen de inmediato a la única ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{41}$$

Por tanto, es posible elegir arbitrariamente los valores para dos de las cantidades x_1, x_2, x_3 y la tercera se determina a partir de la ecuación (41). Por ejemplo, si $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, entonces $x_3 = -1$ y

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

es un eigenvector. Cualquier múltiplo de $\mathbf{x}^{(2)}$ también es un eigenvector, pero al hacer otra elección de x_1 y x_2, por ejemplo $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, es posible determinar un segundo eigenvector independiente. Una vez más, $x_3 = -1$ y

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

es un eigenvector linealmente independiente de $\mathbf{x}^{(2)}$. Por lo tanto, en este ejemplo dos eigenvectores linealmente independientes están asociados con el eigenvalor doble.

Una clase especial importante de matrices, llamadas **autoadjuntas** o **hermitianas** son aquellas para las que $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$; es decir, $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. Las matrices hermitianas incluyen, como una subclase, a las matrices reales simétricas; es decir, las matrices que tienen elementos reales y para las que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Los eigenvalores y los eigenvectores de las matrices hermitianas siempre tienen las siguientes propiedades útiles:

1. Todos los eigenvalores son reales.
2. Siempre existe un conjunto completo de n eigenvectores linealmente independientes, sin importar las mutiplicidades de los eigenvalores.
3. Si $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son eigenvectores que corresponden a diferentes eigenvalores, entonces $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$. Por tanto, si todos los eigenvalores son simples, entonces los eigenvectores asociados forman un conjunto ortogonal de vectores.
4. Correspondiendo a un eigenvalor de multiplicidad m, es posible elegir m eigenvectores que sean mutuamente ortogonales. Por tanto, siempre es posible elegir el conjunto completo de n eigenvectores de modo que sean ortogonales y linealmente independientes.

El ejemplo 5 anterior comprende una matriz simétrica real e ilustra las propiedades 1, 2 y 3, pero la elección que se hizo para $\mathbf{x}^{(2)}$ y $\mathbf{x}^{(3)}$ no ilustra la propiedad 4. Sin embargo, siempre es posible elegir un $\mathbf{x}^{(2)}$ y un $\mathbf{x}^{(3)}$ de modo que $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0$. Por ejemplo, se hubiera podido elegir

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como los eigenvectores asociados con el eigenvalor $\lambda = -1$ en el ejemplo 5. En el ejemplo 4 se ve que si la matriz no es hermitiana pueden faltar eigenvectores cuando se repite un eigenvalor. En los problemas 32 a 34 se describen las demostraciones de las proposiciones 1 y 3.

En la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas, así como en otras situaciones, algunas veces es útil transformar una matriz dada en una matriz diagonal; es decir, en una que sólo tenga elementos diferentes de cero en la diagonal. Los eigenvectores resultan útiles al realizar una transformación de este tipo. Supóngase que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto completo de n eigenvectores linealmente independientes (sin importar que $\mathbf{A}$ sea hermitiana o no). Si por $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ se denotan estos eigenvectores y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ denotan a los eigenvalores correspondientes, se forma la matriz $\mathbf{T}$ cuyas columnas son los eigenvectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$. En virtud de que las columnas de $\mathbf{T}$ son vectores linealmente independientes, $\det \mathbf{T} \neq 0$; por tanto, $\mathbf{T}$ es no singular y $\mathbf{T}^{-1}$ existe. Un cálculo directo muestra que las columnas de la matriz $\mathbf{AT}$ son precisamente los vectores $\mathbf{Ax}^{(1)}, \ldots, \mathbf{Ax}^{(n)}$. Como $\mathbf{Ax}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}$, se concluye que

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD} \tag{44}$$

en donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{45}$$

es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los eigenvalores de $\mathbf{A}$. Por la ecuación (44) se deduce que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}. \tag{46}$$

Por tanto, si se conocen los eigenvalores y eigenvectores de **A**, ésta puede transformarse en una matriz diagonal mediante el proceso indicado en la ecuación (46). Este proceso se conoce como **transformación de semejanza** y la ecuación (46) se resume verbalmente al decir que **A** es **semejante** a la matriz diagonal **D**. De manera alternativa, puede decir que **A** es **diagonalizable**. La posibilidad de efectuar una diagonalización de este tipo será importante más tarde en este capítulo.

Si **A** es hermitiana la determinación de $\mathbf{T}^{-1}$ es muy sencilla. Se eligen los eigenvectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ de **A** de modo que se normalicen por $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(i)}) = 1$ para cada i y que sean ortogonales. Entonces, es fácil comprobar que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{*}$; en otras palabras, la inversa de **T** es igual a su adjunta (la transpuesta de su conjugada compleja).

Por último, se observa que si **A** tiene menos de n eigenvectores linealmente independientes, entonces no existe matriz **T** tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$. En este caso, **A** no es semejante a una matriz diagonal o no es diagonalizable.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 5 resuelva el conjunto dado de ecuaciones o demuestre que no existe solución.

1. $\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

En cada uno de los problemas 6 a 10, determine si el conjunto dado de vectores es linealmente independiente. Si es linealmente dependiente, encuentre la relación lineal entre ellos. Los vectores están escritos como vectores renglón para ahorrar espacio, pero es posible considerarlos como vectores columna; es decir, en vez de usar los vectores dados es posible usar los transpuestos de los propios vectores.

6. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1)$
7. $\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0)$
8. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (-3, 0, -1, 3)$
9. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 3)$
10. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$

11. Suponga que cada uno de los vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ tiene n componentes, en donde $n < m$. Demuestre que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ son linealmente dependientes.

En los problemas 12 y 13, determine si el conjunto dado de vectores es linealmente independiente para $-\infty < t < \infty$. Si es linealmente dependiente, encuentre la relación lineal entre ellos. Como en los problemas 6 a 10, los vectores están escritos como vectores renglón para ahorrar espacio.

12. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$
13. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2 \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$ $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (\operatorname{sen} t, 2 \operatorname{sen} t)$
14. Sea

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ son linealmente dependientes en cada punto del intervalo $0 \le t \le 1$. Sin embargo, demuestre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ son linealmente independientes sobre $0 \le t \le 1$.

En cada uno de los problemas 15 a 24 encuentre todos los eigenvalores y eigenvectores de la matriz dada.

15. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

25. Para cada una de las matrices **A** dadas, determine **T** tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$, en donde **D** es una matriz diagonal. Confirme la elección hecha de **T** al calcular $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$.
    a) **A** es la matriz del problema 15.
    b) **A** es la matriz del problema 16.
    c) **A** es la matriz del problema 18.

Los problemas 26 a 30 se refieren al problema de resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ cuando $\det \mathbf{A} = 0$.

26. Suponga que, para una matriz dada **A**, existe un vector **x** diferente de cero tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Demuestre que también existe un vector **y** diferente de cero tal que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
27. Demuestre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y})$ para vectores cualesquiera **x** y **y**.
28. Suponga que $\det \mathbf{A} = 0$, aunque $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene soluciones. Demuestre que $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$, en donde **y** es cualquier solución de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Compruebe que esta proposición es verdadera para el conjunto de ecuaciones del problema 3.
    Sugerencia: aplicar el resultado del problema 27.
29. Suponga que $\det \mathbf{A} = 0$, pero que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ es una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Demuestre que si ξ es una solución de $\mathbf{A}\xi = \mathbf{0}$ y α es cualquier constante, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\xi$ también es una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

*30. Suponga que $\det \mathbf{A} = 0$ y que $\mathbf{y}$ es una solución de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Demuestre que si $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ para toda $\mathbf{y}$ de este tipo, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene soluciones. Observe que éste es el inverso del problema 28; la forma de las soluciones se da en el problema 29.

31. Demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es singular.

32. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es hermitiana, entonces $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$, en donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores cualesquiera.

33. En este problema se muestra que los eigenvalores de una matriz hermitiana $\mathbf{A}$ son reales. Sea $\mathbf{x}$ un eigenvector correspondiente al eigenvalor λ.
    a) Demuestre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$. *Sugerencia*: ver el problema 32.
    b) Demuestre que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. *Sugerencia*: Recuerde que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.
    c) Demuestre que $\lambda = \bar{\lambda}$; es decir que el eigenvalor λ es real.

34. Demuestre que si λ_1 y λ_2 son eigenvalores de una matriz hermitiana $\mathbf{A}$ y si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces los eigenvectores correspondientes $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son ortogonales.
    Sugerencia: aplique los resultados de los problemas 32 y 33 para demostrar que $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.

7.4 Teoría básica de los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

La teoría general de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

se desarrolla en forma paralela a la de una sola ecuación lineal de n-ésimo orden. Por consiguiente, el análisis en esta sección sigue las misma líneas generales que en las secciones 3.2, 3.3, y 4.1. Para analizar de manera más efectiva el sistema (1), se usa la notación matricial. Es decir, se consideran $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ como las componentes de un vector $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$; de manera semejante, $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ son las componentes de un vector $\mathbf{g}(t)$ y $p_{11}(t), \ldots, p_{nn}(t)$ son los elementos de una matriz $\mathbf{P}(t)$ de $n \times n$. Entonces la ecuación (1) toma la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{2}$$

El empleo de vectores y matrices no sólo ahorra bastante espacio y facilita los cálculos, también destaca la semejanza entre los sistemas de ecuaciones y las ecuaciones (escalares) simples.

Se dice que un vector $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ es una solución de la ecuación (2) si sus componentes satisfacen el sistema de ecuaciones (1). A lo largo de toda esta sección se supondrá que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{g}$ son continuas sobre algún intervalo $\alpha < t < \beta$; es decir, que cada una de las funciones escalares $p_{11}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ es continua allí. Según el teorema 7.1.2, esto es suficiente para garantizar la existencia de soluciones de la ecuación (2) en el intervalo $\alpha < t < \beta$.

Es conveniente considerar primero la ecuación homogénea

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{3}$$

que se obtiene a partir de la ecuación (2) al hacer $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Una vez que se resuelve la ecuación homogénea, hay varios métodos que se pueden usar para resolver la ecuación no homogénea (2); esto se trata en la sección 7.9. Se usará la notación

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \ldots \tag{4}$$

para designar soluciones específicas del sistema (3). Nótese que $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ se refiere a la i-ésima componente de la j-ésima solución de $\mathbf{x}^{(j)}(t)$. En los teoremas 7.4.1 a 7.4.4 se enuncian los hechos más importantes acerca de la estructura de las soluciones del sistema (3). Estos teoremas se parecen bastante a los teoremas correspondientes de las secciones 3.2, 3.3 y 4.1; algunas de las demostraciones se dejan como ejercicio para el lector.

Teorema 7.4.1 Si las funciones vectoriales $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son soluciones del sistema (3), entonces la combinación lineal $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ también es una solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2.

Éste es el principio de superposición; se demuestra sencillamente al derivar $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ y aplicar el hecho de que $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ satisfacen la ecuación (3). Mediante aplicaciones repetidas del teorema 7.4.1 se llega a la conclusión de que si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ son soluciones de (3) entonces

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \tag{5}$$

también es una solución para cualesquiera constantes $c_1, \ldots, c_k$. Como ejemplo, es posible comprobar que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{6}$$

satisfacen la ecuación

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{7}$$

Según el teorema 7.4.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

también satisface la ecuación (7).

Como ya se indicó, mediante aplicaciones repetidas del teorema 7.4.1 se concluye que toda combinación lineal finita de las soluciones de (3) también es una solución. Ahora surge la pregunta de si todas las soluciones de (3) pueden hallarse de esta manera. Por analogía con casos anteriores, es razonable esperar que para un sistema de la forma (3) de n-ésimo orden basta formar combinaciones lineales de n soluciones elegidas de manera

adecuada. Por lo tanto, sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ n soluciones del sistema (3) de n-ésimo orden y considérese la matriz $\mathbf{X}(t)$ cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$;

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Recuérdese por lo visto en la sección 7.3 que las columnas de $\mathbf{X}(t)$ son linealmente independientes para un valor dado de t si y sólo si $\det \mathbf{X} \neq 0$ para ese valor de t. Este determinante se llama wronskiano de las n soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ y también se denota por $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$; es decir,

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}] = \det \mathbf{X}. \tag{10}$$

Entonces, las soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son linealmente independientes en un punto si y sólo si $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ no es cero allí.

Teorema 7.4.2 Si las funciones vectoriales $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son soluciones linealmente independientes del sistema (3) para cada punto en el intervalo $\alpha < t < \beta$, entonces cada solución $\mathbf{x} + \boldsymbol{\phi}(t)$ del sistema (3) puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$,

$$\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t), \tag{11}$$

exactamente de una manera.

Antes de demostrar el teorema 7.4.2, nótese que, según el teorema 7.4.1, todas las expresiones de la forma (11) son soluciones del sistema (3), mientras que por el teorema 7.4.2 todas las soluciones del sistema (3) pueden escribirse en la forma (11). Si se piensa que las constantes $c_1, \ldots, c_n$ son arbitrarias, entonces la ecuación (11) incluye todas las soluciones del sistema (3) y se le acostumbra llamar **solución general**. Se dice que cualquier conjunto de soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ de la ecuación (3), que sea linealmente independiente en cada punto del intervalo $\alpha < t < \beta$ es un **conjunto fundamental de soluciones** para ese intervalo.

Para probar el teorema 7.4.2 se demostrará, dada cualquier solución $\boldsymbol{\phi}$ de la ecuación (3), que $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, para valores adecuados de $c_1, \ldots, c_n$. Sea $t = t_0$ algún punto en el intervalo $\alpha < t < \beta$ y sea $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}(t_0)$. Ahora se quiere determinar si existe cualquier solución de la forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ que también satisfaga la misma condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$. Es decir, se desea saber si existen valores de $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \boldsymbol{\xi}, \tag{12}$$

o, en forma escalar,

$$\begin{aligned} c_1x_{11}(t_0) + \cdots + c_nx_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1x_{n1}(t_0) + \cdots + c_nx_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \tag{13}$$

La condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones (3) tengan una solución única $c_1, \ldots, c_n$ es precisamente que el determinante de los coeficientes, que es el wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ evaluado en $t = t_0$, no se anule. La hipótesis de que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son linealmente independientes en todo el intervalo $\alpha < t < \beta$ garantiza que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ es diferente de cero en $t = t_0$ y, por consiguiente, existe una solución (única) de la ecuación (3) de la forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ que también satisface la condición inicial (12). Por la parte de unicidad del teorema 7.1.2, esta solución es idéntica a $\boldsymbol{\phi}(t)$ y, de donde, $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, como tuvo que demostrarse.

Teorema 7.4.3 Si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son soluciones de la ecuación (3) sobre el intervalo $\alpha < t < \beta$, entonces en este intervalo $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ es idénticamente cero o bien, nunca se anula.

La importancia del teorema 7.4.3 radica en el hecho de que elimina la necesidad de examinar $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ en todos los puntos del intervalo de interés y permite determinar si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones, al evaluar simplemente su wronskiano en cualquier punto conveniente del intervalo.

El teorema 7.4.3 se prueba al establecer en primer lugar que el wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ satisface la ecuación diferencial (ver el problema 2)

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})W. \tag{14}$$

De donde, W es una función exponencial y la conclusión del teorema se sigue de inmediato. La expresión para W obtenida al resolver la ecuación (14) se conoce como fórmula de Abel; nótese la analogía con la ecuación (7) de la sección 3.3.

Alternativamente, se puede establecer el teorema 7.4.3 al demostrar que si n soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ de la ecuación (3) son linealmente dependientes en un punto $t = t_0$, entonces deben ser linealmente dependientes en cada punto de $\alpha < t < \beta$ (ver el problema 8).

Como consecuencia, si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son linealmente independientes en un punto, deben ser linealmente independientes en cada punto del intervalo.

El siguiente teorema afirma que el sistema (3) siempre tiene por lo menos un conjunto fundamental de soluciones.

Teorema 7.4.4 Sea

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

además, sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ las soluciones del sistema (3) que satisfacen las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}, \tag{15}$$

respectivamente, en donde t_0 es cualquier punto en $\alpha < t < \beta$. Entonces, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema (3).

Para probar este teorema, nótese que la existencia y unicidad de las soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ mencionadas en el teorema 7.4.4 quedan aseguradas por el teorema 7.1.2. No es difícil ver que el wronskiano de estas soluciones es igual a uno cuando $t = t_0$; por lo tanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son un conjunto fundamental de soluciones.

Una vez que se encuentra un conjunto fundamental de soluciones, es posible generar otros conjuntos al formar combinaciones lineales (independientes) del primer conjunto. Para fines teóricos, el conjunto dado por el teorema 7.4.4 suele ser el más simple.

En resumen, cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes del sistema (3) constituye un conjunto fundamental de soluciones. En las condiciones dadas en esta sección, esos conjuntos fundamentales siempre existen y toda solución del sistema (3) se puede representar como una combinación lineal de cualquier conjunto fundamental de soluciones.

Problemas

1. Aplique álgebra matricial para demostrar la proposición que sigue al teorema 7.4.1, para un valor arbitrario del entero k.
2. En este problema se describe una demostración del teorema 7.4.3 en el caso $n = 2$. Sean $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ soluciones de la ecuación (3) para $\alpha < t < \beta$ y W el wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$.
   a) Demuestre que

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \dfrac{dx_2^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

   b) Aplique la (3) para demostrar que

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

   c) Encuentre $W(t)$ al resolver la ecuación diferencial obtenida en el inciso b). Use esta expresión para obtener la conclusión enunciada en el teorema 7.4.3.

   *d) Generalice este procedimiento para demostrar el teorema 7.4.3 para un valor arbitrario de n.
3. Demuestre que los wronskianos de dos conjuntos fundamentales de soluciones del sistema (3) pueden diferir cuando más en una constante multiplicativa.
   Sugerencia: aplique la ecuación (14).
4. Si $x_1 = y$ y $x_2 = y'$, entonces la ecuación de segundo orden

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{i}$$

   corresponde al sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \tag{ii}$$

   Demuestre que si $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son un conjunto fundamental de soluciones de las ecuaciones (ii) y si $y^{(1)}$ y $y^{(2)}$ son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (i), entonces $W[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$, en donde c es una constante diferente de cero.

Sugerencia: $y^{(1)}(t)$ y $y^{(2)}(t)$ deben ser combinaciones lineales de $x_{11}(t)$ y $x_{12}(t)$.

5. Demuestre que la solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ es la suma de cualquier solución particular $\mathbf{x}^{(p)}$ de esta ecuación y la solución general $\mathbf{x}^{(c)}$ de la ecuación homogénea correspondiente.

6. Considere los vectores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.
   a) Calcule el wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$.
   b) ¿En qué intervalos $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son linealmente independientes?
   c) ¿Qué conclusión puede obtenerse acerca de los coeficientes en el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas satisfechas por $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$?
   d) Encuentre este sistema de ecuaciones y compruebe las conclusiones del inciso c).

7. Considere los vectores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, y responda las mismas preguntas del problema 6.

En los dos problemas siguientes se indica una deducción alternativa del teorema 7.4.2.

8. Sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ sobre el intervalo $\alpha < t < \beta$. Suponga que $\mathbf{P}$ es continua y sea t_0 un punto arbitrario en el intervalo dado. Demuestre que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ son linealmente dependientes para $\alpha < t < \beta$ si (y sólo si) $\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ son linealmente dependientes. En otras palabras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ son linealmente dependientes sobre el intervalo (α, β) si son linealmente dependientes en cualquier punto de él.
   Sugerencia: Existen constantes $c_1, \ldots, c_m$ tales que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t)$, y aplique el teorema de unicidad para demostrar que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ para cada t en $\alpha < t < \beta$.

9. Sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots \mathbf{x}^{(m)}$ soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, en donde $\mathbf{P}$ es continua sobre $\alpha < t < \beta$.
   a) Demuestre que cualquier solución $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

   para constantes adecuadas $c_1, \ldots, c_n$.
   Sugerencia: aplique el resultado del problema 11 de la sección 7.3, así como el problema 8 anterior.
   b) Demuestre que la expresión para la solución $\mathbf{z}(t)$ del inciso a) es única; es decir, que si $\mathbf{z}(t) = k_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + k_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, entonces $k_1 = c_1, \ldots, k_n = c_n$.
   Sugerencia: Demuestre que $(k_1 - c_1)\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + (k_n - c_n)\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}$ para cada t en $\alpha < t < \beta$ y use la independencia lineal de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots \mathbf{x}^{(n)}$.

7.5 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

En esta sección se empieza por demostrar cómo construir la solución general de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes; es decir, un sistema de la forma

$$\mathbf{x}' \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante de $n \times n$. Por analogía con el tratamiento de las ecuaciones lineales de segundo orden en la sección 3.1, se buscan soluciones de (1) de la forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}, \tag{2}$$

en donde deben determinarse r y el vector constante $\boldsymbol{\xi}$. Si se sustituye $\mathbf{x}$ de la ecuación (2) en el sistema (1) da

$$r\boldsymbol{\xi}e^{rt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}e^{rt}.$$

Una vez que se cancela el factor escalar diferente de cero e^{rt} se obtiene $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}$, o bien,

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

en donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $n \times n$. Por tanto, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1), es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraicas (3). Este último problema es precisamente aquél en el que se determinan los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz $\mathbf{A}$. Por lo tanto, el vector $\mathbf{x}$ dado por la ecuación (2) es una solución de la (1) en el supuesto de que r sea un eigenvalor y $\boldsymbol{\xi}$ un eigenvector asociados de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

Ejemplo 1 Encontrar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{4}$$

Si se supone que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$ y se sustituye $\mathbf{x}$ en la ecuación (4) se llega al sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Las ecuaciones (5) tienen una solución que no sea la trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes es cero. Por tanto, a partir de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4$$
$$= r^2 - 2r - 3 = 0. \tag{6}$$

se encuentran valores permisibles de r. Las raíces de la ecuación (6) son $r_1 = 3$ y $r_2 = -1$, que son los eigenvalores de la matriz de coeficientes de la ecuación (4). Si $r = 3$, entonces el sistema (5) se reduce a la simple ecuación

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0. \tag{7}$$

Por tanto, $\xi_2 = 2\xi_1$ y el eigenvector correspondiente a $r_1 = 3$ puede tomarse como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

De manera semejante, correspondiendo a $r_2 = -1$, se encuentra que $\xi_2 = -2\xi_1$, de modo que el eigenvector es

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Las soluciones correspondientes de la ecuación diferencial son

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{10}$$

El wronskiano de estas soluciones es

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t}, \tag{11}$$

que nunca es cero. De donde, las soluciones $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ forman un conjunto fundamental y la solución general del sistema (4) es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \end{aligned} \tag{12}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Para visualizar la solución (12) resulta útil considerar su gráfica en el plano x_1x_2 para varios valores de las constantes c_1 y c_2. Se empieza con $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)$, o, en forma escalar,

$$x_1 = c_1e^{3t}, \qquad x^2 = 2c_1e^{3t}.$$

Al eliminar t entre estas dos ecuaciones, se ve que esta solución se encuentra sobre la recta $x_2 = 2x_1$; ver la figura 7.5.1*a*. Esta es la recta que pasa por el origen en la dirección del eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. Si la solución se considera como la trayectoria de una partícula en movimiento, entonces ésta se encuentra en el primer cuadrante cuando $c_1 > 0$ y en el tercero cuando $c_1 < 0$. En cualquier caso, la partícula se aleja del origen a medida que t crece. A continuación, considérese $\mathbf{x} = c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$, o bien,

$$x_1 = c_2e^{-t}, \qquad x_2 = -2c_2e^{-t}.$$

Esta solución está sobre la recta $x_2 = -2x_1$, cuya dirección está determinada por el eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. La solución está en el cuarto cuadrante cuando $c_2 > 0$ y en el segundo cuando $c_2 < 0$, como

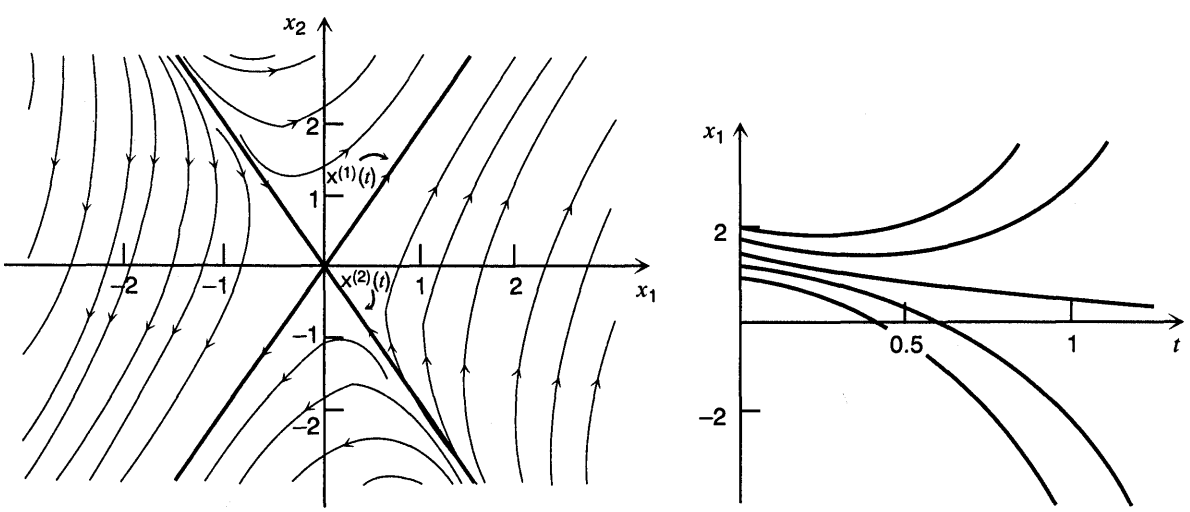


FIGURA 7.5.1 a) Trayectorias del sistema (4); el origen es un punto silla. b) Gráficas de x_1 contra t para el sistema (4).

se muestra en la figura 7.5.1*a*. En los dos casos, la partícula se desplaza hacia el origen a medida que t crece. La solución (12) es una combinación de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t)$. Para t grande, el término $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)$ es dominante y el término $c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$ se vuelve despreciable. Por tanto, todas las soluciones para que las que $c_1 \neq 0$ son asintóticas a la recta $x_2 = 2x_1$ cuando $t \to \infty$. De manera semejante, todas las soluciones para las que $c_2 \neq 0$ son asintóticas a la recta $x_2 = -2x_1$ cuando $t \to -\infty$. En la figura 7.5.1*a* se muestran las gráficas de varias soluciones. El patrón de las trayectorias en esta figura es típico de todos los sistemas de segundo orden $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ para los que los eigenvalores son reales y de signos opuestos. En este caso, el origen se llama punto silla.

En el párrafo anterior se describió la manera de trazar a mano una figura cualitativamente correcta de las trayectorias de un sistema como el de la ecuación (4), una vez que se determinan los eigenvalores y los eigenvectores. Sin embargo, para producir una figura detallada y exacta, como al 7.5.1*a* y otras que se presentarán posteriormente en este capítulo, una computadora es extremadamente útil, si no es que indispensable.

Como alternativa para la figura 7.5.1*a* también es posible trazar la gráfica de x_1 o x_2 como función de t; en la figura 7.5.1*b* se muestran algunas gráficas típicas de x_1 contra t, y las de x_2 contra t son semejantes. Para ciertas condiciones iniciales, en la ecuación (12) se concluye que $c_1 = 0$, de modo que $x_1 = c_2e^{-1}$ y $x_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Una de estas gráficas se muestra en la figura 7.5.1*b*, correspondiente a una trayectoria que tiende al origen en la figura 7.5.1*a*. Sin embargo, para la mayor parte de las condiciones iniciales, $c_1 \neq 0$ y x_1 está dado por $x_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$. Entonces, la presencia del término exponencial positivo hace que x_1 crezca exponencialmente en magnitud cuando t crece. En la figura 7.5.1*b* se muestran varias gráficas de este tipo, correspondientes a trayectorias que se separan de la vecindad del origen en la figura 7.5.1*a*. Es importante comprender la relación entre las partes *a* y *b* de la figura 7.5.1 y otras figuras semejantes que aparecen después, ya que tal vez se desee visualizar soluciones en el plano x_1x_2 o como funciones de la variable independiente t.

Volviendo al sistema general (1), se procede como en el ejemplo. Para hallar soluciones de la ecuación diferencial (1) es necesario encontrar los eigenvalores y los eigenvectores de $\mathbf{A}$, a partir del sistema algebraico asociado (3). Los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ (que no necesariamente son todos diferentes) son raíces de la ecuación polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{13}$$

La naturaleza de los eigenvalores y de los eigenvectores correspondientes determina la naturaleza de la solución general del sistema (1).

Sistemas hermitianos. La situación es más sencilla cuando $\mathbf{A}$ es una matriz hermitiana. Como se hizo ver en la sección 7.3, en este caso todos los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ son reales. Además, aun si algunos de los eigenvalores están repetidos, siempre existe un conjunto completo de n eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ que son linealmente independientes (de hecho, ortogonales). De donde, las soluciones correspondientes del sistema diferencial (1) son

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1t}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_nt}. \tag{14}$$

Para demostrar que estas soluciones forman un conjunto fundamental, se evalúa su wronskiano:

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(x)}](t) = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(r_1 + \cdots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

En primer lugar se observa que la función exponencial nunca es cero. En seguida, como los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ son linealmente independientes, el determinante del último término de la ecuación (15) es diferente de cero. Como consecuencia, el wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t)$ nunca es cero; de donde, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por tanto, cuando $\mathbf{A}$ es una matriz hermitiana, la solución general de la ecuación (1) es

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t} + \cdots + c_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n t}. \tag{16}$$

Una subclase importante de las matrices hermitianas es la clase de las matrices reales simétricas. Si $\mathbf{A}$ es real y simétrica, entonces todos los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$, así como los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ son reales. De donde, las soluciones dadas por la ecuación (14) son de valores reales. Sin embargo, si la matriz hermitiana $\mathbf{A}$ no es real, entonces en general los eigenvectores tienen partes imaginarias diferentes de cero y las soluciones (14) son de valores complejos.

Ejemplo 2 Encontrar la solución general de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{17}$$

La matriz de coeficientes de la ecuación (17) es real y simétrica, de modo que los resultados recientemente descritos son válidos para este problema. Si se supone que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, se obtiene el sistema algebraico

$$\begin{pmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

los eigenvalores satisfacen

$$(-3 - r)(-2 - r) - 2 = r^2 + 5r + 4$$
$$= (r + 1)(r + 4) = 0, \tag{19}$$

de modo que $r_1 = -1$ y $r_2 = -4$. Para $r = -1$, la ecuación (18) queda

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

De donde, $\xi_2 = \sqrt{2}\xi_1$ y el eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ correspondiente al eigenvalor $r_1 = -1$ puede tomarse como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

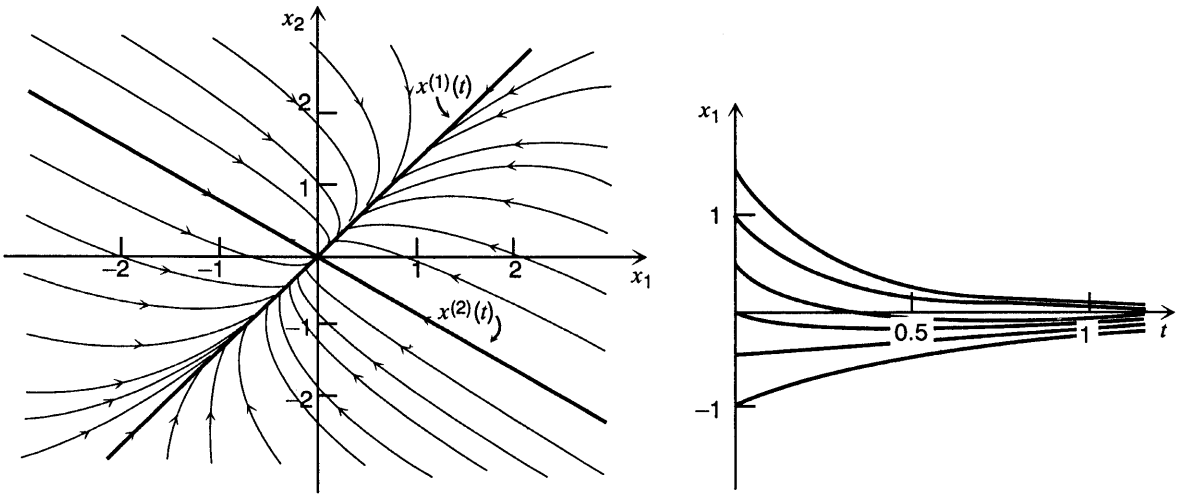


FIGURA 7.5.2 a) Trayectorias del sistema (17); el origen es un nodo. b) Gráficas de x_1 contra t para el sistema (17).

De manera semejante, correspondiendo al eigenvalor $r_2 = -4$ se tiene $\xi_1 = \sqrt{2}\xi_2$, por lo que el eigenvector es

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Por tanto, un conjunto fundamental de soluciones del sistema (17) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \tag{23}$$

y la solución general es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \tag{24}$$

En la figura 7.5.2*a* se muestran gráficas de la solución (24) para varios valores de c_1 y c_2. La solución $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ tiende al origen a lo largo de la recta $x_2 = \sqrt{2}x_1$, mientras que la solución $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ tiende al origen a lo largo de la recta $x_1 = -\sqrt{2}x_2$. Las direcciones de estas rectas están determinadas por los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ respectivamente. En general, se tiene una combinación de estas dos soluciones fundamentales. Cuando $t \to \infty$, la solución $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ es despreciable en comparación con $\mathbf{x}^{(1)}(t)$. Por tanto, a menos que $c_1 = 0$, la solución (24) tiende al origen tangente a la recta $x_2 = \sqrt{2}x_1$. El patrón de trayectorias que se muestra en la figura 7.5.2*a* es típico de todos los sistemas de segundo orden $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para los que los eigenvalores son reales, diferentes y del mismo signo. El origen se conoce como nodo de un sistema de este tipo. Si los eigenvalores fuesen positivos en vez de negativos, las trayectorias serían semejantes, pero estarán recorridas hacia afuera.

Aunque la figura 7.5.2*a* se obtuvo en computadora, obsérvese que es posible trazar rápidamente a mano un esquema cualitativamente correcto de las trayectorias, con base en el conocimiento de los eigenvalores y los eigenvectores.

En la figura 7.5.2*b* se muestran algunas gráficas típicas de x_1 contra t. Obsérvese que cada una de las gráficas tiende asintóticamente al eje t cuando t crece, lo cual corresponde a una trayectoria que tiende al origen en la figura 7.5.2*a*. El comportamiento de x_2 como función de t es semejante.

Ejemplo 3 Encontrar la solución general de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{25}$$

De nuevo, se observa que la matriz de coeficientes es real y simétrica. Los eigenvalores y los eigenvectores de esta matriz se encontraron en el ejemplo 5 de la sección 7.3; a saber

$$r_1 = 2, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{26}$$

$$r_2 = -1, \qquad r_3 = -1; \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

De donde, un conjunto fundamental de soluciones de (25) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{28}$$

y la solución general es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{29}$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que aun cuando un eigenvalor ($r = -1$) tiene multiplicidad dos, sigue siendo posible encontrar dos eigenvectores linealmente independientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ u $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ y, como consecuencia, construir la solución general (29).

Sistemas no hermitianos. Si la matriz de coeficientes del sistema (1)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

no es hermitiana la situación referente a la solución es más complicada. Supóngase primero que $\mathbf{A}$ es real; entonces para los eigenvalores de $\mathbf{A}$ hay tres posibilidades:

1. Todos los eigenvalores son reales y distintos.
2. Algunos eigenvalores ocurren en parejas conjugadas complejas.
3. Algunos eigenvalores se repiten.

El primer caso no presenta dificultades. Para cada eigenvalor existe un solo eigenvector real linealmente independiente y, en consecuencia, existen n soluciones linealmente independientes de la forma (14).

De donde, la solución general está dada todavía por la ecuación (16), en donde ahora se entiende que $r_1, \ldots, r_n$ son todos diferentes. Este caso se ilustra en el ejemplo 1 anterior.

Si algunos de los eigenvalores ocurren en parejas conjugadas complejas entonces aún se tienen n soluciones linealmente independientes de la forma (14), siempre que todos los eigenvalores sean diferentes. Por supuesto, las soluciones que surgen de eigenvalores complejos son de valores complejos. Sin embargo, como es la sección 3.4, es posible obtener un conjunto completo de soluciones de valores reales. Esto analiza la sección 7.6.

Las dificultades más graves pueden ocurrir si un eigenvalor está repetido. En este caso, el número de eigenvectores linealmente independientes correspondientes puede ser menor que la multiplicidad del eigenvalor, como en el ejemplo 4 de la sección 7.3. De ser así, el número de soluciones linealmente independientes de la forma $\boldsymbol{\xi} e^{rt}$ será menor que n. Entonces, para construir un conjunto fundamental de soluciones es necesario buscar soluciones adicionales de otra forma. La situación es algo semejante a la de una ecuación lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes; una raíz repetida de la ecuación característica dio lugar a soluciones de la forma $e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \ldots$. El caso de los eigenvalores repetidos se trata en la sección 7.7.

Por último, si $\mathbf{A}$ es compleja, pero no hermitiana, los eigenvalores complejos no necesariamente ocurren en parejas conjugadas y los eigenvectores suelen ser de valores complejos aun cuando el eigenvalor asociado puede ser real. Las soluciones de la ecuación diferencial (1) siguen siendo de la forma (14), en tanto que los eigenvalores sean distintos, pero en general todas las soluciones son de valores complejos.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado. También, trace unas cuantas de las trayectorias y describa el comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

En los problemas 7 a 9 encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado. También, trazar unas cuantas de las trayectorias. En cada uno de estos problemas, la matriz de coeficientes tiene un eigenvalor cero. Como resultado, el patrón de las trayectorias es diferente al de los ejemplos en el texto.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

En cada uno de los problemas 10 a 15, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado.

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los problemas 16 a 19, resuelva el problema con valor inicial dado. Describa el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

20. El sistema $t\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es análogo a la ecuación de segundo orden de Euler (sección 5.5). Si se supone que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} t^r$, en donde $\boldsymbol{\xi}$ es un vector constante, demuestre que $\boldsymbol{\xi}$ y n deben satisfacer $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = 0$; demuestre también que para obtener soluciones no triviales de la ecuación diferencial dada, r debe ser una raíz de la ecuación característica $\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$.

Con referencia al problema 20, resuelva el sistema de ecuaciones dado en cada uno de los problemas 21 a 24. Suponga que $t > 0$.

21. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

22. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

23. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

24. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

25. Considere un sistema de segundo orden $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Suponga que $r_1 \neq r_2$. La solución general es $\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t}$, en tanto que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ sean linealmente independientes. En este problema, se establece la independencia lineal de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ al suponer que son linealmente dependientes y demostrar a continuación que esto produce una contradicción,

a) Observe que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ satisface la ecuación matricial $(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = 0$; de manera semejante, observe que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(2)} = 0$.

b) Demuestre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (r_1 - r_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

c) Suponga que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son linealmente dependientes; entonces $c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)} = 0$ y por lo menos una de c_1 o c_2 es diferente de cero; suponga que $c_1 \neq 0$. Demuestre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)} = 0$ y también que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. De donde, $c_1 = 0$, lo que es una contradicción. Por consiguiente, $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son linealmente independientes.

d) Modifique el argumento del inciso c) para el caso en que c_1 es cero pero no c_2 no lo es.

e) Desarrolle un argumento semejante para el caso en que el orden $n = 3$; observe que el procedimiento puede extenderse para abarcar un valor arbitrario de n.

26. Considere la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{i}$$

en donde a, b y c son constantes. En el capítulo 3 se demostró que la solución general dependía de las raíces de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{ii}$$

a) Transforme la ecuación (i) en un sistema de ecuaciones de primer orden al hacer $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Encuentre el sistema de ecuaciones $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ satisfecho por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

b) Encuentre la ecuación que determina los eigenvalores de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ del inciso a). Observe que esta ecuación es precisamente la ecuación característica (ii) de la ecuación (i).

27. **Reducción de orden.** Este es un método para tratar los sistemas que no tienen un conjunto completo de soluciones de la forma $\boldsymbol{\xi} e^{rt}$. Considere el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{i}$$

a) Compruebe que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ satisface la ecuación diferencial dada.

b) Introduzca una nueva variable dependiente por medio de la transformación

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{y}. \tag{ii}$$

Observe que se obtiene esta transformación al sustituir la segunda columna de la matriz identidad por la solución conocida. Al sustituir $\mathbf{x}$ en (i), demuestre que $\mathbf{y}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y}. \tag{iii}$$

c) Resuelva la ecuación (iii) y demuestre que

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{iv}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

d) Use la ecuación (ii), demuestre que

$$\mathbf{x} = -\frac{c_1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}; \tag{v}$$

el primer término es una segunda solución independiente de la ecuación (i). Éste es el método de reducción de orden según se aplica a un sistema de ecuaciones de segundo orden.

En los problemas 28 y 29, aplique el método de reducción de orden (problema 27) para resolver el sistema de ecuaciones dado.

28. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

29. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Circuitos eléctricos. Los problema 30 y 31 están relacionados con el circuito eléctrico descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales deducido en el problema 20 de la sección 7.1:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}. \tag{i}$$

30. a) Encuentre la solución general de la ecuación (i), si $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = \frac{3}{5}$ ohm, $L = 2$ henry y $C = \frac{2}{3}$ farad.
    b) Demuestre que $I(t) \to 0$ y $V(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, sin importar los valores iniciales $I(0)$ y $V(0)$.
31. Considere el sistema de ecuaciones (i) del problema 30.
    a) Halle una condición sobre R_1, R_2, C y L que deba cumplirse si los eigenvalores de la matriz de coeficientes tienen que ser reales y diferentes.
    b) Si se satisface la condición hallada en el inciso a), demuestre que los dos eigenvalores son negativos. Entonces demuestre que $I(t) \to 0$ y $V(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, sin importar las condiciones iniciales.
    *c) Si no se satisface la condición hallada en el inciso a), los eigenvalores son complejos, o bien, repetidos. ¿Piensa el lector que también en estos casos $I(t) \to 0$ y $V(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$?
    Sugerencia: En el inciso c), un enfoque es cambiar el sistema (i) por una sola ecuación de segundo orden. En las secciones 7.6 y 7.7 también se analizan los eigenvalores complejos repetidos.

7.6 Eigenvalores complejos

En esta sección nuevamente se considera un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

en donde ahora se supone que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es de valores reales. Si se buscan soluciones de la forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, entonces se concluye, como la sección 7.5, que r debe ser un eigenvalor y $\boldsymbol{\xi}$ un eigenvector correspondiente de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Recuérdese que los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ de $\mathbf{A}$ son las raíces de la ecuación

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \tag{2}$$

y los eigenvectores correspondientes satisfacen

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Si $\mathbf{A}$ es real, entonces los coeficientes de la ecuación polinomial (2) para r son reales y cualesquiera eigenvalores complejos deben ocurrir en parejas conjugadas. Por ejemplo, si $r_1 = \lambda + i\mu$, en donde λ y μ son reales, es un eigenvalor de $\mathbf{A}$, entonces también lo es $r_2 = \lambda - i\mu$. Además, los eigenvectores correspondientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ también son conjugados complejos. Para ver que así es, supóngase que r_1 y $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ satisfacen

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Al tomar el conjugado complejo de esta ecuación y observar que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ son de valores reales, se obtiene

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

en donde $\bar{r}_1$ y $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ son los conjugados complejos de r_1 y $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, respectivamente. En otras palabras, $r_2 = \bar{r}_1$ también es un eigenvalor y $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ es el eigenvector correspondiente. Entonces, las soluciones correspondientes

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}e^{\bar{r}_1 t} \tag{6}$$

de la ecuación diferencial (1) son conjugadas complejas entre sí. Por lo tanto, como en la sección 3.4, es posible encontrar dos soluciones de valores reales de la ecuación (1) correspondientes a los eigenvalores r_1 y r_2 al tomar las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ o de $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, dadas por la ecuación (6).

Escríbase $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, en donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son reales; entonces se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t).\end{aligned} \tag{7}$$

Una vez que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ se ha separado en sus partes real e imaginaria, se obtiene

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \operatorname{sen} \mu t) + ie^{\lambda t}(\mathbf{a} \operatorname{sen} \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t). \tag{8}$$

Si se escribe $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, entonces los vectores

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \operatorname{sen} \mu t), \tag{9a}$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \operatorname{sen} \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \tag{9b}$$

son soluciones de valores reales de la ecuación (1). Es posible demostrar que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son soluciones linealmente independientes (ver el problema 15).

Por ejemplo, supóngase que $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$, y que los $r_3, \ldots, r_n$ son todos reales y distintos. Sean los eigenvectores correspondientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(3)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$; entonces, la solución general de (1) es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) + c_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{r_3 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}, \tag{10}$$

en donde $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ quedan dados por las ecuaciones (9). Es necesario resaltar que este análisis sólo es válido si la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de la ecuación (1) es real, ya que solamente así los eigenvalores y eigenvectores complejos ocurren en parejas conjugadas.

Ejemplo 1 Encontrar un conjunto fundamental de soluciones de valores reales del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{11}$$

Si se supone que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt} \tag{12}$$

se llega al conjunto de ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

para los eigenvalores y eigenvectores de $\mathbf{A}$. La ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{vmatrix} = r^2 + r + \tfrac{5}{4} = 0; \tag{14}$$

por lo tanto, los eigenvalores son $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ y $r_2 = -\frac{1}{2} - i$. Por la ecuación (13), un simple cálculo muestra que los eigenvectores correspondientes son

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{15}$$

De donde, un conjunto fundamental de soluciones del sistema (11) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2-i)t}. \tag{16}$$

Para obtener un conjunto de soluciones de valores reales, es necesario encontrar las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}^{(1)}$ o de $\mathbf{x}^{(2)}$. En efecto,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t/2}(\cos t + i \operatorname{sen} t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ -e^{-t/2} \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t/2} \operatorname{sen} t \\ e^{-t/2} \cos t \end{pmatrix}. \tag{17}$$

De donde,

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{18}$$

es un conjunto de soluciones de valores reales. Para verificar que $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son linealmente independientes, se calcula su wronskiano:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t/2} \cos t & e^{-t/2} \operatorname{sen} t \\ -e^{-t/2} \operatorname{sen} t & e^{-t/2} \cos t \end{vmatrix} \\ &= e^{-t}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = e^{-t}. \end{aligned}$$

En virtud de que el wronskiano nunca es cero, se concluye que $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones (de valores reales) del sistema (11).

En la figura 7.6.1*a* se muestran las gráficas de las soluciones $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$. Dado que

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

las gráficas de $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ pasan por los puntos (1, 0) y (0, 1), respectivamente. Otras soluciones del sistema (11) son combinaciones lineales de $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$, y en la figura 7.6.1*a* también se muestran las gráficas de algunas de estas soluciones. En todos los casos, la solución tiende al origen a lo largo de una trayectoria en espiral cuando $t \to \infty$; esto se debe al hecho de que las soluciones (18) son productos de factores exponenciales que decaen y seno o coseno. En la figura 7.6.1*b* se muestran algunas gráficas típicas de x_1 contra t; cada una representa una oscila-

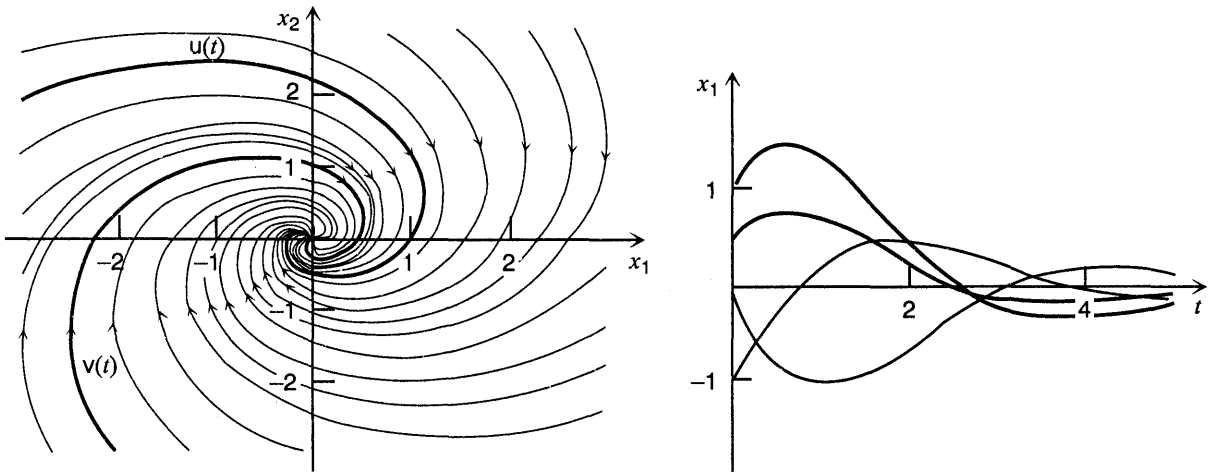


FIGURA 7.6.1 a) Trayectorias del sistema (11); el origen es un punto espiral. b) Gráficas de x_1 contra t para el sistema (11).

ción que decae con el tiempo. La figura 7.6.1*a* es típica de todos los sistemas de segundo orden $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ cuyos eigenvalores son complejos con parte real negativa. El origen se llama punto espiral. Para un sistema cuyos eigenvalores tienen parte real positiva, las trayectorias son semejantes a las de la figura 7.6.1*a*, pero la dirección del movimiento es alejándose del origen. Dependiendo de los elementos de la matriz de coeficientes **A**, las espirales pueden ser en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, como en este ejemplo, o en sentido contrario.

Ejemplo 2 El circuito eléctrico que se muestra en la figura 7.6.2 se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \tag{19}$$

en donde I es la corriente que pasa por la inductancia y V es la caída de voltaje a través del capacitor. Estas ecuaciones se dedujeron en el problema 19 de la sección 7.1. Supóngase que en el instante $t = 0$ la corriente es de 2 amperes y la caída de voltaje es de 2 volts. Encontrar $I(t)$ y $V(t)$ en cualquier instante.

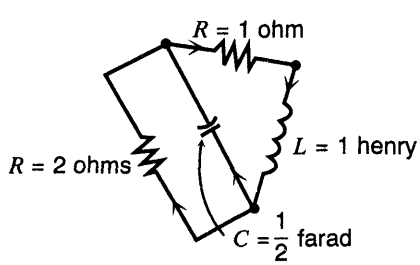


FIGURA 7.6.2 Circuito del ejemplo 2.

Si se supone que

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \xi e^{rt}, \tag{20}$$

se obtienen las ecuaciones algebraicas

$$\begin{pmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Los eigenvalores se determinan a partir de la condición

$$\begin{vmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 3 = 0; \tag{22}$$

Por tanto, $r_1 = -1 + \sqrt{2}i$ y $r_2 = -1 - \sqrt{2}i$. Entonces, los eigenvectores correspondientes se encuentran a partir de la ecuación (21); a saber,

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}, \qquad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}. \tag{23}$$

La solución de valores complejos correspondiente a r_1 y $\xi^{(1)}$ es

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}e^{r_1 t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2}i)t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos\sqrt{2}t + i\,\operatorname{sen}\sqrt{2}t) \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} + ie^{-t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{24}$$

Las partes real e imaginaria de esta solución forman una pareja de soluciones linealmente independientes de valores reales de la ecuación (19):

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}. \tag{25}$$

De donde, la solución general de (19) es

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Una vez que se imponen las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

se encuentra que

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

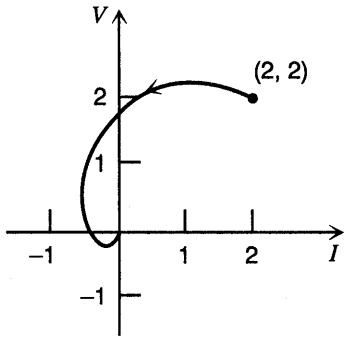


FIGURA 7.6.3 Solución del problema con valor inicial del ejemplo 2.

Por tanto, $c_1 = 2$ y $c_2 = -\sqrt{2}$. Entonces la solución del problema propuesto queda dada por la ecuación (26), con estos valores de c_1 y c_2. En la figura 7.6.3 se muestra la gráfica de la solución. La trayectoria forma una espiral en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y tiende con rapidez al origen, debido al factor e^{-t}.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, exprese la solución general del sistema de ecuaciones dado en términos de funciones de valores reales. En cada uno de los problemas 1 a 6, trace también algunas trayectorias y describa el comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En los problemas 9 y 10 encuentre la solución del problema dado con valor inicial. Describa el comportamiento de la solución cuando $t > \infty$.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

En los problemas 11 y 12, resuelva el sistema de ecuaciones dado por el método del problema 20 de la sección 7.5. Suponga que $t \to 0$.

11. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

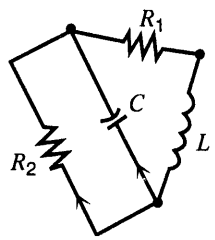


FIGURA 7.6.4 Circuito del problema 13.

13. Considere el circuito eléctrico que se muestra en la figura 7.6.4. Suponga que $R_1 = R_2 =$ 4 ohms, $C = \frac{1}{2}$ farad y $L = 8$ henry.
    a) Demuestre que este circuito se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \tag{i}$$

    en donde I es la corriente que pasa por la inductancia y V es la caída de voltaje a través del capacitor.
    Sugerencia: ver el problema 18 de la sección 7.1.
    b) Encuentre la solución general de las ecuaciones (i) en términos de funciones de valores reales.
    c) Encuentre $I(t)$ y $V(t)$ si $I(0) = 2$ ampere y $V(0) = 3$ volt.
    d) Determine los valores límite de $I(t)$ y $V(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Estos valores límite dependen de las condiciones iniciales?
14. El circuito eléctrico que se muestra en la figura 7.6.5 se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \tag{i}$$

    en donde I es la corriente que pasa por la inductancia y V es la caída de voltaje a través del capacitor. Estas ecuaciones diferenciales se dedujeron en el problema 18 de la sección 7.1.
    a) Demuestre que los eigenvalores de la matriz de coeficientes son reales y diferentes si $L > 4R^2C$; demuestre que son conjugados complejos si $L < 4R^2C$.

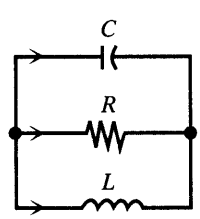


FIGURA 7.6.5 Circuito del problema 14.

b) Suponga que $R = 1$ ohm, $C = \frac{1}{2}$ farad y $L = 1$ henry. Encuentre la solución general del sistema (i) en este caso.

c) Encuentre $I(t)$ y $V(t)$ si $I(0) = 2$ ampere y $V(0) = 1$ volt.

d) Para el circuito del inciso b), determine los valores límite de $I(t)$ y $V(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Estos valores límite dependen de las condiciones iniciales?

15. En este problema se indica cómo demostrar que $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$, según se dan en las ecuaciones (9), son linealmente independientes.

a) Sean $r_1 = \lambda + i\mu$ y $\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$ una pareja de eigenvalores conjugados de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de las ecuaciones (1); sean $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ los eigenvectores correspondientes. Recuerde que en la sección 7.3 se afirmó que si $r_1 \neq \bar{r}_1$, entonces $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ son linealmente independientes. Calcule el wronskiano de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ y demuestre que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ también son linealmente independientes.

b) Calcule el wronskiano de $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ en $t = 0$ y luego use el resultado del inciso a) con el teorema 7.4.3 para demostrar que $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son linealmente independientes para toda t.

7.7 Eigenvalores repetidos

La consideración del sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

se concluye con un análisis del caso en el que la matriz $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor repetido. Una vez más, el análisis de esta sección es válido sin importar que $\mathbf{A}$ sea real o compleja. Si $r = \rho$ es una raíz con multiplicidad k de la ecuación determinantal

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \tag{2}$$

se dice que ρ es un eigenvalor de multiplicidad k de la matriz $\mathbf{A}$. En este caso, se tienen dos posibilidades: existen k eigenvectores linealmente independientes correspondientes al eigenvalor ρ, o bien existen menos de esos k eigenvectores. Estas posibilidades se ilustraron en los ejemplos 4 y 5 de la sección 7.3; en el ejemplo 5 un eigenvalor doble estaba acompañado por dos eigenvectores linealmente independientes, mientras que en el ejemplo 4 un eigenvalor doble estaba asociado con sólo un eigenvector linealmente independiente.

En el primer caso, considérese que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ son k eigenvectores linealmente independientes asociados con el eigenvalor ρ de multiplicidad k. Entonces $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}, \ldots,$ $\mathbf{x}^{(k)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(k)}e^{\rho t}$ son k soluciones linealmente independientes de la ecuación (1). Por tanto, en este caso no afecta el que el eigenvalor $r = \rho$ esté repetido; todavía se tiene un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (1), de la forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Este caso siempre ocurre si la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es hermitiana.

Sin embargo, si la matriz de coeficientes no es hermitiana puede haber menos de k eigenvectores independientes correspondientes a un eigenvalor ρ de multiplicidad k y, de ser así, habrá menos de k soluciones de (1), de la forma $\boldsymbol{\xi}e^{\rho t}$, asociadas con este eigenvalor. Por lo tanto para construir la solución general de la ecuación (1) es necesario encontrar otras soluciones de forma diferente. Por analogía con los resultados anteriores de las ecuaciones lineales de orden n, es natural buscar soluciones adicionales que comprendan productos de polinomios y funciones exponenciales. En primer lugar se considerará un ejemplo.

Ejemplo 1 Encontrar un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{3}$$

Si se supone que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ y se sustituye $\mathbf{x}$ en la ecuación (3), se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

de lo cual se deduce que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son $r_1 = r_2 = 2$. Para este valor de r, las ecuaciones (4) expresan que $\xi_1 + \xi_2 = 0$. Por tanto, sólo existe un eigenvector $\boldsymbol{\xi}$, dado por $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$, correspondiente al eigenvalor doble. Por tanto, una solución del sistema (3) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \tag{5}$$

pero no existe una segunda solución de la forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$. Es natural tratar de hallar una segunda solución del sistema (3) de la forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} t e^{2t}, \tag{6}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ es un vector constante por determinar. Si se sustituye $\mathbf{x}$ en la ecuación (3) da

$$2\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + \boldsymbol{\xi} e^{2t} - \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} t e^{2t} = \mathbf{0}. \tag{7}$$

A fin de que se satisfaga la ecuación (7) para toda t, es necesario que cada uno de los coeficientes de te^{2t} y e^{2t} sean cero. A partir del término en e^{2t} se encuentra que

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

De donde, no existe solución diferente de cero del sistema (3) que sea de la forma (6).

Dado que la ecuación (7) contiene términos tanto en te^{2t} como en e^{2t}, parece que además de $\boldsymbol{\xi} te^{2t}$, la segunda solución debe contener un término de la forma $\boldsymbol{\eta} e^{2t}$; en otras palabras, es necesario suponer que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} t e^{2t} + \boldsymbol{\eta} e^{2t}, \tag{9}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son vectores constantes. Una vez que se sustituye $\mathbf{x}$ por esta expresión en la ecuación (3) se obtiene

$$2\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + (\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\eta}) e^{2t} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + \boldsymbol{\eta} e^{2t}). \tag{10}$$

Si se igualan los coeficientes de te^{2t} y e^{2t} en cada miembro de (10) da las condiciones

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

y

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \tag{12}$$

para la determinación de $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$. La ecuación (11) se satisface si $\boldsymbol{\xi}$ es el eigenvector de $\mathbf{A}$ que corresponde al eigenvalor $r = 2$; es decir $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$. Dado que $\det(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ es cero, podría esperarse que no fuera posible resolver la ecuación (12); sin embargo, esto no es necesariamente cierto, ya que para algunos vectores $\boldsymbol{\xi}$ es posible resolverla. De hecho, la matriz aumentada de la ecuación (12) es

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

El segundo renglón de esta matriz es proporcional al primero, de modo que el sistema es resoluble. Se tiene

$$-\eta_1 - \eta_2 = 1$$

por lo que si $\eta_1 = k$, en donde k es arbitraria, entonces $\eta_2 = -k - 1$. Si se escribe

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

entonces, al sustituir $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ en la ecuación (9), se obtiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{14}$$

El último término de la ecuación (14) es simplemente un múltiplo de la primera solución $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y es posible ignorarlo, pero los dos primeros términos constituyen una nueva solución

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{15}$$

Un cálculo elemental muestra que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = -e^{4t}$ y, por consiguiente, $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema (3). La solución general es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

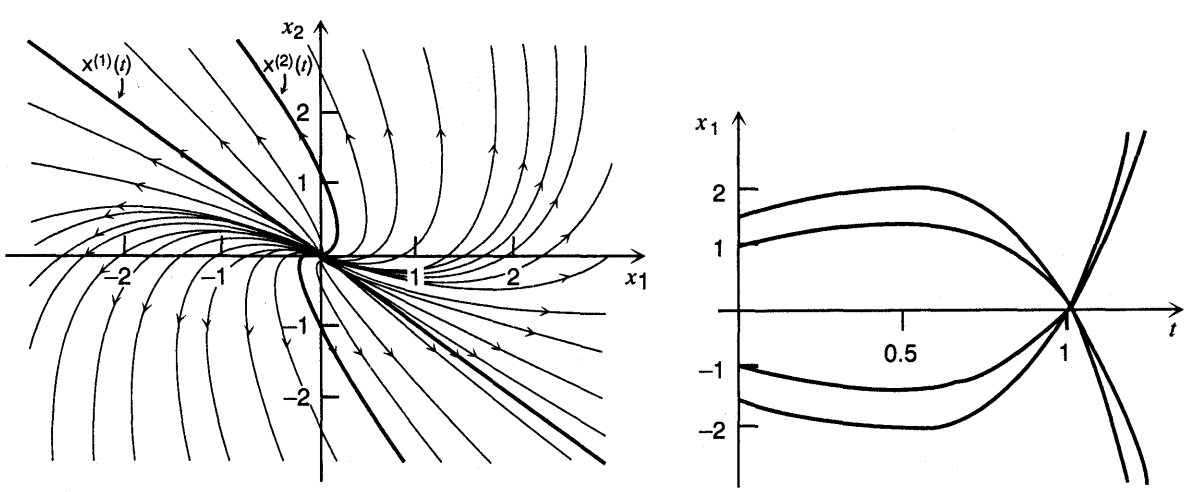


FIGURA 7.7.1 a) Trayectorias del sistema (3); el origen es un nodo. b) Gráficas de x_1 contra t para el sistema (3).

La gráfica de la solución (16) es un poco más difícil de analizar que en algunos de los ejemplos anteriores. Es evidente que $\mathbf{x}$ se vuelve no acotado cuando $t \to \infty$ y que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ cuando $t \to -\infty$. Es imposible demostrar que cuando $t \to -\infty$, todas las soluciones tienden al origen tangentes a la recta $x_2 = -x_1$, determinada por el eigenvector. De manera semejante, cuando $t \to \infty$, cada trayectoria es asintótica a una recta de pendiente -1. En la figura 7.7.1*a* se muestran las trayectorias del sistema (3), y en la 7.7.1*b*, algunas gráficas típicas de x_1 contra t. El patrón de trayectorias de esta figura es típico de los sistemas de segundo orden $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con eigenvalores iguales y un solo eigenvector independiente. En este caso, el origen también se denomina nodo. Si los eigenvalores son negativos, las trayectorias son semejantes, aunque se recorren en dirección hacia adentro.

A partir del ejemplo, resulta evidente una diferencia entre un sistema de dos ecuaciones de primer orden y una sola ecuación de segundo orden. Recuérdese que para una ecuación lineal de segundo orden con una raíz repetida r_1 de la ecuación característica, no se requiere un término $ce^{r_1 t}$ en la segunda solución, ya que es un múltiplo de la primera solución. Por otra parte, para un sistema de dos ecuaciones de primer orden, el término $\boldsymbol{\eta} e^{r_1 t}$ de la ecuación (9) con $r_1 = 2$ no es un múltiplo de la primera solución $\boldsymbol{\xi} e^{r_1 t}$ a menos que $\boldsymbol{\eta}$ sea proporcional al eigenvector $\boldsymbol{\xi}$ asociado con el eigenvalor r_1. En virtud de que casi nunca es así, es necesario retener el término $\boldsymbol{\eta} e^{r_1 t}$.

El mismo procedimiento puede aplicarse en el caso general. Considérese de nuevo el sistema (1) y supóngase que $r = \rho$ es un eigenvalor doble de $\mathbf{A}$, pero que solamente se tiene un eigenvector $\boldsymbol{\xi}$ correspondiente. Entonces una solución [semejante a la ecuación (5)] es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi} e^{\rho t}, \tag{17}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ satisface

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{18}$$

Al proceder como en el ejemplo, se encuentra que una segunda solución [semejante a la ecuación (5)] es

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} + \boldsymbol{\eta} e^{\rho t}, \tag{19}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ satisface la ecuación (18) y $\boldsymbol{\eta}$ queda determinado por

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}. \tag{20}$$

Aun cuando $\det(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I}) = 0$, se puede demostrar que siempre es posible resolver la ecuación (20) para $\boldsymbol{\eta}$. El vector $\boldsymbol{\eta}$ se conoce como eigenvector generalizado correspondiente al eigenvalor ρ.

Si $r = \rho$ es un eigenvalor de la matriz $\mathbf{A}$ de multiplicidad mayor que 2, entonces existe una mayor variedad de posibilidades. Esto puede ilustrarse al considerar un eigenvalor de multiplicidad tres. En primer lugar supóngase que el eigenvalor triple $r = \rho$ tiene tres eigenvectores linealmente independientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, y $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$. En este caso, el conjunto correspondiente de soluciones independientes es simplemente

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\rho t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\rho t}, \qquad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(3)} e^{\rho t}. \tag{21}$$

Supóngase ahora que existe un solo eigenvector linealmente independiente asociado con el eigenvalor triple $r = \rho$. Entonces la primera solución queda dada por la ecuación (17), una segunda solución por la ecuación (19) y una tercera solución es de la forma

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \boldsymbol{\xi}\frac{t^2}{2!}e^{\rho t} + \boldsymbol{\eta}te^{\rho t} + \boldsymbol{\zeta}e^{\rho t}, \tag{22}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ satisface la ecuación (18), $\boldsymbol{\eta}$ satisface la (20) y $\boldsymbol{\zeta}$ queda determinado por

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta}. \tag{23}$$

Una vez más, siempre es posible resolver la ecuación (23) para $\boldsymbol{\zeta}$, y los vectores $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\zeta}$ se llaman eigenvectores generalizados.

La última posibilidad es que haya dos eigenvectores linealmente independientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ correspondientes al eigenvalor $r = \rho$. Entonces, dos soluciones del sistema (1) son

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\rho t}. \tag{24}$$

Una tercera solución es de la forma

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \boldsymbol{\xi}te^{\rho t} + \boldsymbol{\eta}e^{\rho t}, \tag{25}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ satisface la ecuación (18) y $\boldsymbol{\eta}$ es una solución de la (20). Aquí es necesario elegir $\boldsymbol{\xi}$ como una combinación lineal de los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ de tal manera que la ecuación

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \tag{26}$$

sea resoluble. Si se escribe

$$\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)} \tag{27}$$

entonces es necesario elegir c_1 y c_2 de modo que sea posible despejar $\boldsymbol{\eta}$ de la (26). Las soluciones $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ y $\mathbf{x}^{(3)}(t)$, dadas por las ecuaciones (24) y (25), forman un conjunto de soluciones independientes correspondientes al eigenvalor $r = \rho$, en este caso.

Esta situación se ilustra en el problema 2.

Si existe un eigenvalor de multiplicidad aun mayor, entonces la situación puede complicarse más. Por ejemplo, si $r = \rho$ es un eigenvalor de multiplicidad cuatro, es necesario tratar diferentes casos según haya cuatro, tres, dos o un eigenvector linealmente independientes. Es posible un tratamiento general de problemas con eigenvalores repetidos, pero comprende tópicos avanzados de la teoría de matrices y rebasa el alcance de este libro. Aquí sólo se tratan las técnicas de cómputo necesarias para encontrar un conjunto fundamental de soluciones cuando las multiplicidades de los eigenvalores no son mayores que tres.

Ejemplo 2 Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Si se supone que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, se obtiene el sistema algebraico

$$\begin{pmatrix} 1-r & 9 \\ -1 & -5-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Por tanto, los eigenvalores son las raíces de

$$(1 - r)(-5 - r) + 9 = r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Por la ecuación (29), se encuentra que el eigenvector correspondiente es $\boldsymbol{\xi}^T = (3, -1)$. Por tanto, una solución del sistema (28) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}. \tag{30}$$

Una segunda solución independiente es de la forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} te^{-2t} + \boldsymbol{\eta} e^{-2t}$, en donde $\boldsymbol{\xi}$ es el mismo que antes y $\boldsymbol{\eta}$ satisface $(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$, o bien,

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, $\eta_1 + 3\eta_2 = 1$, de modo que si $\eta_2 = k$, entonces $\eta_1 = 1 - 3k$, en donde k, es arbitraria. Por tanto,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 - 3k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

El término en que aparece k simplemente produce un múltiplo de la primera solución $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, por lo que puede eliminarse y se obtiene la segunda solución

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}. \tag{31}$$

Finalmente, la solución general del sistema (28) es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} \right]. \tag{32}$$

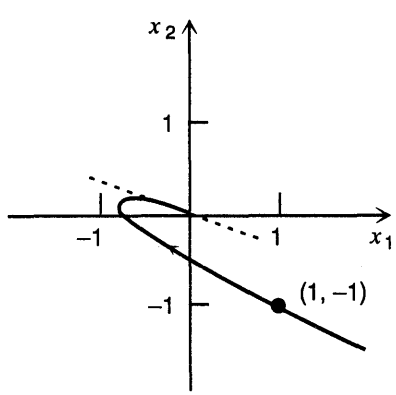


FIGURA 7.7.2 Solución del problema con valor inicial del ejemplo 2.

Para satisfacer las condiciones iniciales, se hace $t = 0$ en la ecuación (32); esto da

$$c_1\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, $c_1 = 1$, $c_2 = -2$ y la solución del problema dado con valor inicial es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} - 2\left[\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}te^{-2t} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-2t}\right] = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} - 2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}te^{-2t}. \tag{33}$$

En la figura 7.7.2 se muestra la gráfica de la solución. Obsérvese que tiende al origen cuando $t \to \infty$ debido a los factores exponenciales negativos en la solución. A medida que tiende al origen, la gráfica es tangente a la recta de pendiente $-1/3$ determinada por el eigenvector de la matriz de coeficientes; ésta es la línea discontinua de la figura 7.7.2.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, encuentre la solución general del sistema dado de ecuaciones.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}3 & -4\\1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}4 & -2\\8 & -4\end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}-3 & \frac{5}{2}\\-\frac{5}{2} & 2\end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}$

En los problemas 7 y 8 encuentre la solución del problema con valor inicial dado.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}1 & -4\\4 & -7\end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-4 & 1 & 0\\3 & 6 & 2\end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}-1\\2\\-30\end{pmatrix}$

9. Demuestre que $r = 2$ es una raíz triple de la ecuación característica del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & -1\\-3 & 2 & 4\end{pmatrix}\mathbf{x},$$

y encuentre tres soluciones linealmente independientes de este sistema.

En los problemas 10 y 11, resuelva el sistema de ecuaciones dado por el método del problema 20 de la sección 7.5. Suponga que $t > 0$.

10. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. En este problema se indica la manera de proceder cuando hay un eigenvalor triple y sólo dos eigenvectores asociados. Considere el sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{i}$$

a) Demuestre que $r = 1$ es un eigenvalor triple de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ y que solamente existen dos eigenvectores linealmente independientes

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{ii}$$

Halle dos soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ de la ecuación (i).

b) Para encontrar una tercera solución, suponga que

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi t e^t + \eta e^t; \tag{iii}$$

y luego demuestre que ξ y η deben satisfacer

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \tag{iv}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\eta = \xi. \tag{v}$$

c) Demuestre que $\xi = c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}$ en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, es la solución más general de la ecuación (iv). Demuestre que para resolver la ecuación (iv) es necesario que $c_1 = c_2$.

d) Es conveniente elegir $c_1 = c_2 = 2$. Para esta elección, demuestre que

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \tag{vi}$$

en donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. Aplique los resultados dados en las ecuaciones (iv) para encontrar una tercera solución linealmente independiente $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ de la ecuación (i).

13. Demuestre que todas las soluciones del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

tienden a cero cuando $t \to \infty$ si y sólo si $a + d < 0$ y $ad - bc > 0$. Compare este resultado con el del problema 33 de la sección 3.5.

14. Considere nuevamente el circuito eléctrico del problema 14 de la sección 7.6. Este circuito se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}.$$

a) Demuestre que los eigenvalores son reales e iguales si $L = 4R^2C$.
b) Suponga que $R = 1$ ohm, $C = 1$ farad y $L = 4$ henrys. Suponga también que $I(0) = 1$ ampere y $V(0) = 2$ volt. Encuentre $I(t)$ y $V(t)$.

7.8 Matrices fundamentales

La teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales puede aclararse aun más mediante la introducción de la idea de matriz fundamental. Este concepto es particularmente útil en la siguiente sección, en donde se extiende el método de variación de parámetros a los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. Supóngase que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{1}$$

sobre algún intervalo $\alpha < t < \beta$. Entonces, se dice que la matriz

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ es una **matriz fundamental** para el sistema (1). Nótese que cualquier matriz fundamental es no singular, ya que sus columnas son vectores linealmente independientes.

Ejemplo 1 Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{3}$$

En el ejemplo 1 de la sección 7.5 se encontró que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación (3). Por tanto, una matriz fundamental para el sistema (3) es

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La solución de un problema con valor inicial puede escribirse de manera muy compacta en términos de una matriz fundamental. La solución general de la ecuación (1) es

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \tag{5}$$

o, en términos de $\Psi(t)$,

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c}, \tag{6}$$

en donde $\mathbf{c}$ es un vector constante con componentes arbitrarias $c_1, \ldots, c_n$. Para un problema con valor inicial que conste de la ecuación diferencial (1) y la condición inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \tag{7}$$

en donde t_0 es un punto dado en $\alpha < t < \beta$ y $\mathbf{x}^0$ es un vector inicial dado, basta elegir el vector $\mathbf{c}$ en la ecuación (6) de modo que se satisfagan la condición inicial (7). De donde, $\mathbf{c}$ debe satisfacer

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0. \tag{8}$$

Por lo tanto, como $\Psi(t)$ es no singular,

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0, \tag{9}$$

y

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \tag{10}$$

es la solución del problema con valor inicial. Sin embargo, es necesario resaltar que para resolver un problema con valor inicial dado, por lo general se resolvería la ecuación (8) por reducción de renglones y después se sustituiría $\mathbf{c}$ en la ecuación (6), en vez de calcular $\Psi^{-1}(t_0)$ y usar la ecuación (10).

Recuérdese que cada columna de la matriz fundamental Ψ es una solución de la ecuación (1). Se concluye que Ψ satisface la ecuación diferencial matricial

$$\Psi' = \mathbf{P}(t)\Psi. \tag{11}$$

Esta relación se confirma con facilidad al comparar los dos miembros de la ecuación (11), columna por columna.

Algunas veces es conveniente usar la matriz fundamental especial, denotada por $\Phi(t)$, cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ designados en el teorema 7.4.4. Además de la ecuación diferencial (1), estos vectores satisfacen las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)}, \tag{12}$$

en donde $\mathbf{e}^{(j)}$ es el vector unitario, definido en el teorema 7.4.4, que tiene un uno en la j-ésima posición y ceros en todas las demás posiciones. Por tanto, $\Phi(t)$ tiene la propiedad de que

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \tag{13}$$

Siempre se reservará el símbolo $\mathbf{\Phi}$ para denotar la matriz fundamental que satisface la condición inicial (13) y Ψ se usará cuando se quiera representar una matriz fundamental arbitraria. En términos de $\mathbf{\Phi}(t)$, la solución del problema con valor inicial (1) y (7) es de apariencia aún más sencilla; dado que $\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$, por la ecuación (10) se concluye que

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0. \tag{14}$$

Aunque la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ a menudo es más complicada que la $\Psi(t)$, es especialmente útil si debe resolverse repetidas veces el mismo sistema de ecuaciones diferenciales, sujeto a muchas condiciones iniciales diferentes. Esto corresponde a un sistema físico dado que puede partir de muchos estados iniciales diferentes. Si ya se ha determinado la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$, entonces puede hallarse la solución para cada conjunto de condiciones iniciales simplemente por multiplicación matricial, como se indica en la ecuación (14). Por tanto, la matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ representa una transformación de las condiciones iniciales $\mathbf{x}^0$ hacia la solución $\mathbf{x}(t)$ en un instante arbitrario (t). Al comparar las ecuaciones (10) y (14) resulta evidente que $\mathbf{\Phi}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$.

Ejemplo 2 Para el sistema (3)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

del ejemplo 1, encontrar la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}$ tal que $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$.

Las columnas de $\mathbf{\Phi}$ son soluciones de la ecuación (3) que satisfacen las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

En virtud de que la solución general de (3) es

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t},$$

es posible hallar la solución que satisfaga el primer conjunto de estas condiciones iniciales al elegir $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$; de manera semejante, se obtiene la solución que satisface el segundo conjunto de condiciones iniciales al elegir $c_1 = \frac{1}{4}$ y $c_2 = -\frac{1}{4}$. De donde,

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Nótese que los elementos de $\mathbf{\Phi}(t)$ son más complicados que los de la matriz fundamental $\Psi(t)$ dada por la ecuación (4); sin embargo, ahora es fácil determinar la solución correspondiente a cualquier conjunto de condiciones iniciales.

Ahora se volverá al sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{17}$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante, no necesariamente real. En las secciones 7.5 a 7.7 se describió cómo resolver un sistema de este tipo a partir de la hipótesis de que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Aquí

se proporciona otro punto de vista. La razón básica por la que un sistema de ecuaciones presenta cierta dificultad es que las ecuaciones suele estar *acopladas*; en otras palabras, algunas o todas las ecuaciones comprenden más de una, quizá todas, las variables dependientes. Esto ocurre siempre que la matriz de coeficientes **A** no es una matriz diagonal. De donde, las ecuaciones del sistema deben resolverse *simultáneamente*, en vez de *consecutivamente*. Esta observación sugiere que una manera de resolver un sistema de ecuaciones podría ser transformarlo en un sistema equivalente *no acoplado* en el que cada ecuación contenga sólo una variable dependiente.

Esto corresponde a transformar la matriz de coeficientes **A** en una matriz *diagonal*.

Según los resultados citados en la sección 7.3, es posible realizar esto siempre que **A** tenga un conjunto completo de n eigenvalores linealmente independientes. Sean $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ los eigenvectores de **A** correspondientes a los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$, y fórmase la matriz de transformación **T** cuyas columnas sean $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$; entonces

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Si se define una nueva variable dependiente **y** mediante la relación

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \tag{19}$$

por la ecuación (7) se tiene que

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}, \tag{20}$$

o bien,

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y}. \tag{21}$$

Por la ecuación (46) de la sección 7.3,

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

es la matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los eigenvalores de **A**. Por tanto, **y** satisface el sistema no acoplado de ecuaciones

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y}, \tag{23}$$

para el cual una matriz fundamental es la matriz diagonal

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{r_n t} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Entonces, a partir de $\mathbf{Q}$, se encuentra una matriz fundamental Ψ para el sistema (17), por la transformación (19),

$$\Psi = \mathbf{TQ}; \tag{25}$$

es decir

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

La ecuación (26) es el mismo resultado que se obtuvo antes. Este procedimiento de diagonalización no brinda ventajas de cómputo sobre el método de la sección 7.5, ya que en cualquiera de los dos casos es necesario calcular los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales. A pesar de ello, es digno de atención que el problema de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales y el de diagonalizar una matriz son matemáticamente los mismos.

La matriz exp(A*t*). La función exponencial escalar exp(*at*) puede representarse por la serie de potencias

$$\exp(at) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}, \tag{27}$$

que converge para toda t. Reemplácese ahora el escalar a por la matriz constante $\mathbf{A}$ de $n \times n$ y considérese la serie correspondiente

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \cdots. \tag{28}$$

Cada término de la serie (28) es una matriz $n \times n$. Es posible demostrar que cada componente de esta suma matricial converge para toda t cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie (28) define con su suma una nueva matriz, que se denota por exp(A*t*); es decir

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}, \tag{29}$$

análoga al desarrollo (27) de la función escalar exp(*at*).

Al derivar término a término la serie (29) se obtiene

$$\frac{d}{dt}[\exp(\mathbf{A}t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}\right] = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t). \tag{30}$$

Por tanto, exp(A*t*) satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t). \tag{31}$$

Además, cuando $t = 0$, exp(A*t*) satisface la condición inicial

$$\exp(\mathbf{A}t)\Big|_{t=0} = \mathbf{I}. \tag{32}$$

Por tanto, es posible identificar $\exp(\mathbf{A}t)$ con la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}$, que satisface el mismo problema con valor inicial que $\exp(\mathbf{A}t)$, a saber

$$\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}, \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}. \tag{33}$$

Como resultado de esta interpretación de la función exponencial matricial $\exp(\mathbf{A}t)$, es posible escribir la solución del problema con valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \tag{34}$$

en la forma

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \tag{35}$$

La solución (35) es precisamente la ecuación (14) en la que se reemplazó $\mathbf{\Phi}(t)$ por $\exp(\mathbf{A}t)$. La forma de la solución (35) apoya la analogía entre los sistemas de ecuaciones de primer orden y las ecuaciones escalares simples; recuérdese que la solución del problema escalar con valor inicial

$$x' = ax, \qquad x(0) = x_0, \tag{36}$$

en donde a es una constante, es

$$x = x_0 \exp(at). \tag{37}$$

Para justificar de manera más concluyente el empleo de $\exp(\mathbf{A}t)$ por la suma se la serie (28), es necesario demostrar que esta función de hecho tiene las propiedades que se asocian a la función exponencial. En el problema 12 se describe una manera de realizar esto.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 10, encuentre una matriz fundamental para el sistema de ecuaciones dado. En cada caso, halle también la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ que satisfaga $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. Demuestre que $\mathbf{\Phi}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$, en donde $\mathbf{\Phi}(t)$ y $\Psi(t)$ son como se definieron en esta sección.
12. Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ la matriz fundamental que satisface $\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A\Phi}$, $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. En el texto esta matriz también se denotó por $\exp(\mathbf{A}t)$. En este problema se demuestra que $\mathbf{\Phi}$ de hecho tiene las principales propiedades algebraicas que se asocian a la función exponencial.
    a) Demuestre que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(t + s)$; es decir, que $\exp(\mathbf{A}t)\exp(\mathbf{A}s) = \exp[\mathbf{A}(t + s)]$. *Sugerencia:* Demuestre que si s es fija y t es variable, entonces tanto $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s)$ como $\mathbf{\Phi}(t + s)$ satisfacen el problema con valor inicial $\mathbf{Z}' = \mathbf{AZ}$, $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{\Phi}(s)$.
    b) Demuestre que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-t) = \mathbf{I}$; es decir, que $\exp(\mathbf{A}t)\exp[\mathbf{A}(-t)] = \mathbf{I}$. Entonces demuestre que $\mathbf{\Phi}(-t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.
    c) Demuestre que $\mathbf{\Phi}(t - s) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(s)$.
13. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal, con elementos en la diagonal $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces $\exp(\mathbf{A}t)$ también es una matriz diagonal, cuyos elementos en la diagonal son $\exp(a_1 t), \exp(a_2, t), \ldots, \exp(a_n t)$.
14. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, en donde λ es un número real arbitrario.
    a) Encuentre $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ y $\mathbf{A}^4$.
    b) Mediante un argumento inductivo, demuestre que $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.
    c) Determine $\exp(\mathbf{A}t)$.
    d) Resuelva el problema con valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ al aplicar la ecuación (35) del texto.
    e) Resuelva el problema con valor inicial del inciso d) mediante el método de la sección 7.7. Demuestre que las soluciones obtenidas en los incisos d) y e) son las misma.

*15. El método de aproximaciones sucesivas (ver la sección 2.11) también puede aplicarse a los sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, considere el problema con valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \tag{i}$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante y $\mathbf{x}^0$ un vector preescrito.
a) Si se supone que existe una solución $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$, demuestre que ésta debe satisfacer la ecuación integral

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_0^t \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(s)\, ds. \tag{ii}$$

b) Parta de la aproximación inicial $\boldsymbol{\phi}^{(0)}(t) = \mathbf{x}^0$. Sustituya $\boldsymbol{\phi}(s)$ por esta expresión en el segundo miembro de la ecuación (ii) y obtenga una nueva aproximación $\boldsymbol{\phi}^{(1)}(t)$. Demuestre que

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \tag{iii}$$

c) Repita este proceso y obtenga de ese modo una sucesión de aproximaciones $\boldsymbol{\phi}^{(0)}$, $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\phi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\phi}^{(n)}, \ldots$ Aplique un argumento inductivo para demostrar que

$$\boldsymbol{\phi}^{(n)}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!}\right)\mathbf{x}^0. \tag{iv}$$

d) Sea $n \to \infty$ y demuestre que la solución del problema con valor inicial (i) es

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \tag{v}$$

7.9 Sistemas lineales no homogéneos

En esta sección se volverá al sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{1}$$

en donde la matriz $\mathbf{P}(t)$ de $n \times n$ y el vector $\mathbf{g}(t)$ de $n \times 1$ son continuos para $\alpha < t < \beta$. Por el mismo argumento de la sección 3.6 (ver también el problema 16 de esta sección), la solución general de la ecuación (1) puede expresarse como

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{v}(t), \tag{2}$$

en donde $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ es la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, y $\mathbf{v}(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo (1). Se describen con brevedad varios métodos para determinar $\mathbf{v}(t)$.

Se empezará con los sistemas de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{3}$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante diagonizable de $n \times n$. Al diagonalizar la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, como se indicó en la sección 7.8 es posible transformar la ecuación (3) en un sistema de ecuaciones fácilmente resoluble.

Sea $\mathbf{T}$ la matriz cuyas columnas son los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ de $\mathbf{A}$ y defínase una nueva variable dependiente $\mathbf{y}$ por

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}. \tag{4}$$

Entonces, si se sustituye $\mathbf{x}$ en la ecuación (3), se obtiene

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t).$$

Al multiplicar por $\mathbf{T}^{-1}$ se concluye que

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \tag{5}$$

en donde $\mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$, y $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ de $\mathbf{A}$, dispuestos en el mismo orden en que los eigenvectores correspondientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ aparecen como columnas de $\mathbf{T}$. La ecuación (5) es un sistema de n ecuaciones *no acopladas* para $y_1(t), \ldots, y_n(t)$; como consecuencia, las ecuaciones pueden resolverse por separado. En forma escalar, la ecuación (5) queda

$$y_j'(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

en donde $h_j(t)$ es cierta combinación lineal de $g_1(t), \ldots, g_n(t)$. La ecuación (6) es lineal de primer orden y es posible resolverla por los métodos de la sección 2.1. De hecho, se tiene

$$y_j(t) = e^{r_j t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_j s}h_j(s)\,ds + c_j e^{r_j t}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

en donde c_j son constantes arbitrarias. Por último, se obtiene la solución $\mathbf{x}$ de la ecuación (3) a partir de la (4). Cuando el segundo término del segundo miembro de (7) se multiplica por la matriz de transformación $\mathbf{T}$, se obtiene la solución general de la ecuación homogénea

$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, mientras que el primer término del segundo miembro de (7) produce una solución particular del sistema no homogéneo (3).

Ejemplo 1 Encontrar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(t). \tag{8}$$

Si se procede como en la sección 7.5, se encuentra que los eigenvalores de la matriz de coeficientes son $r_1 = -3$ y $r_2 = -1$ y que los eigenvectores correspondientes son

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Por tanto, la solución general del sistema homogéneo es

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}. \tag{10}$$

Antes de escribir la matriz $\mathbf{T}$ de eigenvectores, recuérdese que al final debe hallarse $\mathbf{T}^{-1}$. La matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es real y simétrica, de modo que es posible aplicar el resultado enunciado al final de la sección 7.3: $\mathbf{T}^{-1}$ es simplemente la adjunta o (dado que $\mathbf{T}$ es real) la transpuesta de $\mathbf{T}$, siempre que los eigenvectores de $\mathbf{A}$ se normalicen de modo que $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = 1$. De donde, una vez que se normalizan $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, se tiene

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Al hacer $\mathbf{x} = \mathbf{Ty}$ y sustituir $\mathbf{x}$ en la ecuación (8), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para la nueva variable dependiente $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Dy} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y_1' + 3y_1 &= \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t, \\ y_2' + y_2 &= \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t. \end{aligned} \tag{13}$$

Cada una de las ecuaciones (13) es lineal y de primer orden, por lo que es posible resolverlas por los métodos de la sección 2.1. De esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{9}\right] + c_1e^{-3t}, \\ y_2 &= \sqrt{2}te^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2e^{-t}. \end{aligned} \tag{14}$$

Por último, la solución se escribe en términos de las variables originales;

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + [(c_2/\sqrt{2}) + \frac{1}{2}]e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -(c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + [(c_2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}]e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{15}$$

en donde $k_1 = c_1/\sqrt{2}$ y $k_2 = c_2/\sqrt{2}$. Los dos primeros términos del segundo miembro de la (15) forman la solución general del sistema homogéneo correspondiente a la ecuación (8). Los términos restantes son una solución particular del sistema no homogéneo.

Una segunda manera de hallar una solución particular del sistema no homogéneo (1) es el método de los coeficientes indeterminados. A fin de aplicar este método, se supone la forma de solución con algunos o todos los coeficientes no especificados y, a continuación, se busca determinar estos coeficientes de modo que se satisfaga la ecuación diferencial. En el aspecto práctico, este método sólo es aplicable si la matriz de coeficientes **P** es una matriz constante y si las componentes de **g** son funciones polinomiales, exponenciales o sinusoidales, o de sumas de productos de éstas. En estos casos, es posible predecir la forma correcta de la solución de manera sencilla y sistemática. El procedimiento para elegir la forma de la solución es sustancialmente el mismo que el dado en la sección 3.6 para ecuaciones lineales de segundo orden. La diferencia más importante se ilustra por el caso de un término no homogéneo de la forma $\mathbf{u}e^{\lambda t}$, en donde λ es una raíz simple de la ecuación característica. En esta situación, en vez se suponer una solución de la forma $\mathbf{a}te^{\lambda t}$, es necesario usar $\mathbf{a}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$, en donde **a** y **b** se determinan por sustitución en la ecuación diferencial.

Ejemplo 2 Aplicar el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{16}$$

Este es el mismo sistema de ecuaciones que el del ejemplo 1. Para aplicar el método de los coeficientes indeterminados, $\mathbf{g}(t)$ se escribe la forma

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}t. \tag{17}$$

Entonces se supone que

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \tag{18}$$

en donde **a**, **b**, **c** y **d** son vectores por determinar. Obsérvese que $r = -1$ es un eigenvalor de la matriz de coeficientes y, por lo tanto, es necesario incluir tanto $\mathbf{a}te^{-t}$ como $\mathbf{b}e^{-t}$ en la solución

supuesta. Al sustituir la ecuación (18) en la (16) y agrupar términos, se obtienen las siguientes ecuaciones algebraicas para **a**, **b**, **c** y **d**:

$$\begin{aligned} \mathbf{Aa} &= -\mathbf{a}, \\ \mathbf{Ab} &= \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Ac} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Ad} &= \mathbf{c}. \end{aligned} \tag{19}$$

Por la primera de las ecuaciones (19) se observa que **a** es un eigenvector de **A** correspondiente al eigenvalor $r = -1$. Por tanto, $\mathbf{a}^T = (1, 1)$. Entonces, por la segunda se encuentra que

$$\mathbf{b} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

para cualquier constante k. La elección más sencilla es $k = 0$, con lo cual $\mathbf{b}^T = (0, -1)$. En seguida, la tercera y cuarta dan $\mathbf{c}^T = (1, 2)$ y $\mathbf{d}^T = (-\frac{3}{4}, -\frac{5}{3})$, respectivamente.
Finalmente, por la ecuación (18) se obtiene la solución particular

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

La solución particular (21) no es idéntica a la contenida en la ecuación (15) del ejemplo 1 porque el término en e^{-t} es diferente. Sin embargo, si en la (20) se elige $k = \frac{1}{2}$, entonces $\mathbf{b}^T = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ y entonces concuerdan las dos soluciones particulares.

A continuación se vuelve al problema más general en el que la matriz de coeficientes es no constante o no diagonalizable. Sea

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{22}$$

en donde $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ son continuas sobre $\alpha < t < \beta$. Supóngase que se encontró una matriz fundamental $\Psi(t)$ para el sistema homogéneo correspondiente.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \tag{23}$$

Se aplica el método de variación de parámetros para construir una solución particular y la solución general, del sistema homogéneo (22).

Como la solución general del sistema homogéneo (23) es $\Psi(t)\mathbf{c}$, es natural proceder como en la sección 3.7 y buscar una solución del sistema no homogéneo (22) al sustituir el vector constante **c** por una función vectorial $\mathbf{u}(t)$. Por tanto, se supone que

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \tag{24}$$

en donde $\mathbf{u}(t)$ es un vector por determinar. Una vez que se deriva **x**, según se expresa en la ecuación (24) y al requerir que se satisfaga la ecuación (22), se obtiene

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \tag{25}$$

En virtud de que $\Psi(t)$ es una matriz fundamental, $\Psi'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)$; de donde, la ecuación (25) se reduce a

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t). \tag{26}$$

Recuérdese que $\Psi(t)$ es no singular sobre cualquier intervalo en donde $\mathbf{P}$ sea continua. De donde, $\Psi^{-1}(t)$ existe y, por lo tanto,

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t). \tag{27}$$

Así para $\mathbf{u}(t)$ es posible seleccionar cualquier vector de la clase de vectores que satisfacen la ecuación (27); estos vectores están determinados sólo hasta un (vector) constante aditivo arbitrario; por consiguiente, $\mathbf{u}(t)$ se denota por

$$\mathbf{u}(t) = \int \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}, \tag{28}$$

en donde el vector constante $\mathbf{c}$ es arbitrario. Por último, si se sustituye $\mathbf{u}(t)$ en la ecuación (24) se obtiene la solución $\mathbf{x}$ del sistema (22):

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t)\int \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt. \tag{29}$$

Como $\mathbf{c}$ es arbitrario, mediante una selección adecuada de $\mathbf{c}$ es posible satisfacer cualquier condición inicial en un punto $t = t_0$. Por tanto, toda solución del sistema (22) está contenida en la expresión dada por la ecuación (29); por lo tanto, es la solución general de la (22). Nótese que el primer término del segundo miembro de (29) es la solución general del sistema homogéneo correspondiente (23), y que el segundo término es una solución particular de la propia (22).

Considérese ahora el problema con valor inicial que consta de la ecuación diferencial (22) y la condición inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \tag{30}$$

La solución de este problema puede escribirse de manera más conveniente si para la solución particular de la ecuación (29) se elige la solución específica que es cero cuando $t = t_0$. Se puede hacer esto al usar t_0 como límite inferior de integración en (29), de modo que la solución general de la ecuación diferencial toma la forma

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds. \tag{31}$$

La condición inicial (30) también puede ser satisfecha siempre que

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \tag{32}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \tag{33}$$

es la solución del problema con valor inicial dado. Una vez más, que es útil usar Ψ^{-1} para escribir las soluciones (29) y (33), en casos particulares suele ser mejor resolver las ecua-

ciones necesarias por reducción respecto a los renglones, en vez de calcular Ψ^{-1} y sustituir en las ecuaciones (29) y (33).

La solución (33) toma una forma ligeramente más sencilla si se utiliza la matriz fundamental $\Phi(t)$ que satisface $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$. En este caso se tiene

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds. \tag{34}$$

La ecuación (34) puede simplificarse aun más si la matriz de coeficientes $\mathbf{P}(t)$ es una matriz constante (ver el problema 17).

Ejemplo 3 Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Este es el mismo sistema de ecuaciones que el de los ejemplos 1 y 2.

En la ecuación (10) se dio la solución general del sistema homogéneo correspondiente. Por tanto,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \tag{36}$$

es una matriz fundamental. Entonces, la solución $\mathbf{x}$ de la ecuación (35) queda dada por $\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$, en donde $\mathbf{u}(t)$ satisface $\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$, o sea,

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Si se resuelve la ecuación (37) por reducción respecto a los renglones, se obtiene

$$u_1' = e^{2t} - \tfrac{3}{2}te^{3t},$$
$$u_2' = 1 + \tfrac{3}{2}te^{t}.$$

De donde,

$$u_1(t) = \tfrac{1}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}te^{3t} + \tfrac{1}{6}e^{3t} + c_1,$$
$$u_2(t) = t + \tfrac{3}{2}te^{t} - \tfrac{3}{2}e^{t} + c_2,$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

que es la misma solución obtenida antes.

Cada uno de los métodos para resolver ecuaciones no homogéneas presenta ciertas ventajas y desventajas. El método de los coeficientes indeterminados no requiere integración,

pero su alcance es algo limitado y puede imponer la solución de varios conjuntos de ecuaciones algebraicas. El método de la diagonalización requiere hallar la inversa de la matriz de transformación y la solución de un conjunto de ecuaciones lineales de primer orden no acopladas, seguido de una multiplicación de matrices. Su ventaja principal es que, para matrices hermitianas de coeficientes, la inversa de la matriz de transformación puede escribirse sin realizar cálculos, una característica que es más importante para sistemas grandes. La variación de parámetros es el método más general. Por otra parte, comprende la resolución de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales con coeficientes variables, seguida de una integración y una multiplicación de matrices, por lo que también puede ser el más complicado desde un punto de vista del cómputo. Para muchos sistemas pequeños con coeficientes, como el de los ejemplos de esta sección, puede haber pocas razones para elegir uno de estos métodos de preferencia a los demás. Sin embargo, téngase presente que el método de diagonalización queda excluido si la matriz de coeficientes no es diagonalizable y que el método de los coeficientes indeterminados sólo es práctico para las clases de términos no homogéneos que acaban de mencionarse.

Para problemas con valor inicial de sistemas lineales con coeficientes constantes, a menudo la transformada de Laplace también es un instrumento eficaz. En virtud de que se aplica esencialmente de la misma manera descrita en el capítulo 6, para las ecuaciones escalares simples, aquí no se dan detalles.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 12, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}, \quad t > 0$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi$

13. El circuito eléctrico que se muestra en la figura 7.9.1 se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \tag{i}$$

en donde x_1 es la corriente que pasa por la inductancia, x_2 es la caída de voltaje a través de la capacitancia e $I(t)$ es la corriente suministrada por la fuente externa.

a) Determine una matriz fundamental $\Psi(t)$ para el sistema homogéneo correspondiente a las ecuaciones (i). Consulte el problema 13 de la sección 7.6.

b) Si $I(t) = e^{-t/2}$, determine la solución del sistema (i) que también satisface las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

En los problemas 14 y 15 compruebe que el vector dado es la solución general del sistema homogéneo correspondiente y, a continuación, el sistema no homogéneo. Suponga que $t > 0$.

14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t^{-1}$

15. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t^{-1} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t^2$

16. Sean $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)$ la solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, y $\mathbf{x} = \mathbf{v}(t)$ alguna solución particular del mismo sistema. Considere la diferencia $\mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{v}(t)$ y demuestre que $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, en donde $\mathbf{u}(t)$ es la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

*17. Considere el problema con valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0.$$

a) Con referencia al problema 12 c) de la sección 7.8, demuestre que

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - s)g(s)\, ds.$$

b) También demuestre que

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t - s)]\mathbf{g}(s)\, ds.$$

Compare estos resultados con los del problema 27 de la sección 3.7.

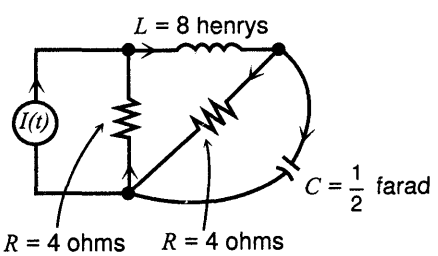


FIGURA 7.9.1 Circuito del problema 13.

BIBLIOGRAFÍA

Los libros que se listan a continuación son representativos de libros introductorios recientes sobre matrices y álgebra lineal.

Anton, H,. *Elementary Linear Algebra* (5a. ed.) (New York; Wiley).

Johnson, L. W., Press, R. D., y Arnold, J. T., *Introduction to Linear Algebra* (2a. ed.)(Reading, Mass; Addison-Wesley).

Kumpel, P. G. y Thorpe, J. A., *Linear Algebra with Applications to Differential Equations* (Philadelphia: Saunders).

Leon, S. J., *Linear Algebra with Applications* (3a. ed.)(New York; Macmillan).

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications* (3a. ed.)(New York; Academic Press).

Capítulo 8 Métodos numéricos

Hasta el momento se han analizado los métodos para resolver ecuaciones diferenciales mediante la aplicación de técnicas analíticas como la integración o los desarrollos en serie. En general, lo importante era hallar una expresión exacta para la solución. Sin embargo en ingeniería y las ciencias existen muchos problemas importantes, en especial no lineales, para los cuales estos métodos no son válidos o son muy complicados. En este capítulo se analiza un enfoque alternativo: el empleo de procedimientos numéricos para obtener una aproximación (a menudo bastante exacta) para la solución exacta de una ecuación diferencial. Los procedimientos que se describen son de fácil ejecución en computadoras personales, así como en algunas calculadoras de bolsillo.

8.1 Método de Euler o de la recta tangente

Para estudiar la evolución y empleo de los procedimientos numéricos, se concentrará la atención principalmente en el problema con valor inicial de primer orden que consta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1}$$

y la condición inicial

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Se supondrá que las funciones f y f_y son continuas sobre algún rectángulo en el plano ty que contiene al punto (t_0, y_0). Entonces, por el teorema 2.4.1, en algún intervalo alrededor de t_0 existe una solución única $y = \phi(t)$ del problema dado. Si la ecuación (1) es no lineal, entonces puede ser difícil determinar el intervalo de existencia de la solución y es posible que no tenga una relación simple con la función f. Sin embargo, en todo el análisis

se supondrá que el problema con valor inicial (1), (2) tiene una solución única en el intervalo de interés.

Por procedimiento numérico de resolución del problema dado con valor inicial se entiende un algoritmo para calcular valores aproximados $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ de la solución ϕ en un conjunto de puntos $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$; ver la figura 8.1.1. Los valores calculados pueden presentarse como una tabla numérica o una gráfica. La solución exacta del problema con valor inicial (1), (2) siempre se denotará por ϕ; entonces el valor de la solución exacta en $t = t_n$ es $\phi(t_n)$. Para un procedimiento numérico dado, los símbolos y_n y y'_n, en donde este último se expresa por $f(t_n, y_n)$, denotarán los valores aproximados de la solución exacta y su derivada en el punto t_n. Con base en la condición inicial se sabe que $\phi(t_0) = y_0$, aunque en general $\phi(t_n) \neq y_n$ para $n \geq 1$. De manera semejante, $\phi'(t_0) = f(t_0, y_0) = y'_0$, pero en general $\phi'(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]$ no es igual a $y'_n = f(t_n, y_n)$ para $n \geq 1$. Además, en todo el análisis se usará un espaciamiento, o tamaño de paso, uniforme h sobre el eje t. Por tanto, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$ y, en general, $t_n = t_0 + nh$.

El primer intento por resolver numéricamente una ecuación diferencial lo realizó Euler en 1768, quien aplicó lo que ahora se conoce como **método de la recta tangente**, o a menudo **método de Euler**. Dado que se conocen t_0 y y_0, también se conoce la pendiente de la recta tangente a la solución en $t = t_0$; a saber $\phi'(t_0) = f(t_0, y_0)$. De donde, es posible construir la recta tangente a la solución en t_0 y obtener en consecuencia un valor aproximado y_1 de $\phi(t_1)$ al desplazarse a lo largo de la recta tangente desde t_0 hasta t_1; ver la figura 8.1.2. Por tanto

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \phi'(t_0)(t_1 - t_0) \\ &= y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0). \end{aligned} \tag{3}$$

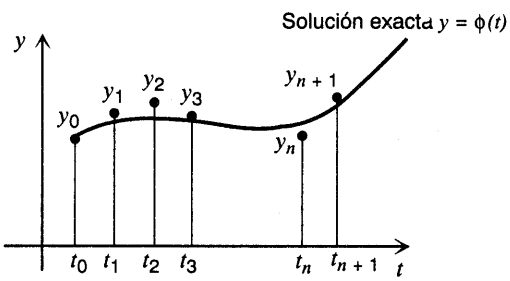


FIGURA 8.1.1 Una aproximación numérica a la solución de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$.

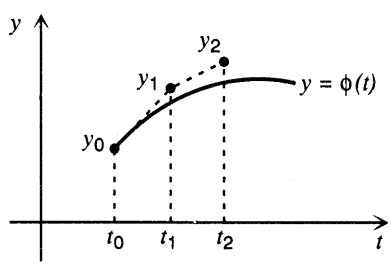


FIGURA 8.1.2 Aproximación de Euler o de la recta tangente.

Una vez que se determina y_1, es posible calcular $y_1' = f(t, y_1)$ y aplicar este valor como la pendiente de una aproximación al moverse de t_1 a t_2. De este modo, se obtiene

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + (y_1')(t_2 - t_1) \\ &= y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Nótese que, en general, $y_1 \neq \phi(t_1)$, de modo que por lo común $f(t_1, y_1)$ no es igual a $f[t_1, \phi(t_1)]$, la pendiente de la solución real en t_1. Si se continúa de esta manera, se usa el valor de y calculado en cada paso para determinar la pendiente de la aproximación para el paso siguiente. La fórmula general para la aproximación de Euler es

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n). \tag{5}$$

Si se supone que entre los puntos $t_0, t_1, t_2, \ldots$, existe un tamaño uniforme de paso h, entonces $t_{n+1} = t_n + h$ y la fórmula de Euler se obtiene en la forma

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ &= y_n + hy_n', \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Antes de analizar con mayor amplitud el método de Euler, se ilustrará su uso en un problema típico con valor inicial. Considérese el problema

$$y' = 1 - t + 4y, \tag{7}$$

$$y(0) = 1. \tag{8}$$

Se usará este ejemplo en todo el capítulo para ilustrar y comparar métodos numéricos diferentes. La ecuación (7) es una ecuación lineal de primer orden y se verifica con facilidad que la solución que satisface la condición inicial (8) es

$$y = \phi(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{3}{16} + \tfrac{19}{16}e^{4t}. \tag{9}$$

Dado que se conoce la solución exacta, no se requieren métodos numéricos para resolver el problema con valor inicial (7), (8). Por otra parte, la disponibilidad de la solución exacta facilitará la determinación de la exactitud de los diversos procedimientos numéricos que se aplicarán en este problema.

Ejemplo 1 Con aplicación de la fórmula de Euler (6) y un tamaño de paso $h = 0.1$, determinar un valor aproximado de la solución $y = \phi(t)$ en $t = 0.2$, para el problema con valor inicial (7), (8).

En este caso, $f(t, y) = 1 - t + 4y$. Para poner en práctica la aproximación de Euler primero se calcula $y_0' = f(0,1) = 5$; entonces,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(0, 1) \\ &= 1 + (0.1)(5) = 1.5. \end{aligned}$$

En el siguiente paso,

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$
$$= 1.5 + (0.1)f(0.1, 1.5)$$
$$= 1.5 + (0.1)(6.9) = 2.19.$$

Puede compararse este resultado con el valor exacto de $\phi(0.2)$ a partir de la ecuación (9), que es $\phi(0.2) = 2.5053299$, correcto hasta 8 dígitos. El error es aproximadamente $2.51 - 2.19 = 0.32$.

Normalmente, un error tan grande (un error porcentual del 12%) no es aceptable. Es posible obtener un mejor resultado al usar un tamaño de paso más pequeño. De esta manera, si se usa $h = 0.05$ y se realizan cuatro pasos para llegar a $t = 0.2$, da el valor aproximado 2.3249 para $\phi(0.2)$ con un error porcentual del 8%. Un tamaño de paso de $h = 0.025$ da un valor de 2.4080117, con un error porcentual del 4%. Si se continúa con los cálculos iniciados en el ejemplo, entonces se obtiene los resultados que se dan en la tabla 8.1.1. De la segunda a la quinta columnas contienen valores aproximados de la solución, usando un tamaño de paso de $h = 0.1, 0.05, 0.025$ y 0.01, respectivamente. En la última columna están los valores correspondientes de $\phi(t)$ hasta ocho dígitos. Aun sin comparar las soluciones aproximadas y exactas, el hecho de que los valores de y calculados con $h = 0.01$ difieran de manera significativa de los calculados con $h = 0.025$, para valores de t tan pequeños como 0.2, indica que el método de Euler con estos tamaños de paso no es satisfactorio para este problema.

Para obtener resultados más exactos, existen en esencia dos posibilidades: una es usar un tamaño de paso todavía más pequeño, con lo que se requieren más pasos de manera correspondiente para cubrir el intervalo dado, la otra es idear una fórmula aproximada más exacta y eficiente para sustituir la ecuación (6). Por lo general, la segunda posibilidad es con mucho la mejor y, posteriormente en este capítulo, se analizan varios algoritmos que son bastante superiores al método de Euler.

Mientras tanto, se observa que es fácil escribir un programa de computadora para efectuar los cálculos necesarios para obtener resultados como los de la tabla 8.1.1. A continua-

TABLA 8.1.1. Comparación de los resultados de la solución numérica de $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$ al aplicar el método de Euler para diferentes tamaños de paso h.

t	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.01$	Exacta
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5475000	1.5761188	1.5952901	1.6090418
0.2	2.1900000	2.3249000	2.4080117	2.4644587	2.5053299
0.3	3.1460000	3.4333560	3.6143837	3.7390345	3.8301388
0.4	4.4744000	5.0185326	5.3690304	5.6137120	5.7942260
0.5	6.3241600	7.2901870	7.9264062	8.3766865	8.7120041
0.6	8.9038240	10.550369	11.659058	12.454558	13.052522
0.7	12.505354	15.234032	17.112430	18.478797	19.515518
0.8	17.537495	21.967506	25.085110	27.384136	29.144880
0.9	24.572493	31.652708	36.746308	40.554208	43.497903
1.0	34.411490	45.588400	53.807866	60.037126	64.897803

ción se describe un programa de este tipo: las instrucciones específicas pueden escribirse en cualquier lenguaje de programación de alto nivel.

Método de Euler

Paso 1. **definir** $f(t, y)$
Paso 2. **entrada** valores iniciales t_0 y y_0
Paso 3. **entrada** tamaño de paso h
y número de pasos n
Paso 4. **salida** t_0 y y_0
Paso 5. **para** j desde 1 hasta n, **hacer**
Paso 6. $k1 = f(t, y)$
$y = y + h * k1$
$t = t + h$
Paso 7. **salida** t y y
Paso 8. **fin**

La salida de este algoritmo pueden ser números listados en la pantalla o impresos mediante una impresora. De manera alternativa, es posible presentar gráficamente los resultados. De hecho, como se mencionó en el capítulo 1, existen varios paquetes de software excelentes que hacen esto de manera automática; puede ser muy útiles para visualizar el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Al aplicar un procedimiento numérico como el método de Euler, siempre debe tenerse presente la pregunta de si los resultados son lo suficientemente exactos para que sean útiles. En el ejemplo anterior, la exactitud de los resultados numéricos pudo determinarse directamente por comparación con la solución exacta. Por supuesto, si ha de emplearse un procedimiento numérico, por lo general no se dispone de la solución exacta. En la siguiente sección se presentará un análisis preliminar de los errores en los procedimientos numéricos, sus causas y cómo es posible estimarlos. Por el momento, se desea señalar dos métodos para deducir la fórmula (6) de Euler, que sugieren maneras de obtener fórmulas mejores y también auxiliar en la investigación del error al aplicar la ecuación (6).

En primer lugar, en virtud de que $y = \phi(t)$ es una solución del problema con valor inicial (1), (2), al integrar desde t_n hasta t_{n+1} se obtiene

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t)\, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\, dt$$

o bien,

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{10}$$

La integral de la ecuación (10) se representa geométricamente como el área bajo la curva entre $t = t_n$ y $t = t_{n+1}$, en la figura 8.1.3. Si se aproxima a la integral al sustituir $f[t, \phi(t)]$ por su valor $f[t_n, \phi(t_n)]$ en $t = t_n$, entonces se aproxima el área real por el área del rectángulo sombreado. De esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(t_{n+1}) &\cong \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)](t_{n+1} - t_n) \\ &= \phi(t_n) + hf[t_n, \phi(t_n)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Por último para obtener una aproximación Y_{n+1}, se efectúa una segunda aproximación al sustituir $\phi(t_n)$ por su valor aproximado y_n de la (11). Esto da la fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. Es posible obtener una fórmula más precisa al aproximar con mayor exactitud la integral. Esto se analiza en la sección 8.3

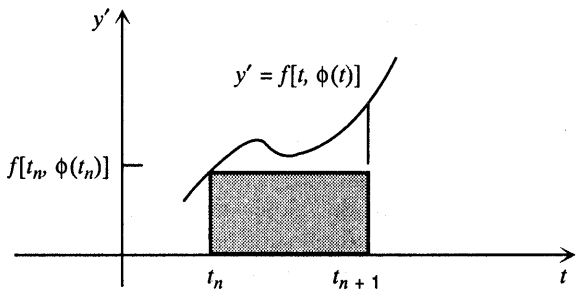


FIGURA 8.1.3 Deducción integral del método de Euler.

En segundo lugar, supóngase que se afirma que la solución $y = \phi(t)$ tiene una serie de Taylor alrededor del punto t_n; entonces

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

o bien,

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)]h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots. \tag{12}$$

Si la serie se termina al cabo de los dos primeros términos y si $\phi(t_{n+1})$ y $\phi(t_n)$ se sustituyen por sus valores aproximados y_{n+1} y y_n, de nuevo se obtiene la fórmula de Euler (6). Si se conservan más términos de la serie, se obtiene una fórmula más exacta. Esto se analiza en la sección 8.3. Además al usar una serie de Taylor con un resto es posible estimar la magnitud del error en la fórmula. Esto se analiza en la siguiente sección.

Problemas

En muchos de los problemas de este capítulo se requiere efectuar cálculos numéricos bastante extensos. La cantidad de cálculos razonable para el lector depende mucho del tipo de equipo de cómputo con que cuente. Algunos pasos de los cálculos solicitados pueden llevarse a cabo en casi cualquiera calculadora de bolsillo e incluso a mano, si es necesario. Para hacer más es aconsejable que cuente con una calculadora programable, aunque para algunos problemas puede ser necesaria por lo menos una microcomputadora.

Tenga presente también que los resultados numéricos pueden variar en alguna medida, dependiendo de la forma en que esté contenido el programa y de la manera en que la computadora ejecuta los pasos aritméticos, redondeos, etcétera. Variaciones menores en la última cifra decimal pueden deberse a esas causas y no necesariamente indican que sucede algo erróneo. En la mayoría de los casos, las respuestas que se dan al final del libro registra hasta seis dígitos, aunque en los cálculos intermedios se conservaran más dígitos.

En los problemas 1 y 2:

a) Encuentre valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial, en $t = 0.1, 0.2, 0.3$ y 0.4 al aplicar el método de Euler con $h = 0.1$.

b) Repita el inciso a) con $h = 0.05$. Compare los resultados con los del inciso a).

c) Repita el inciso a) con $h = 0.025$. Compare los resultados con los de los incisos a) y b).
d) Encuentre la solución $y = \phi(t)$ del problema dado y evalúe $\phi(t)$ en $t = 0.1, 0.2, 0.3$ y 0.4. Compare estos valores con los resultados de los incisos a), b) y c).

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$

En cada uno de los problemas 3 a 8, halle valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial, en $t = t_0 + 0.1$, $t_0 + 0.2$, $t_0 + 0.3$ y $t_0 + 0.4$.
a) Aplicar el método de Euler con $h = 0.1$.
b) Aplicar el método de Euler con $h = 0.05$.
c) Aplicar el método de Euler con $h = 0.025$.

3. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
5. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
6. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
7. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(1) = 2$
8. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

En cada uno de los problemas 9 a 12, encuentre un valor aproximado de la solución del problema dado con valor inicial, en $t = t_0 + 1$.
a) Aplicar el método de Euler con $h = 0.025$.
b) Aplicar el método de Euler con $h = 0.0125$.

9. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
10. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
11. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
12. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

*13. Considere el problema con valor inicial

$$y' = 3t^2/(3y^2 - 4), \qquad y(1) = 0.$$

a) Aplique la fórmula de Euler (3) con $h = 0.1$ para obtener valores aproximados de la solución en $t = 1.2, 1.4, 1.6$ y 1.8.
b) Repita el inciso a) con $h = 0.05$.
c) Compare los resultados de los incisos a) y b). Observe que son razonablemente próximos para $t = 1.2$, 1.4 y 1.6, pero que difieren bastante para $t = 1.8$. Observe también (a partir de la ecuación diferencial) que la recta tangente a la solución es paralela al eje y cuando $y = \pm 2/\sqrt{3} \cong \pm 1.155$. Explique cómo esto puede provocar esa diferencia en los valores calculados.

14. Complete los cálculos hasta $t = 0.6$ que dan a entradas de las columnas dos y tres de la tabla 8.1.1.

*15. Use tres términos de la serie de Taylor que se da en la ecuación (12) y considere $h = 0.1$ para determinar valores aproximados de la solución del ejemplo ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$, en $t = 0.1$ y 0.2. Compare los resultados con los que se obtiene al aplicar el método de Euler y los valores exactos.
Sugerencia: Si $y' = f(t, y)$, ¿a qué es igual y''?

*16. Es posible demostrar que con condiciones adecuadas para f la solución numérica generada por el método de Euler para el problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ convergen a la solución exacta a medida que decrece el tamaño h del paso. Esto se ilustra mediante el siguiente ejemplo. Considere el problema con valor inicial

$$y' = 1 - t + y, \qquad y(t_0) = y_0.$$

a) Demuestre que la solución exacta es $y = \phi(t) = (y_0 - t_0)e^{(t-t_0)} + t$.

b) Demuestre al aplicar la fórmula de Euler, que

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - ht_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

c) Observe que $y_1 = (1 + h)(y_0 - t_0) + t_1$ demuestre que

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 - t_0) + t_n.$$

d) Considere un punto fijo $t > t_0$, y para una n dada elija $h = (t - t_0)/n$. Entonces, para cualquier n, $t_n = t$. También observe que $h \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se se sustituye h en la fórmula precedente y se hace que $n \to \infty$ da el resultado deseado.
Sugerencia: $\lim_{n\to\infty}(1 + a/n)^n = e^a$.

*17. Aplique la técnica analizada en el problema 16 para demostrar que la solución aproximada obtenida con el método de Euler converge a la solución exacta en cualquier punto fijo, cuando $h \to 0$, para cada uno de los siguientes problemas.

a) $y' = y, \quad y(0) = 1$

b) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$ *Sugerencias*: $y_1\ (1 + 2h)/2 + 1/2$

c) $y = \frac{1}{2} - t + 2y, \quad y(0) = 1$ *Sugerencias*: $y_1 = (1 + 2h) + t_1/2$

18. Un procedimiento alternativo para construir la solución $y = \phi(t)$ del problema con valor inicial $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ es el método de iteración. Si se integra la ecuación diferencial desde t_0 hasta t se obtiene

$$\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, \phi(s)]\, ds. \tag{i}$$

Si, en el segundo miembro de la ecuación (i) se sustituye $\phi(s)$ por una función particular, es posible evaluar la integral y obtener una nueva función ϕ. Esto sugiere el procedimiento de interacción

$$\phi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, \phi_n(s)]\, ds. \tag{ii}$$

Con una elección inicial de $\phi_0(t)$, se puede utilizar la ecuación (ii) para generar una sucesión de funciones $\phi_n(t)$ que se aproxime a la solución exacta y, con condiciones adecuadas sobre $f(t, y)$, en realidad converge a $\phi(t)$ cuando $n \to \infty$. De hecho, se utilizó este procedimiento de iteración para establecer la existencia de una solución del problema con valor inicial de la sección 2.11. Para calcular realmente $\phi(t)$ en general este procedimiento es pesado para manejar ya que puede ser difícil, si no imposible, evaluar la integral de $f[s, \phi_n(S)]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Al tomar $\phi_0(t) = 1$, determine $\phi_3(t)$ para cada uno de los siguientes problemas con valor inicial. Calcule también $\phi_2(0.4)$ y $\phi_3(0.4)$ y compare con el resultado obtenido al aplicar el método de Euler.

a) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \frac{1}{2} - t + 2y, \quad y(0) = 1$

c) $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1;$ calcule sólo $\phi_2(t)$

8.2 Errores en los procedimientos numéricos

La aplicación de un procedimiento numérico, como la fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \qquad t_n = t_0 + nh, \tag{1}$$

para resolver un problema con valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

origina varias preguntas que deben contestarse antes de poder aceptar como satisfactoria la solución numérica aproximada. Una de estas preguntas es la referente a la **convergencia**. Es decir, a medida que el tamaño h del paso tiende a cero, ¿los valores de la solución numérica $y_1, y_2, y_3, \ldots$, tienden a los valores correspondientes de la solución exacta? Si se supone que la respuesta es afirmativa, queda la importante pregunta práctica de cuán rápido la aproximación numérica tiende a la solución exacta. En otras palabras, ¿qué tan pequeño debe ser el tamaño del paso a fin de garantizar un nivel de exactitud dado? Se desea usar un tamaño de paso lo bastante pequeño como para asegurar la exactitud requerida, pero no demasiado pequeño. Un tamaño de paso innecesariamente pequeño retarda los cálculos, los hace más costosos y, en algunos casos, incluso puede provocar pérdida de exactitud.

Al resolver numéricamente un problema con valor inicial existen dos fuentes de error fundamentales. En primer lugar, supóngase que la computadora con la que se cuenta es capaz de efectuar todos los cálculos con completa exactitud; es decir, es posible retener una infinidad de cifras decimales. La diferencia E_n entre la solución exacta $y = \phi(t)$ y la solución aproximada del problema con valor inicial (2) se expresa por

$$E_n = \phi(t_n) - y_n, \tag{3}$$

y se conoce como **error global por truncamiento**. Este error surge por dos causas: 1) en cada paso se aplica una fórmula aproximada para determinar Y_{n+1}; 2) los datos de entrada en cada paso no concuerdan con la solución exacta ya que, en general, $\phi(t_n)$ no es igual a y_n. Si se supone que los datos de entrada son correctos, entonces el único error al avanzar un paso se debe al uso de una fórmula aproximada. Este error se denomina **error local por truncamiento** e_n.

En segundo lugar, debido a las limitaciones de todas las computadoras, en la práctica es imposible calcular de manera exacta y_{n+1} a partir de la fórmula dada. Por tanto, se tiene un error por redondeo debido a falta de exactitud de cálculo. Por ejemplo, si se utiliza una computadora que sólo puede llevar ocho dígitos y y_0 es 1.017325842, entonces es necesario redondear los dos últimos dígitos, con lo que de inmediato se introduce un error en el cálculo de y_1. De manera alternativa, si $f(t, y)$ comprende funciones como la logarítmica o la exponencial, al efectuar estas operaciones se tiene un error por redondeo. Como para el error por truncamiento, es posible hablar del error local por redondeo y del error global por redondeo. El **error global por redondeo** R_n se define como

$$R_n = y_n - Y_n, \tag{4}$$

en donde Y_n es el valor *realmente calculado* mediante el procedimiento numérico dado; por ejemplo, la fórmula de Euler (1).

El valor absoluto del error total al calcular $\phi(t_n)$ queda dado por

$$|\phi(t_n) - Y_n| = |\phi(t_n) - y_n + y_n - Y_n|. \tag{5}$$

Si se aplica la desigualdad del triángulo, $|a + b| \leq |a| + |b|$, a partir de la ecuación (5) se obtiene

$$\begin{aligned} |\phi(t_n) - Y_n| &\leq |\phi(t_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\leq |E_n| + |R_n|. \end{aligned} \tag{6}$$

Por tanto, el error total está acotado por la suma de los valores absolutos de los errores por truncamiento y por redondeo. Para los procedimientos numéricos que se analizan en este libro, es posible obtener estimaciones útiles del error por truncamiento. Sin embargo, el análisis se restringe principalmente al error local por truncamiento, que es algo más sencillo. Es evidente que el error por redondeo es de naturaleza más aleatoria; depende del tipo de computadora que se use, del orden en que se efectúen los cálculos, del método de redondeo, etcétera. Aunque un análisis del error por redondeo rebasa los límites de este libro, es posible decir más sobre él de lo que podría esperarse en principio (ver, por ejemplo, la obra de Henrici). Algunos de los peligros del error por redondeo se analizan en los problemas 13 a 15 y en la sección 8.5.

Error local por truncamiento para el método de Euler. Supóngase que la solución $y = \phi(t)$ del problema con valor inicial (2) tiene una segunda derivada continua en el intervalo de interés. A fin de asegurar esto, es posible suponer que f, f_t y f_y son continuas en la región de interés. Obsérvese que si f tiene estas propiedades y si ϕ es una solución del problema con valor inicial (2), entonces

$$\phi'(t) = f[t, \phi(t)]$$

y, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t) \\ &= f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]f[t, \phi(t)]. \end{aligned} \tag{7}$$

Dado que el segundo miembro de esta ecuación es continuo, ϕ'' también es continua.

Entonces, si se aplica una serie de Taylor con un resto para desarrollar ϕ alrededor de t_n, se obtiene

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2, \tag{8}$$

en donde $\bar{t}_n$ es algún punto en el intervalo $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Al restar la ecuación (1) de la (8) y observar que $\phi(t_n + h) = \phi(t_{n+1})$ y $\phi'(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]$, se encuentra que

$$\phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = [\phi(t_n) - y_n] + h\{f[t_n, \phi(t_n)] - f(t_n, y_n)\} + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \tag{9}$$

Para calcular el error local por truncamiento se supone que los datos del n–ésimo paso son correctos, es decir, que $y_n = \phi(t_n)$. Entonces, de inmediato se obtiene a partir de la ecuación (9) que el error local por truncamiento e_{n+1} es

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \tag{10}$$

Por tanto, el error local por truncamiento para el método de Euler es proporcional al cuadrado del tamaño de paso h y a la segunda derivada de ϕ. Para el intervalo fijo $a = t_0 \leq t \leq b$, el valor absoluto del error local por truncamiento para cualquier paso está acotado por $Mh^2/2$, en donde M es el máximo de $|\phi''(t)|$ sobre $a \leq t \leq b$. La dificultad primaria al

estimar el error local por truncamiento es la obtención de una estimación exacta de M. Sin embargo, nótese que M es independiente de h; de donde, si se reduce h en un factor de 1/2, se reduce la cota del error en un factor de 1/4, y si se reduce h en un factor de 1/10, se reduce la cota del error en un factor de $\frac{1}{100}$.

Más importante que el error local por truncamiento es el error global por truncamiento E_n. A pesar de ello, una estimación del error local por truncamiento proporciona cierta comprensión del procedimiento numérico y un medio para comparar la exactitud de diferentes procedimientos numéricos. El análisis para estimar E_n es más difícil que para e_n. Sin embargo, si se conoce el error local por truncamiento se puede hacer una estimación *intuitiva* del error global por truncamiento en un $\bar{t} > t_0$ fijo como se muestra a continuación. Supóngase que se requieren n pasos para ir de t_0 a $\bar{t} = t_0 + nh$. En cada paso el error es cuando mucho $Mh^2/2$; por tanto, el error en n pasos es cuando mucho $nMh^2/2$. Si se observa que $n = (\bar{t} - t_0)/h$, se encuentra que el error global por truncamiento para el método de Euler, al ir de t_0 a $\bar{t}$, está acotado por

$$n\frac{Mh^2}{2} = (\bar{t} - t_0)\frac{Mh}{2}. \tag{11}$$

Aunque este argumento no está completo, ya que no se toma en cuenta el efecto que un error en un paso tendrá en los pasos subsiguientes, en el problema 8 se demuestra que en cualquier intervalo finito el error global por truncamiento al usar el método de Euler no es superior a una constante multiplicada por h. Por tanto, al ir de t_0 a un punto fijo $\bar{t}$, el error global por truncamiento puede reducirse al hacer más pequeño el tamaño h del paso. Desafortunadamente, éste no es el final de la historia. Si h se hace demasiado pequeño; es decir, si para ir de t_0 a $\bar{t}$ se utilizan demasiados pasos, el error global por redondeo puede volverse más importante que el error global por truncamiento. En la práctica, es necesario considerar las dos fuentes de error y elegir un h adecuado de modo que ninguno de los dos sea demasiado grande. Esto se analiza con mayor detalle en la sección 8.5. En los problemas 9 y 11 se analiza un procedimiento práctico para mejorar la exactitud del cálculo, que requiere cómputos con dos tamaños de paso diferentes.

Como ejemplo de cómo es posible aplicar el resultado (10), si se cuenta con información *a priori* acerca de la solución del problema dado con valor inicial, considérese el ejemplo ilustrativo

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1 \tag{12}$$

sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Sea $y = \phi(t)$ la solución del problema con valor inicial (12). Entonces $\phi'(t) = 1 - t + 4\phi(t)$ y

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= -1 + 4\phi'(t)\\ &= -1 + 4[1 - t + 4\phi(t)]\\ &= 3 - 4t + 16\phi(t).\end{aligned}$$

Por la ecuación (10),

$$e_{n+1} = \frac{3 - 4\bar{t}_n + 16\phi(\bar{t}_n)}{2}h^2, \qquad t_n < \bar{t}_n < t_n + h. \tag{13}$$

Si se observa que $|3 - 4\bar{t}_n| \leq 3$ sobre $0 \leq t \leq 1$, una cota aproximada para e_{n+1} queda dada por

$$e_{n+1} \leq \left[\frac{3}{2} + 8 \max_{0 \leq t \leq 1} |\phi(t)|\right] h^2. \tag{14}$$

Dado que el segundo miembro de la ecuación (14) no depende de n, esto proporciona una cota uniforme, aunque no necesariamente exacta, para el error en cualquier paso, si se conoce una cota para $|\phi(t)|$ sobre $0 \leq t \leq 1$. Para este problema, $\phi(t) = (4t - 3 + 19e^{4t})/16$.

Si se sustituye $\phi(\bar{t}_n)$ en la (13) se obtiene

$$e_{n+1} = \frac{19e^{4\bar{t}_n}h^2}{2}, \qquad t_n < \bar{t}_n < t_n + h. \tag{15}$$

La aparición del factor 19 y el rápido crecimiento de e^{4t} explican por qué los resultados de la sección anterior con $h = 0.1$ no fueron muy exactos. Por ejemplo, el error en el primer paso es

$$e_1 = \phi(t_1) - y_1 = \frac{19e^{4\bar{t}_0}(0.01)}{2}, \qquad 0 < \bar{t}_0 < 0.1.$$

Resulta evidente que e_1 es positivo y, como $e^{4\bar{t}_0} < e^{0.4}$, se tiene

$$e_1 \leq \frac{19e^{0.4}(0.01)}{2} \cong 0.142. \tag{16}$$

Nótese también que $e^{4\bar{t}_0} > 1$; de donde, $e_1 > 19(0.01)/2 = 0.095$. El error real es 0.1090418. De la ecuación (15) se concluye que el error empeora cada vez más al crecer t; esto se muestra con claridad con los resultados de la tabla 8.1.1. Un cálculo semejante para una cota del error local por truncamiento al ir de 0.4 a 0.5 da

$$0.47 \cong \frac{19e^{1.6}(0.01)}{2} \leq e_5 \leq \frac{19e^{2}(0.01)}{2} \cong 0.7.$$

Por supuesto, en la práctica no se conocerá la solución ϕ del problema dado con valor inicial. Sin embargo, si se cuenta con cotas sobre las funciones f, f_t y f_y es posible obtener una cota para $|\phi''(t)|$, aunque no necesariamente una exacta, a partir de la ecuación (7). Entonces, es posible usar la ecuación (10) para estimar el error local por truncamiento. Incluso aunque no sea posible hallar una cota útil para $|\phi''(t)|$, todavía se sabe que para el método de Euler el error local por truncamiento y el error global por truncamiento están acotados por una constante multiplicada por h^2 y por una constante multiplicada por h, respectivamente.

Esta sección concluye con dos comentarios prácticos basados en la experiencia.

1. Una manera de estimar si el error por truncamiento es suficientemente pequeño es, después de completar los cálculos con un h dado, repetir los cálculos utilizando un tamaño de paso $h/2$ (ver los problemas 9 y 11). Si los cambios son mayores que lo aceptable, es necesario usar un tamaño de paso más pequeño, un procedimiento numérico más exacto o quizá las dos cosas. En las siguientes secciones se analizan procedimientos más exactos. En la tabla 8.1.1 se dieron los resultados del ejemplo ilustrativo usando el método de Euler con diferentes tamaños de paso. Estos resultados muestran

que incluso con $h = 0.01$ no es posible obtener correctamente los tres primeros dígitos en $t = 0.10$. Esto podía esperarse sin conocer la solución exacta, ya que los resultados en $t = 0.1$ para $h = 0.025$ y $h = 0.01$ difieren en el tercer dígito.

2. Una vez que se han completado los cálculos usando aritmética de precisión simple, puede estimarse el efecto del error por redondeo al repetir los cálculos con una aritmética de doble precisión. De nuevo, si los cambios son mayores que lo aceptable, es necesario conservar más dígitos en los cálculos o aplicar un método más exacto. En los problemas 13 a 15 se abordan algunas de las dificultades que se presentan debido a los errores por redondeo.

Problemas

En los problemas 1 y 2 calcule el error local por truncamiento en términos de la solución exacta $y = \phi(t)$ si se aplica el método de Euler. Obtenga una cota para e_{n+1} en términos de t y $\phi(t)$ que sea válida sobre el intervalo $0 \le t \le 1$. Al usar la solución exacta, obtenga una cota más precisa del error para e_{n+1}. Para $h = 0.1$, calcule una cota para e_1 y compárela con el error real en $t = 0.1$. Calcule también una cota para el error e_4 del cuarto paso.

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

2. $y' = \frac{1}{2} - t + 2y, \quad y(0) = 1$

En los problemas 3 a 6, obtenga una fórmula para el error local por truncamiento en términos de t y de la solución exacta $\phi(t)$, si se aplica el método de Euler.

3. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

4. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$

5. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$

6. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

7. Considere el problema con valor inicial

$$y' = \cos 5\pi t, \quad y(0) = 1.$$

a) Determine la solución exacta $y = \phi(t)$ y trace una gráfica de $y = \phi(t)$ para $0 \le t \le 1$. Use una escala para la ordenada de modo que $1/5\pi$ mida alrededor de 5 pulg.

b) Determine valores aproximados de $\phi(t)$ en $t = 0.2$, 0.4 y 0.6, aplicando el método de Euler con $h = 0.2$. Trace una gráfica con línea discontinua para la solución aproximada y compárela con la gráfica de la solución exacta.

c) Repita el cálculo del inciso b) para $0 \le t \le 0.4$, pero tome $h = 0.1$.

d) Demuestre mediante el cálculo del error local por truncamiento que ninguno de estos tamaños de paso es suficientemente pequeño. Determine el valor de h para asegurar que el error local por truncamiento sea menor que 0.05 en todo el intervalo $0 \le t \le 1$. Que se requiera un valor pequeño de h resulta del hecho de que más $\phi''(t)$ es grande o, en términos generales, que la solución es considerablemente oscilatoria.

*8. En este problema se analiza el error global por truncamiento asociado con el método de Euler para el problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Si se supone que las funciones f y f_y son continuas en una región R del plano que incluye al punto (t_0, y_0), es posible demostrar que existe una constante L tal que $|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| < L|y - \tilde{y}|$, en donde (t, y) y $(t, \tilde{y})$ son dos puntos cualquiera en R que tiene la misma coordenada t (ver el problema 11 de la sección 2.11). Además, se supone que f_t es continua, de modo que la segunda derivada de la función ϕ es continua.

a) Aplique la ecuación (9) para demostrar que

$$|E_{n+1}| \le |E_n| + h|f[t_n, \phi(t_n)] - f(t_n, y_n)| + \tfrac{1}{2}h^2|\phi''(\bar{t}_n)| \le \alpha|E_n| + \beta h^2, \tag{i}$$

en donde $\alpha = 1 + hL$ y $\beta = \text{máx } \phi''(t)/2$ sobre $t_0 \le t \le t_n$.

b) Si se acepta sin demostración que si $E_0 = 0$ y si $|E_n|$ satisface la ecuación (i), entonces $|E_n| \le \beta h^2(\alpha^n - 1)/(\alpha - 1)$ para $\alpha \ne 1$, demuestre que

$$|E_n| \le \frac{(1 + hL)^n}{L}\beta h. \tag{ii}$$

La ecuación (ii) da una cota para $|E_n|$ en términos de h, L, n y β. Observe que para h fijo, esta cota del error aumenta con la n creciente; es decir, la cota de error aumenta con la distancia al punto de partida t_0.

c) Demuestre que $(1 + hL)^n \le e^{nhL}$, de donde que

$$|E_n| \le \frac{e^{nhL} - 1}{L}\beta h$$

$$\le \frac{e^{(t_n - t_0)L} - 1}{L}\beta h.$$

Para un punto fijo $\bar{t} = t_0 + nh$ (es decir, nh es constante y $h = (\bar{t} - t_0)/n$) esta cota del error es de la forma constante multiplicada por h y tiende a cero cuando $h \to 0$ también observe que para $nhL = (\bar{t} - t_0)L$ pequeño el segundo miembro de la ecuación anterior es aproximadamente $nh^2\beta = (\bar{t} - t_0)\beta h$, lo que se obtuvo en la ecuación (11) con un argumento intuitivo.

9. **Método de extrapolación de Richardson.** Sea $y = \phi(t)$ la solución del problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Según se analizó en el texto (ver también el inciso c) del problema (8)), al aplicar el método de Euler para ir desde t_0 hasta un punto fijo $\bar{t} = t_0 + nh$, el error global por truncamiento está acotado por una constante multiplicada por h. Con mayor precisión, es posible demostrar que $\phi(\bar{t}) = y_n(h) + Ch + M(h)$, en donde C es una constante que depende de la ecuación diferencial y de la longitud del intervalo, pero no de h y $M(h)$ es una función proporcional a h^2. La dependencia de y_n con respecto a h se indica al escribir $y_n(h)$. El error es $Ch + M(h)$. Suponga ahora que el cálculo se repite usando un tamaño de paso igual a $h/2$. Como ahora se requiere $2n$ pasos para llegar a $\bar{t}$, se tiene $\phi(\bar{t}) = y_{2n}(h/2) + Ch/2 + M(h/2)$. Al despejar C de la primera ecuación y sustituirla en la segunda ecuación, demuestre que

$$\phi(\bar{t}) \cong y_{2n}(h/2) + [y_{2n}(h/2) - y_n(h)], \tag{i}$$

en donde se han despreciado los términos proporcionales a h^2. Por tanto, esta nueva aproximación para $\phi(\bar{t})$ tiene un error proporcional a h^2, en comparación con un error proporcional a h para un cálculo simple con el método de Euler. También es posible aplicar la ecuación (i) para estimar el error asociado con un tamaño de paso de $h/2$, es decir,

$$\phi(\bar{t}) - y_{2n}(h/2) \cong y_{2n}(h/2) - y_n(h). \tag{ii}$$

Este procedimiento para calcular una aproximación mejorada para $\phi(\bar{t})$ en términos de $y_n(h)$ y de $y_{2n}(h/2)$ se llama aproximación diferida de Richardson hacia el límite o método de extrapolación de Richardson. L. F. Richardson lo aplicó por primera vez en 1927.

10. Con aplicación de la técnica analizada en el problema 9, determine nuevas estimaciones del valor de la solución exacta $y = \phi(t)$ en $t = 0.2$, al hacer uso de los resultados para $h = 0.2$ y $h = 0.1$ con el método de Euler, para cada uno de los siguientes problemas con valor inicial. Cuando sea posible, compare los resultados con los valores de la solución exacta en $t = 0.2$.
    a) $y' = 2y$, $y(0) = 1$ b) $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$
    c) $y' = \frac{1}{2} - t + 2y$, $y(0) = 1$ d) $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$
11. Se dice que un método numérico tiene exactitud de r-ésimo orden si el error en $\bar{t} = t_0 + nh$ es proporcional a h^r; o, con más precisión, si $\phi(\bar{t}) = y_n(h) + Ch^r + M(h)$, en donde la constante C depende de la ecuación diferencial y de $\bar{t}$ pero es independiente de h, y $M(h)$ es proporcional a h^{r+1}. Por tanto, el método de Euler tiene una exactitud de primer orden. Siguiendo el procedimiento del problema 9, demuestre que una estimación mejorada de $\phi(\bar{t})$ queda dada por $\phi(\bar{t}) = y_{2n}(h/2) + [y_{2n}(h/2) - y_n(h)]/(2^r - 1)$.
12. Considere el problema ejemplo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$. Con aplicación del método de extrapolación de Richardson (problema 9) y si se utilizan los valores aproximados de $\phi(1)$ para $h = 0.1$, 0.05 y 0.025 dados en el ejemplo 8.1.1, obtenga nuevas de $\phi(1)$ para
    a) $h = 0.1$ y $h = 0.05$ b) $h = 0.05$ y $h = 0.025$
    Comparar los resultados con el valor de la solución exacta.
13. Use un tamaño de paso $h = 0.05$ y el método de Euler, pero sólo conserve tres dígitos en todos los cálculos, para determinar valores aproximados de la solución en $t = 0.05$, 0.1, 0.15 y 0.2 para cada uno de los siguientes problemas con valor inicial
    a) $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$ b) $y' = \frac{1}{2} - t + 2y$, $y(0) = 1$
    c) $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$
    Compare los resultados con los obtenidos en la sección anterior. Las pequeñas diferencias entre algunos de aquellos resultados redondeados hasta tres dígitos y los de este problema de deben al error por redondeo; éste sería importante si el cálculo muchos pasos.
14. El siguiente problema ilustra un peligro que se presenta debido al error por redondeo cuando se restan números casi iguales y la diferencia se multiplica por un número grande. Evalúe la cantidad

$$1000 \cdot \begin{vmatrix} 6.010 & 18.04 \\ 2.004 & 6.000 \end{vmatrix}$$

    como sigue.
    a) Primero redondee cada elemento del determinante a dos dígitos.
    b) Primero redondee cada elemento del determinante a tres dígitos.
    c) Retenga los cuatro dígitos. Compare el valor exacto con los resultados de a) y b).
15. En general la ley distributiva $a(b - c) = ab - ac$ no se cumple si los productos se redondean hasta un número más pequeño de dígitos. Para demostrar esto en un caso específico, tome $a = 0.22$, $b = 3.19$ y $c = 2.17$. Después de cada multiplicación redondee el último dígito.

8.3 Mejoras en el método de Euler

Se ha visto que el método de Euler no es suficientemente exacto para ser un procedimiento eficaz para resolver problemas, de modo que resulta conveniente desarrollar métodos más eficientes. Considérese el problema con valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

y considérese que $y = \phi(t)$ denota su solución. Recuérdese por la ecuación (10) de la sección 8.1 que al integrar la ecuación diferencial dada desde t_n hasta t_{n+1} se obtiene

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{2}$$

Se obtiene la fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{3}$$

al sustituir $f[t, \phi(t)]$ en la ecuación (2) por su valor aproximado $f(t_n, y_n)$ en el extremo izquierdo del intervalo de integración.

Es posible obtener una fórmula aproximada mejor si el integrando de (2) se aproxima con más exactitud. Una manera de hacerlo es sustituir el integrando por el promedio de sus valores en los dos puntos extremos; a saber, $\{f[t_n, \phi(t_n)] + f[t_{n+1}, \phi(t_{n+1})]\}/2$. Esto equivale a aproximar el área bajo la curva de la figura 8.3.1 entre $t = t_n$ y $t = t_{n+1}$ por el área del trapecio sombreado. Además, $\phi(t_n)$ y $\phi(t_{n+1})$ se sustituyen por sus valores respectivos aproximados y_n y y_{n+1}. De esta manera se obtiene, de la ecuación (2),

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} h. \tag{4}$$

En virtud de que la incógnita y_{n+1} aparece como uno de los argumentos de f en el segundo miembro de (4), a menudo es bastante difícil despejar y_{n+1} de esta ecuación. Se puede

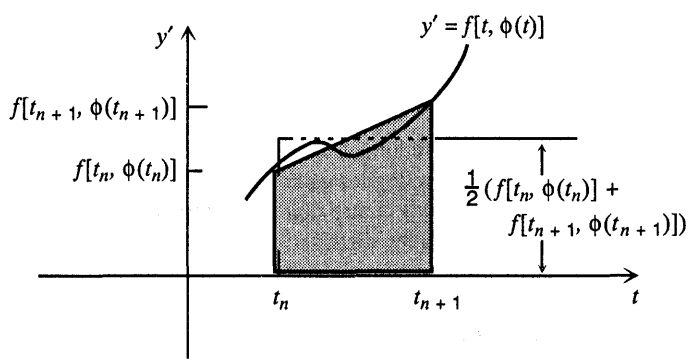


FIGURA 8.3.1 Deducción del método mejorado de Euler.

superar esta dificultad al sustituir y_{n+1} en el segundo miembro por el valor obtenido al aplicar la fórmula de Euler (3). Por tanto,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)]}{2} h$$

$$= y_n + \frac{y'_n + f(t_n + h, y_n + hy'_n)}{2} h, \tag{5}$$

en donde t_{n+1} se ha sustituido por $t_n + h$.

La ecuación (5) da una fórmula para calcular y_{n+1}, el valor aproximado de $\phi(t_{n+1})$, en términos de los datos en t_n. Esta fórmula se conoce como **fórmula mejorada de Euler** o **fórmula de Heun**. La ecuación (5) representa una mejora con respecto a la fórmula de Euler (3) por el hecho de que el error local por truncamiento al usar la ecuación (5) es proporcional a h^3, mientras que para el método de Euler es proporcional a h^2. Este error estimado para la fórmula mejorada de Euler se establece en el problema 15. También es posible demostrar que, para un intervalo finito, el error global por truncamiento para la fórmula mejorada de Euler está acotado por una constante multiplicada por h^2. Nótese que se logra mayor exactitud a expensas de más trabajo de cálculo, ya que ahora es necesario evaluar $f(t, y)$ dos veces para ir de t_n a t_{n+1}.

Si $f(t, y)$ sólo depende de t y no de y, entonces resolver la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ se reduce a integrar $f(t)$. En este caso la fórmula mejorada de Euler (5) queda

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}[f(t_n) + f(t_n + h)], \tag{6}$$

que es precisamente la regla del trapecio para la integración numérica.

Ejemplo 1 Aplicar la fórmula mejorada de Euler (5) para calcular valores aproximados de la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{7}$$

Para este problema, $f(t, y) = 1 - t + 4y$; de donde,

$$y'_n = 1 - t_n + 4y_n$$

y

$$f(t_n + h, y_n + hy'_n) = 1 - (t_n + h) + 4(y_n + hy'_n).$$

Además, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $y'_0 = 1 - t_0 + 4y_0 = 5$. Si $h = 0.1$,

$$f(t_0 + h, y_0 + hy'_0) = 1 - 0.1 + 4[1 + (0.1)(5)] = 6.9.$$

Entonces, por la ecuación (5),

$$y_1 = 1 + (0.5)(5 + 6.9)(0.1) = 1.595. \tag{8}$$

En el segundo paso es necesario calcular

$$y_1' = 1 - 0.1 + 4(1.595) = 7.28,$$
$$y_1 + hy_1' = 1.595 + (0.1)(7.28) = 2.323,$$

y

$$f(t_2, y_1 + hy_1') = 1 - 0.2 + 4(2.323) = 10.092.$$

Entonces, por la ecuación (5),

$$y_2 = 1.595 + (0.5)(7.28 + 10.092)(0.1) = 2.4636. \tag{9}$$

En la tabla 8.3.1 se dan más resultados para $0 \leq t \leq 1$, obtenidos al aplicar el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Para comparar los resultados del método mejorado de Euler con los del método de Euler, nótese que aquél requiere dos evaluaciones de f en cada paso, mientras que éste requiere solamente una. Esto es importante porque típicamente la mayor parte del tiempo de cálculo en cada paso se dedica a la evaluación de f, por lo cual el conteo de estas evaluaciones constituye una manera razonable de estimar el esfuerzo total de cálculo. Por tanto, para un tamaño dado de paso h, el método mejorado de Euler requiere el doble de evaluaciones de f que el de Euler. De manera alternativa, el método mejorado de Euler para el tamaño de paso h requiere el mismo número de evaluaciones de f que el de Euler con tamaño de paso $h/2$. Al consultar las tablas 8.1.1 y 8.3.1 puede verse que el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ da mejores resultados que el de Euler con $h = 0.05$; nótese que, en cada caso, intervienen veinte evaluaciones de f. Sin embargo, el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ también es más exacto que el de Euler con $h = 0.025$ (cuarenta evaluaciones de f) y es casi tan exacto como el de Euler con $h = 0.01$ (cien evaluaciones de f). Por tanto, en comparación con el método de Euler, el mejorado de Euler es evidentemente más eficiente, produciendo resultados sustancialmente mejores con menor esfuerzo total de cálculo. Con $h = 0.05$ el método mejorado de Euler proporciona resultados que concuerdan bastante con la solución exacta; los errores porcentuales en $t = 0.5$ y $t = 1.0$ son 1.15% y 2.3%, respectivamente.

TABLA 8.3.1 Comparación de resultados al aplicar los métodos de Euler y mejorado de Euler para el problema con valor inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$.

	Euler		Mejorado de Euler		
t	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	Exacta
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5475000	1.5761188	1.5950000	1.6049750	1.6090418
0.2	2.3249000	2.4080117	2.4636000	2.4932098	2.5053299
0.3	3.4333560	3.6143837	3.7371280	3.8030484	3.8301388
0.4	5.0185326	5.3690304	5.6099494	5.7404023	5.7942260
0.5	7.2901870	7.9264062	8.3697252	8.6117498	8.7120041
0.6	10.550369	11.659058	12.442193	12.873253	13.052522
0.7	15.234032	17.112430	18.457446	19.203865	19.515518
0.8	21.967506	25.085110	27.348020	28.614138	29.144880
0.9	31.652708	36.746308	40.494070	42.608178	43.497903
1.0	45.588400	53.807866	59.938223	63.424698	64.897803

Es fácil modificar un programa de computadora para el método de Euler con el fin de poner en práctica, en vez de éste, el mejorado de Euler. Todo lo que se requiere es reemplazar el paso 6 del algoritmo de la sección 8.1 por el siguiente:

Paso 6. $k1 = f(t, y)$
$k2 = f(t + h, y + h * k1)$
$y = y + (h/2) * (k1 + k2)$
$t = t + h$

Una manera alternativa de mejorar la fórmula de Euler se basa en el desarrollo de Taylor de la solución del problema con valor inicial (1). Al retener los dos primeros términos del desarrollo de ϕ alrededor de $t = t_n$ se obtiene la fórmula de Euler, de modo que al conservar más términos debe obtenerse una fórmula más exacta. Si se supone que las segundas derivadas parciales de f son continuas, de modo que ϕ tiene por lo menos tres derivadas continuas en el intervalo de interés, es posible escribir

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \phi'''(\bar{t}_n)\frac{h^3}{3!}, \tag{10}$$

en donde $\bar{t}_n$ es algún punto del intervalo $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$.

Por la ecuación (1) se tiene

$$\phi'(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]. \tag{11}$$

Además, al derivar la ecuación (1) e igualar t a t_n se encuentra que

$$\phi''(t_n) = f_t[t_n, \phi(t_n)] + f_y[t_n, \phi(t_n)]\phi'(t_n). \tag{12}$$

Se obtiene la fórmula de Taylor con tres términos al sustituir $\phi(t_n)$ por su valor aproximado y_n en las fórmulas para $\phi'(t_n)$ y $\phi''(t_n)$ y si se desprecia después el término $\phi'''(\bar{t}_n)h^3/3!$ en la ecuación (10). De esta manera se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n, \tag{13}$$

en donde

$$y'_n = f(t_n, y_n), \qquad y''_n = f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n)y'_n. \tag{14}$$

Si se supone por el momento que $\phi(t_n) = y_n$, se concluye que el error local por truncamiento e_{n+1} asociado con la fórmula (13) es

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{\phi'''(\bar{t}_n)h^3}{6}, \tag{15}$$

en donde $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Por tanto, el error local por truncamiento para la serie de Taylor con tres términos es proporcional a h^3, precisamente como para la fórmula mejorada de Euler antes analizada. Una vez más, es posible demostrar que, para un intervalo finito, el error global por truncamiento no es mayor que una constante multiplicada por h^2.

La fórmula de Taylor con tres términos requiere el cálculo de $f_t(t, y)$ y $f_y(t, y)$, y luego la evaluación de estas funciones, así como la de $f(t, y)$ en (t_n, y_n). En algunos problemas, f_t

y f_y pueden ser más complicadas que la propia f. Si este es el caso, probablemente es mejor aplicar una fórmula de exactitud comparable, como la fórmula mejorada de Euler, que no requiera las derivadas parciales f_t y f_y. En principio, es posible desarrollar fórmulas de Taylor con cuatro términos o incluso de orden superior. Sin embargo, estas fórmulas comprenden derivadas parciales aún superiores de f y, en general, su aplicación es un tanto complicada.

Finalmente, se observa que si f es lineal en t y en y, como en el problema ejemplo, entonces las fórmulas mejorada de Euler y de Taylor con tres términos son idénticas. Por tanto, los resultados dados en la tabla 8.3.1 para el método mejorado de Euler también son válidos para el de Taylor con tres términos.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, encuentre valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial en $t = t_0 + 0.1$, $t_0 + 0.2$, $t_0 + 0.3$ y $t_0 + 0.4$.
a) Si aplica el método mejorado de Euler con $h = 0.1$.
b) Si aplica el método de Taylor con tres términos, con $h = 0.1$.
Compare los resultados con los obtenidos por el método de Euler en la sección 8.1 y con la solución exacta (en caso de contar con ésta).

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
3. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
5. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
6. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
7. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(1) = 2$
8. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

En cada uno de los problemas 9 a 12 encuentre un valor aproximado de la solución del problema dado con valor inicial en $t = t_0 + 1$.
a) Si aplica el método mejorado de Euler con $h = 0.1$.
b) Si aplica el método mejorado de Euler con $h = 0.05$.
c) Si aplica el método mejorado de Euler con $h = 0.025$.
Compare los resultados con los obtenidos por el método de Euler de la sección 8.1.

9. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
10. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
11. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
12. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

13. Complete los cálculos que dan las entradas de la cuarta columna de la tabla 8.3.1 hasta $t = 0.6$; es decir, aplique el método mejorado de Euler con $h = 0.1$
14. Para el problema ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$, determine valores aproximados de la solución hasta $t = 0.6$ si se aplica la fórmula de Taylor con tres términos y $h = 0.1$. Compruebe los resultados con los de la tabla 8.3.1.
15. En este problema se establece que el error local por truncamiento para la fórmula mejorada de Euler es proporcional a h^3. Si se supone que la solución ϕ del problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ tiene derivadas continuas hasta el tercer orden (f tiene segundas derivadas parciales continuas), se concluye que

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \frac{\phi''(t_n)}{2!}h^2 + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)}{3!}h^3,$$

en donde $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Suponga que $y_n = \phi(t_n)$.

a) Demuestre que para y_{n+1}, según se expresa en la ecuación (5),

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1}$$
$$= \frac{\phi''(t_n)h - \{f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)] - f(t_n, y_n)\}}{2!} h + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)h^3}{3!}. \quad \text{(i)}$$

b) Aplique el hecho de que $\phi''(t) = f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t)$ y que la aproximación de Taylor con un resto para una función $F(t, y)$ de dos variables es

$$F(a + h, b + k) = F(a, b) + F_t(a, b)h + F_y(a, b)k + \frac{1}{2!}(h^2F_{tt} + 2hkF_{ty} + k^2F_{yy})_{x=\xi,\, y=\eta}$$

en donde ξ está entre a y $a + h$ y η está entre b y $b + k$, para demostrar que el primer término segundo del miembro de la ecuación (i) es proporcional a h^3 más términos de orden superior. Este es el resultado que se desea.

c) Demuestre que si $f(t, y)$ es lineal en t y en y, entonces $e_{n+1} = \phi'''(\bar{t}_n)h^3/6$, en donde $t_n < \bar{t}_n < t_{n+1}$.

Sugerencia: ¿ Cuáles son f_{tt}, f_{ty} y f_{yy}?

16. Demuestre que la fórmula de Taylor con tres términos y la fórmula mejorada de Euler son idénticas para $y' = f(t, y)$, si f es lineal en t y en y.
Sugerencia: Ver el problema 15b); observe que cada f_{tt}, f_{ty} y f_{yy} es cero.
17. Considere el método mejorado de Euler para resolver el problema con valor inicial ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$. Aplique el resultado del inciso c) del problema 15 y la solución exacta del problema con valor inicial para determinar e_{n+1} y una cota para el error en cualquier paso sobre $0 \le t \le 1$. Compare este error con el obtenido en la sección 8.2, ecuación (15), si se aplica el método de Euler. También obtenga una cota para e_1, para $h = 0.1$, y compárela con la ecuación (16) de la sección 8.2.

En los problemas 18 y 19 aplique la solución exacta para determinar e_{n+1} y una cota de e_{n+1} en cualquier paso sobre $0 \le t \le 1$, para el método mejorado de Euler, para el problema dado con valor inicial. Obtenga también una cota para e_1, para $h = 0.1$, y compárela con la estimación semejante para el método de Euler y con el error real, si se aplica el método mejorado de Euler.

18. $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$
19. $y' = 0.5 - t + 2y$, $y(0) = 1$

20. La **fórmula modificada de Euler** para el problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ se expresa por

$$y_{n+1} = y_n + hf[t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hf(t_n, y_n)].$$

Si se sigue el procedimiento descrito en el problema 15, demuestre que el error local por truncamiento en la fórmula modificada de Euler es proporcional a h^3.

En cada uno de los problemas 21 a 24, use la fórmula modificada de Euler del problema 20, con $h = 0.1$, para calcular valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial en $t = 0.1$, 0.2, 0.3 y 0.4. Compare los resultados con los obtenidos antes.

21. $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$
22. $y' = 0.5 - t + 2y$, $y(0) = 1$
23. $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$
24. $y' = 5t - 3\sqrt{y}$, $y(0) = 2$

25. Demuestre que la fórmula modificada de Euler del problema 20 es idéntica a la fórmula mejorada de Euler de la ecuación (5) para $y' = f(t, y)$ si f es lineal en t en y.

Los problemas 26 a 28 tratan del problema con valor inicial $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$. Sea $y = \phi(t)$ la solución exacta.

26. Demuestre que el error local por truncamiento e_{n+1} si se aplica la fórmula de Taylor con tres términos se expresa por $\phi'''(\bar{t}_n)h^3/6$, en donde $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Recuerde que al calcular e_{n+1} se supone que $y_n = \phi(t_n)$.
27. Deduzca una fórmula de Taylor con cuatro términos para t_{n+1} en términos de $f(t, y)$ y sus derivadas parciales evaluadas en (t_n, y_n). ¿Cuál es el error local por truncamiento?
28. Si se sigue el procedimiento del método de extrapolación de Richardson (problemas 9 y 11 de la sección 8.2), demuestre que una estimación mejorada de $\phi(\bar{t})$, $\bar{t} = t_0 + nh$, en términos de $y_n(h)$ y $y_{2n}(h/2)$, calculada al aplicar el método de Taylor con tres términos o el método mejorado de Euler, expresa por $y_{2n}(h/2) + [y_{2n}(h/2) - y_n(h)]/(2^2 - 1)$. Considere el problema con valor inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$. Con la aplicación de los resultados aproximados para $\phi(1)$ que se obtuvieron por el método mejorado de Euler para $h = 0.1$ y para $h = 0.05$ (ver la tabla 8.3.1), determinar una nueva estimación de $\phi(1)$. Compare este resultado con el valor de la solución exacta.

8.4 Método de Runge-Kutta

En secciones anteriores se presentan la fórmula de Euler, la fórmula mejorada de Euler, y la fórmula de Taylor con tres términos, como medios para resolver numéricamente el problema con valor inicial.

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

Los errores locales por truncamiento para estos métodos son proporcionales a h^2, h^3 y h^3, respectivamente. Se ha visto que los dos últimos métodos son sustancialmente mejores que el de Euler, aunque todavía no son lo suficientemente exactos para un trabajo numérico serio.

Un método relativamente sencillo y suficientemente exacto como para ser muy útil es el llamado método de Runge-Kutta[1]. El error local por truncamiento de este método es proporcional a h^5. Por tanto, es dos órdenes de magnitud más exacto que el mejorado de Euler y el de Taylor con tres términos, y tres órdenes de magnitud mejor que la simple fórmula de Euler.

La fórmula de Runge-Kutta comprende un promedio ponderado de valores de $f(t, y)$ tomados en diferentes puntos del intervalo $t_n \le t \le t_{n+1}$; se expresa por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \tag{2}$$

[1] Carl David Runge (1856-1927), matemático y físico alemán, trabajó durante muchos años en espectroscopia. El análisis de los datos lo llevó a considerar los problemas en cálculo numérico, y el método de Runge-Kutta se originó en su publicación sobre la solución numérica de ecuaciones diferenciales, en 1895. El método fue extendido en 1901 hacia los sistemas de ecuaciones por M. Wilhelm Kutta (1867-1944). Kutta fue un matemático y experto en aerodinámica, alemán también, bastante conocido por sus importantes contribuciones a la teoría clásica de los perfiles aerodinámicos.

en donde

$$k_{n1} = f(t_n, y_n) \tag{3a}$$

$$k_{n2} = f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n1}), \tag{3b}$$

$$k_{n3} = f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n2}), \tag{3c}$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \tag{3d}$$

La suma $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ puede interpretarse como una pendiente promedio. Nótese que k_{n1} es la pendiente en el extremo izquierdo del intervalo, k_{n2} es la pendiente en el punto medio, si se aplica la fórmula de Euler para ir de t_n a $t_n + h/2$, k_{n3} es una segunda aproximación para la pendiente en el punto medio y, por último k_{n4} es la pendiente en $t_n + h$, si se aplica la fórmula de Euler y la pendiente k_{n3} para ir de t_n a $t_n + h$.

Aunque en principio no es difícil demostrar que la ecuación (2) difiere del desarrollo de Taylor de la solución ϕ en términos que son proporcionales a h^5, el álgebra es más bien extensa. Por tanto, se acepta el hecho de que el error local por truncamiento al aplicar (2) es proporcional a h^5 y que, para un intervalo finito, el error global por truncamiento es cuando mucho igual a una constante multiplicada por h^4.

Resulta evidente que la fórmula de Runge-Kutta, ecuaciones (2) y (3), es más complicada que cualquiera de las fórmulas analizadas antes. Sin embargo, esto tiene relativamente poca importancia, ya que no es difícil escribir un programa de computadora para poner en práctica este método. El método de Runge-Kutta es una buena combinación de exactitud y sencillez. Como consecuencia, es uno de los métodos más usados y mejores para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Nótese que si f no depende de y, entonces

$$k_{n1} = f(t_n), \qquad k_{n2} = k_{n3} = f(t_n + h/2), \qquad k_{n4} = f(t_n + h), \tag{4}$$

y la ecuación (2) se reduce a

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}[f(t_n) + 4f(t_n + h/2) + f(t_n + h)]. \tag{5}$$

La ecuación (5) puede identificarse como la regla de Simpson (1710-1761) (ver problema 15) para la evaluación aproximada de la integral $y' = f(t)$. El hecho de que la regla de Simpson tenga un error proporcional a h^5 concuerda con la proposición anterior referente al error en la fórmula de Runge-Kutta.

Ejemplo 1 Aplicar el método de Runge-Kutta para calcular valores aproximados de la solución $y = \phi(t)$ del problema con valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{6}$$

Si se toma $h = 0.2$, se tiene

$$k_{01} = f(0, 1) = 5; \qquad hk_{01} = 1.0$$

$$k_{02} = f(0 + 0.1, 1 + 0.5) = 6.9; \qquad hk_{02} = 1.38$$

$$k_{03} = f(0 + 0.1, 1 + 0.69) = 7.66; \qquad hk_{03} = 1.532$$
$$k_{04} = f(0 + 0.2, 1 + 1.532) = 10.928.$$

Por tanto,

$$y_1 = 1 + \frac{0.2}{6}[5 + 2(6.9) + 2(7.66) + 10.928]$$
$$= 1 + 1.5016 = 2.5016.$$

En la tabla 8.4.1 se dan más resultados, si se aplica el método de Runge-Kutta con $h = 0.2$ y $h = 0.1$. Para comparación, también se dan los valores obtenidos al aplicar los métodos de Euler y mejorado de Euler. Nótese que el método de Runge-Kutta da un valor en $t = 1$ que difiere de la solución exacta en sólo 0.7% si el tamaño de paso es $h = 0.2$, y en sólo 0.06% si $h = 0.1$. La exactitud del método de Runge-Kutta para este problema se demuestra aún más en la tabla 8.4.2, que contiene valores aproximados de $\phi(1)$ obtenidos al aplicar diferentes métodos y tamaños de paso. Obsérvese que el resultado para el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ es mejor que el de cualquiera de los otros métodos con $h = 0.01$. Es decir, el método de Runge-Kutta con 10 pasos es mejor que el método mejorado de Euler con 100 pasos; en realidad, la comparación adecuada es de 40 evaluaciones de $f(t, y)$ por el método de Runge-Kutta contra 200 por el método mejorado de Euler. Además, en la tabla 8.4.2 también se ve que, para $h = 0.01$, el método de Runge-Kutta da en esencia el valor exacto de $\phi(1)$.

TABLA 8.4.1 Comparación de resultados de la solución numérica del problema con valor inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$.

	Euler	Mejorado de Euler	Runge-Kutta		
t	$h = 0.1$	$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	Exacta
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5950000		1.6089333	1.6090418
0.2	2.1900000	2.4636000	2.5016000	2.5050062	2.5053299
0.3	3.1460000	3.7371280		3.8294145	3.8301388
0.4	4.4774000	5.6099494	5.7776358	5.7927853	5.7942260
0.5	6.3241600	8.3697252		8.7093175	8.7120041
0.6	8.9038240	12.442193	12.997178	13.047713	13.052522
0.7	12.505354	18.457446		19.507148	19.515518
0.8	17.537495	27.348020	28.980768	29.130609	29.144880
0.9	24.572493	40.494070		43.473954	43.497903
1.0	34.411490	59.938223	64.441579	64.858107	64.897803

TABLA 8.4.2 Comparación de resultados al aplicar diferentes procedimientos numéricos y diferentes tamaños de paso para el valor en $t = 1$ de la solución del problema con valor inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$.

h	Euler	Mejorado de Euler	Runge-Kutta	Exacta
0.2			64.441579	64.897803
0.1	34.411490	59.938223	64.858107	64.897803
0.05	45.588400	63.424698	64.894875	64.897803
0.025	53.807866	64.497931	64.897604	64.897803
0.01	60.037126	64.830722	64.897798	64.897803

La estructura de un programa para poner en práctica el método de Runge-Kutta es la misma que la del algoritmo para el método de Euler que se describió en la sección 8.1. De manera específica, los renglones del paso 6 en el algoritmo de Euler deben sustituirse por los siguientes:

Paso 6. $k1 = f(t, y)$
$k2 = f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k1)$
$k3 = f(t + 0.5 * h, y + 0.5 * h * k2)$
$k4 = f(t + h, y + h * k3)$
$y = y + (h/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$
$t = t + h$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, determine valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial en $t = t_0 + 0.1$, $t_0 + 0.2$, $t_0 + 0.3$ y $t_0 + 0.4$.
a) Si aplica el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$.
b) Si aplica el método de Runge-Kutta con $h = 0.05$.
Compare los resultados con los obtenidos al aplicar otros métodos y con la solución exacta (en caso de contar con ésta).

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
3. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
5. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
6. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
7. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(1) = 2$
8. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

En cada uno de los problemas 9 a 12, halle un valor aproximado de la solución del problema dado con valor inicial en $t = t_0 + 1$.
a) Si aplica el método de Runge-Kutta con $h = 0.2$.
b) Si aplica el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$.
c) Si aplica el método de Runge-Kutta con $h = 0.05$.
Compare los resultados con los obtenidos por otros métodos.

9. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
10. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
11. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
12. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

13. Calcule valores aproximados de la solución $y = \phi(t)$ en $t = 0.4$ y 0.6 para el problema ejemplo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$. Use $h = 0.2$ y el valor aproximado de $\phi(0.2)$ que se da en el ejemplo del texto. Compare los resultados con los valores proporcionados en la tabla 8.4.1.

*14. Considere el problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. La fórmula de Taylor con tres términos correspondiente es

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + (h^2/2)y''_n. \tag{i}$$

Para deducir otras fórmulas de exactitud semejante, considere la expresión

$$y_{n+1} = y_n + h\{af(t_n, y_n) + bf[t_n + \alpha h, y_n + \beta hf(t_n, y_n)]\}, \tag{ii}$$

en donde a, b, α y β son arbitrarias.

a) Desarrolle el segundo miembro de la ecuación (ii) alrededor del punto (t_n, y_n) para demostrar que la diferencia entre las fórmulas (i) y (ii) es proporcional a h^3 si $a + b = 1$, $b\alpha = 1/2$, y $b\beta = 1/2$. *Sugerencia*: use el desarrollo de Taylor para una función de dos variables que se dio en el problema 15 b) de la sección 8.3.

b) Demuestre que las ecuaciones para a, b, α y β tienen la infinidad de soluciones $a = 1 - \lambda$, $b = \lambda$ y $\alpha = \beta = 1/2\lambda$, para cualquier $\lambda \neq 0$.

c) Para $\lambda = 1/2$, demuestre que la ecuación (ii) se reduce a la fórmula mejorada de Euler que se dio en la ecuación (5) de la sección 8.3.

d) Para $\lambda = 1$, demuestre que la ecuación (ii) se reduce a la fórmula modificada de Euler que se dio en el problema 20 de la sección 8.3.

15. Para deducir la regla de Simpson para la evaluación aproximada de la integral de $f(t)$, desde $t = 0$ hasta $t = h$, primero demuestre que

$$\int_0^h (At^2 + Bt + C)\,dt = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch.$$

A continuación, elija las constantes A, B y C de modo que la parábola $y = At^2 + Bt + C$ pase por los puntos $[0, f(0)]$, $[h/2, f(h/2)]$ y $[h, f(h)]$. Aplique este polinomio para representar $f(t)$ aproximadamente sobre el intervalo $0 \leq t \leq h$, y sustituya A, B y C en la fórmula precedente para obtener

$$\int_0^h f(t)\,dt \cong \frac{h}{6}[f(0) + 4f(h/2) + f(h)].$$

Es posible demostrar que el error al aplicar esta fórmula es proporcional a h^5.

16. a) Siga el procedimiento del método de extrapolación de Richardson (problemas 9 y 11 de la sección 8.2) para demostrar que para el problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, una estimación mejorada de $\phi(\bar{t})$, $\bar{t} = t_0 + nh$, en términos de $y_n(h)$ y $y_2(h/2)$ por el método de Runge-Kutta, se expresa por

$$y_{2n}(h/2) + [y_{2n}(h/2) - y_n(h)]/(2^4 - 1).$$

b) Considere el problema con valor inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$. Use los valores aproximados de $\phi(1)$ obtenidos por el método de Runge-Kutta con $h = 0.2$ y $h = 0.1$ (ver las tablas 8.4.1 u 8.4.2) y la fórmula del inciso a) para obtener una nueva estimación de $\phi(1)$. Compare el resultado con la solución exacta.

8.5 Algunas dificultades con los métodos numéricos

En la sección 8.2 se analizaron algunas ideas relacionadas con los errores que pueden ocurrir en una solución numérica del problema con valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

En esta sección se continúa ese análisis y también se señalan varias dificultades más sutiles que pueden presentarse. Debido a que es bastante difícil abordar con detalle los temas que se plantean, sólo se les ilustrarán mediante ejemplos.

En primer lugar, recuérdese que para el método de Euler se demostró que el error local por truncamiento es proporcional a h^2 y que para un intervalo finito el error global por truncamiento es cuando mucho igual a una constante multiplicada por h. Aunque no se demuestra en general es cierto que si el error local por truncamiento es proporcional a n^p, para un intervalo finito, el error global por truncamiento está acotado por una constante multiplicada por h^{p-1}. Para lograr mucha exactitud, normalmente se utiliza un procedimiento numérico para el que p sea bastante grande. A medida que p crece, por lo común la fórmula usada al calcular y_{n+1} se vuelve más complicada y, de donde, en cada paso se requieren más cálculos; sin embargo, esto no suele ser un problema grave a menos que $f(t, y)$ sea muy complicada o el cálculo deba repetirse muchas veces (por ejemplo, para muchos valores diferentes de y_0 o diferentes valores de los parámetros que pudieran aparecer en f o las dos cosas).

Si se disminuye el tamaño del paso el error global por truncamiento disminuye en el mismo factor elevado a la potencia $p - 1$. Sin embargo, como se mencionó en la sección 8.2, si h es demasiado pequeño, se requerirán demasiados pasos para cubrir un intervalo fijo y el error global por redondeo puede ser mayor que el error global por truncamiento. En la figura 8.5.1 se muestra la situación esquemáticamente. Se supone que el error por redondeo R_n es proporcional al número de cálculos ejecutados y, por lo tanto, es inversamente proporcional al tamaño h del paso. Por otra parte, el error por truncamiento E_n es proporcional a una potencia positiva de h. Por la ecuación (6) de la sección 8.2 se sabe que el error total está acotado por $|E_n| + |R_n|$; entonces, se desea elegir h a fin de minimizar esta cantidad. Como se indica en la figura 8.5.1, el valor óptimo de h es aproximadamente el valor en el que se cruzan las gráficas de $|E_n|$ y $|R_n|$. En otras palabras, h es casi óptimo cuando los errores por truncamiento y por redondeo son aproximadamente iguales en magnitud.

Como segundo ejemplo de los tipos de dificultades que pueden presentarse cuando se utilizan sin cuidado los procedimientos numéricos, considérese el problema de determinar la solución $y = \phi(t)$ de

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

Este es el tercer problema de los conjuntos de problemas de la sección previa. En virtud de que la ecuación diferencial no lineal, el teorema 2 · 4 · 1 de existencia y unicidad sólo garantiza que existe una solución en *algún* intervalo alrededor de $t = 0$. Supóngase que se

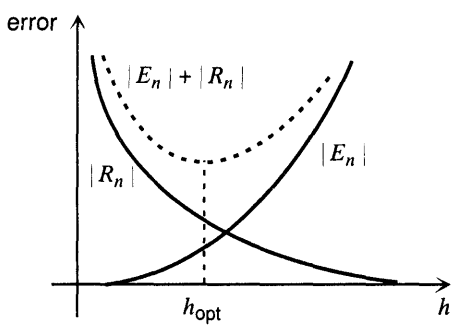


FIGURA 8.5.1 Dependencia de los errores por truncamiento y por redondeo respecto del tamaño h del paso.

intenta calcular una solución del problema con valor inicial en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, aplicando procedimientos numéricos diferentes.

Si se aplica el método de Euler con $h = 0.1$, 0.05 y 0.01, se encuentran los siguientes valores aproximados en $t = 1$; 7.189500, 12.32054 y 90.68743, respectivamente. Las grandes diferencias entre los valores calculados son una prueba convincente de que es necesario utilizar un procedimiento numérico más exacto, por ejemplo el método de Runge-Kutta. Si se usa el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$, se encuentra el valor aproximado de 735.0004 en $t = 1$, que es bastante diferente de los que se obtuvieron con el método de Euler. Si se actuase ingenuamente y se detuviera el proceso ahora, se cometería un grave error. Al repetir los cálculos con tamaños de paso h =0.05 y $h = 0.01$, se obtiene la interesante información listada en la tabla 8.5.1.

Aunque los valores en $t = 0.90$ son razonables y bien podría creerse que la solución exacta tiene un valor aproximado de 14.3 en $t = 0.90$, es evidente que algo extraño sucede entre $t = 0.9$ y $t = 1.0$. Para ayudarse a determinar lo que sucede, considérense algunas aproximaciones analíticas para la solución del problema con valor inicial (2). Nótese que sobre $0 \leq t \leq 1$,

$$y^2 \leq t^2 + y^2 \leq 1 + y^2. \tag{3}$$

Esto siguiere que la solución $y = \phi_1(t)$ de

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{4}$$

y la solución $y = \phi_2(t)$ de

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

son cotas superior e inferior, respectivamente, para la solución $y = \phi(t)$ del problema original, ya que todas estas soluciones pasan por el mismo punto inicial. De hecho, es posible demostrar (por ejemplo, por el método de iteración de la sección 2.11) que $\phi_2(t) \leq \phi(t) \leq \phi_1(t)$ siempre que estas funciones existan. Lo importante por observar es que *es posible resolver* las ecuaciones (4) y (5) para ϕ_1 y ϕ_2 mediante separación de variables. Se encuentra que

$$\phi_1(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \phi_2(t) = \frac{1}{1 - t}. \tag{6}$$

Por tanto, $\phi_2(t) \to \infty$ cuando $t \to 1$ y $\phi_1(t) \to \infty$ cuando $t \to \pi/4 \cong 0.785$. Estos cálculos muestran que la solución del problema original con valor inicial deben volverse no acota-

TABLA 8.5.1 Cálculo de la solución del problema con valor inicial $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$ al aplicar el método de Runge-Kutta.

h	$t = 0.90$	$t = 1.0$
0.1	14.02158	735.0004
0.05	14.27042	1.755613×10^4
0.01	14.30200	$> 10^{15}$

das en alguna parte entre $t = 0.785$ y $t = 1$. Ahora se sabe que el problema (2) no tiene solución sobre todo el intervalo $0 \leq t \leq 1$.

Sin embargo, los cálculos numéricos sugieren que es posible ir más allá de $t = 0.785$ y quizá más allá de $t = 0.9$. Si se supone que la solución del problema con valor inicial existe en $t = 0.9$ y que su valor es igual a 14.3, es posible obtener una apreciación más exacta de lo que sucede para t más grande, al considerar los problemas con valor inicial (4) y (5) si se sustituye $y(0) = 1$ por $y(0.9) = 14.3$. Entonces se obtiene

$$\phi_1(t) = \tan(t + 0.6010), \qquad \phi_2(t) = 1/(0.9699 - t), \tag{7}$$

en donde sólo se conserva cuatro cifras decimales. Por tanto, $\phi_1(t) \to \infty$ cuando $t \to \pi/2 - 0.6010 \cong 0.9698$ y $\phi_2(t) \to \infty$ cuando $t \to 0.9699$. Se concluye que la solución del problema con valor inicial (2) se vuelve no acotada cerca de $t = 0.97$. No es posible ser más precisos que esto porque la condición inicial $y(0.9) = 14.3$ sólo es aproximada. Este ejemplo ilustra el tipo de información que es posible obtener mediante una combinación juiciosa de trabajo analítico y numérico.

Como último ejemplo, considérese el problema de determinar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal de segundo orden

$$y'' - 100y = 0 \tag{8}$$

para $t > 0$. La generalización de las técnicas numéricas para las ecuaciones de primer orden hacia las ecuaciones de orden superior o a sistemas de ecuaciones se analiza en la sección 8.7, pero no es necesaria para este análisis. Dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (8) son $\phi_1(t) = \cosh 10t$ y $\phi_2(t) = \operatorname{senh} 10t$. La primera solución, $\phi_1(t) = \cosh 10t$, es generada por las condiciones iniciales $\phi_1'(0) = 1$, $\phi_1'(0) = 0$; la segunda solución, $\phi_2(t) = \operatorname{senh} 10t$, es generada por las condiciones iniciales $\phi_2(0) = 0$, $\phi_2'(0) = 10$. Aunque analíticamente es posible hablar de la diferencia entre $\cosh 10t$ y $\operatorname{senh} 10t$, para t grande se tiene que $\cosh 10t \sim e^{10t}/2$ y $\operatorname{senh} 10t \sim e^{10t}/2$; numéricamente, estas dos funciones se ven exactamente iguales si sólo se conserva un número fijo de dígitos. Por ejemplo, correcto hasta ocho cifras significativas

$$\operatorname{senh} 10 = \cosh 10 = 11{,}013.233.$$

Si los cálculos se efectúan en una máquina que solamente lleva ocho dígitos, las dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2 son idénticas en $t = 1$ y, de donde, para toda $t > 1$. Por tanto, aunque las soluciones son linealmente independientes, su tabulación numérica mostraría que son iguales por que sólo puede retenerse un número finito de dígitos. A este fenómeno se le llama **dependencia numérica**; es uno de los problemas importantes y difíciles que siempre se encuentra cuando se está resolviendo una ecuación de segundo orden o de orden superior que tiene por lo menos una solución que crece muy rápido.

Para este problema, esta dificultad puede eliminarse parcialmente al calcular, en vez de $\operatorname{senh} 10t$ y $\cosh 10t$, las soluciones linealmente independientes $\phi_3(t) = e^{10t}$ y $\phi_4(t) = e^{-10t}$ correspondientes a las condiciones iniciales $\phi_3(0) = 1$, $\phi_3'(0) = 10$ y $\phi_4(0) = 1$, $\phi_4'(0) = -10$, respectivamente. La solución ϕ_3 crece exponencialmente, mientras que ϕ_4 decrece exponencialmente. Aun así, se encuentra dificultad al calcular ϕ_4 con corrección sobre un intervalo grande. La razón es que en cada paso del cálculo de ϕ_4 se introducen errores por truncamiento y por redondeo. Por tanto, en cualquier punto t_n, los datos a utilizar al pasar hacia el siguiente punto no son precisamente los valores de $\phi_4(t_n)$ y $\phi_4'(t_n)$. La solución del

problema con valor inicial con estos datos en t_n no sólo comprende a e^{-10t}, también a e^{10t}. Debido a que el error en los datos en t_n es pequeño, la última función aparece con un coeficiente muy pequeño. A pesar de ello, como e^{-10t} tiende a cero y e^{10t} crece muy rápido, esta última termina dominando y la solución calculada es simplemente un múltiplo de $e^{10t} = \phi_3(t)$.

Para ser específicos, supóngase que se aplica el método de Runge-Kutta para calcular la solución $y = \phi_4(t) = e^{-10t}$ del problema con valor inicial

$$y'' - 100y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -10.$$

(En la sección 8.7 se describe el método de Runge-Kutta para sistemas de segundo orden.) Si se usa una aritmética de precisión simple (de ocho dígitos) con un tamaño de paso $h = 0.01$, se obtienen los resultados de la tabla 8.5.2. Resulta evidente con base en estos resultados que la solución numérica comienza a desviarse significativamente de la solución exacta para $t > 0.5$ y que pronto difiere de ésta en muchos órdenes de magnitud. La razón es la presencia en la solución numérica de una pequeña componente de la solución que crece exponencialmente $\phi_3(t) = e^{10t}$. Con aritmética de ocho dígitos es de esperar un error por redondeo del orden de 10^{-8} en cada paso. Dado que e^{10t} crece en un factor de 5×10^{21} desde $t = 0$ hasta $t = 5$, un error del orden de 10^{-8} cerca de $t = 0$ puede producir un error del orden de 5×10^{13} en $t = 5$, aun si no se introducen más errores en los cálculos que intervienen. Los resultados que se dan en la tabla 8.5.2 demuestran que esto es exactamente lo que sucede.

La ecuación (8) es un ejemplo de lo que se conoce como ecuaciones **rígidas**. Estas ecuaciones tienen cuando menos una solución que decae con rapidez y, por lo general, se requiere un especial cuidado al resolverlas numéricamente. Los códigos de computación modernos para resolver ecuaciones diferenciales incluyen medidas para tratar con la rigi-

TABLA 8.5.2 Solución exacta de $y'' - 100y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -10$ y solución numérica al aplicar el método de Runge-Kutta con $h = 0.01$

	y	
t	Numérica	Exacta
0.0	1.0	1.0
0.25	8.2085×10^{-2}	8.2085×10^{-2}
0.5	6.7395×10^{-3}	6.7379×10^{-3}
0.75	5.7167×10^{-4}	5.5308×10^{-4}
1.0	2.7181×10^{-4}	4.5400×10^{-5}
1.5	3.3602×10^{-2}	3.0590×10^{-7}
2.0	4.9870	2.0612×10^{-9}
2.5	7.4013×10^{2}	1.3888×10^{-11}
3.0	1.0984×10^{5}	9.3576×10^{-14}
3.5	1.6302×10^{7}	6.3051×10^{-16}
4.0	2.4195×10^{9}	4.2484×10^{-18}
4.5	3.5908×10^{11}	2.8625×10^{-20}
5.0	5.3292×10^{13}	1.9288×10^{-22}

dez. [Para un análisis más detallado de ecuaciones rígidas, consultar los libros de Gear (1971) y Rice (1983) que se citan en la bibliografía al final de este capítulo.]

Otro problema que es necesario investigar para cada procedimiento numérico es la convergencia de la solución aproximada a la solución exacta, cuando h tiende a cero. Aunque esto no ocurre para los métodos de un paso analizados en las secciones anteriores, si se aplican procedimientos con pasos múltiples existe el siguiente peligro: puede suceder que la fórmula numérica para y_n, que comprende a y_{n-1} y y_{n-2}, etcétera tenga soluciones extrañas que no correspondan a las soluciones de la ecuación diferencial original. Si estas soluciones extrañas crecen en vez de decaer, provoca problemas. Esto se ilustra con un ejemplo específico en la siguiente sección.

Otros problemas prácticos, a los que frecuentemente tiene que enfrentarse el experto en análisis numérico, son cómo calcular soluciones de una ecuación diferencial en la vecindad de un punto singular regular y cómo calcular numéricamente la solución de una ecuación diferencial sobre un intervalo *no acotado*. En general, estos problemas requieren una combinación de trabajo analítico y numérico.

Problemas

1. Para adquirir cierta idea sobre los peligros posibles de los errores pequeños en las condiciones iniciales, como los debidos al redondeo, considere el problema con valor inicial

$$y' = t + y - 3, \qquad y(0) = 2.$$

a) Demuestre que la solución es $y = \phi_1(t) = 2 - t$.

b) Suponga que en la condición inicial se comete un error y que en vez de 2 se usa 2.001. Determine la solución $y = \phi_2(t)$ en este caso y compare la diferencia $\phi_2(t) - \phi_1(t)$ en $t = 1$ y cuando $t \to \infty$.

2. Considere el problema con valor inicial

$$y' = t^2 + e^y, \qquad y(0) = 0. \tag{i}$$

Si se aplica el método de Runge-Kutta con un tamaño de paso h, se obtiene los resultados de la tabla 8.5.3. Estos resultados sugieren que la solución tiene una asíntota vertical entre $t = 0.9$ y $t = 1.0$.

a) Demuestre que para $0 \leq t \leq 1$ la solución $y = \phi(t)$ del problema (i) satisface

$$\phi_2(t) \leq \phi(t) \leq \phi_1(t), \tag{ii}$$

TABLA 8.5.3 Cálculo de la solución del problema con valor inicial $y' = t^2 + e^y$, $y(0) = 0$ al aplicar el método de Runge-Kutta

h	$t = 0.90$	$t = 1.0$
0.02	3.42975	$> 10^{38}$
0.01	3.42981	$> 10^{38}$

en donde $y = \phi_1(t)$ es la solución de

$$y' = 1 + e^y, \qquad y(0) = 0. \tag{iii}$$

y $y = \phi_2(t)$ es la solución de

$$y' = e^y, \qquad y(0) = 0. \tag{iv}$$

b) Determine $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$. Luego demuestre que $\phi(t) \to \infty$ para alguna t entre $t = \ln 2 \cong 0.69315$ y $t = 1$.

c) Resuelva las ecuaciones diferenciales $y' = e^y$ y $y' = 1 + e^y$, respectivamente, con la condición inicial $y(0.9) = 3.4298$. Use los resultados para demostrar que $\phi(t) \to \infty$ cuando $t \cong 0.932$.

En los problemas 3 y 4,

a) Encuentre una fórmula para la solución del problema con valor inicial y observe que es independiente de λ.

b) Aplique el método de Runge-Kutta con $h = 0.01$ para calcular valores aproximados de la solución para $0 \leq t \leq 1$, para diversos valores de λ como $\lambda = 1$, 10, 20 y 50.

c) Explique las diferencias, en caso de haber, entre la solución exacta y las aproximaciones numéricas.

3. $y' - \lambda y = 1 - \lambda t, \qquad y(0) = 0$

4. $y' - \lambda y = 2t - \lambda t^2, \qquad y(0) = 0$

8.6 Un método de pasos múltiples

En secciones anteriores se analizaron procedimientos numéricos para resolver el problema con valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

en el cual los datos en el punto $t = t_n$ se utilizan para calcular un valor aproximado de la solución $\phi(t_{n+1})$ en el siguiente punto de la malla $t = t_{n+1}$. En otras palabras, el valor calculado de ϕ en cualquier punto de la malla depende sólo de los datos del punto precedente en la malla. Estos métodos se llaman **métodos de un paso** o **de arranque**. Sin embargo, una vez que se obtienen valores aproximados de la solución $y = \phi(t)$ en algunos puntos más allá de t_0, es natural preguntarse si es posible utilizar parte de esta información, en vez de sólo el valor en el último punto, para calcular el valor de ϕ en el siguiente punto. Específicamente, si se conocen y_1 en t_1, t_2 en t_2, . . . , y_n en t_n, ¿cómo se puede usar esta información para determinar y_{n+1} en t_{n+1}? Los métodos en los que se utiliza información de más que el último punto de la malla se llaman **métodos de pasos múltiples**.

Uno de los mejores métodos de pasos múltiples es el predictor-corrector de Adams-Moulton[2], en el que se utiliza la información en los cuatro puntos precedentes de la malla,

[2] John Couch Adams (1819-1892), astrónomo inglés, es más famoso por ser el codescubridor –con Joseph Leverrier– del planeta Neptuno, en 1846. Adams fue también bastante hábil en los cálculos; su procedimiento para la integración numérica de ecuaciones diferenciales apareció en 1883 en un libro escrito con Francis Bashforth sobre acción capilar. Forest Ray Moulton (1872-1952) fue astrónomo y administrador de programas científicos estadounidenses. Al efectuar cálculos de trayectorias balísticas durante la Primera Guerra Mundial, ideó mejoras sustanciales en la fórmula de Adams.

t_n, t_{n-1}, t_{n-2} y t_{n-3}, para calcular un valor de ϕ en el siguiente punto de la malla t_{n+1}. Antes de poder usar este método, es necesario calcular y_1, y_2 y y_3 con algún método de arranque, como el de Runge-Kutta; por supuesto, el método de arranque debe tener una exactitud comparable a la del método de pasos múltiples que se va a aplicar después. En esta sección se analiza brevemente el desarrollo del método de Adams-Moulton.

Supóngase que se integra $\phi'(t)$ desde t_n hasta t_{n+1}; entonces

$$\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t)\, dt. \tag{2}$$

Si se supone que se conocen $\phi(t_{n-3})$, $\phi(t_{n-2})$, $\phi(t_{n-1})$ y $\phi(t_n)$, entonces pueden calcularse $\phi'(t_{n-3}), \ldots, \phi'(t_n)$ a partir de la ecuación (1). En seguida se aproxima $\phi'(t)$ por un polinomio de grado tres que pase por los cuatro puntos $[t_{n-3}, \phi'(t_{n-3})]$, $[t_{n-2}, \phi'(t_{n-2})]$, $[t_{n-1}, \phi'(t_{n-1})]$ y $[t_n, \phi'(t_n)]$. Es posible demostrar que siempre se puede hacer esto y, además, que el polinomio es único. Este polinomio se conoce como **polinomio de interpolación,** porque proporciona una fórmula aproximada para $\phi'(t)$ en valores de t diferentes de t_{n-3}, t_{n-2}, t_{n-1} y t_n. Si se sustituye $\phi'(t)$ por este polinomio de interpolación en la ecuación (2), se evalúa la integral y se reemplazan $\phi(t_{n-3}), \ldots, \phi(t_{n+1})$ por sus valores aproximados, da la fórmula de pasos múltiples

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}). \tag{3}$$

Esta fórmula se conoce como fórmula predictora de Adams-Bashforth; predice el valor aproximado y_{n+1} de $\phi(t)$ en t_{n+1}. Su error local por truncamiento es proporcional a h^5.

Los detalles que se omitieron en la deducción de la ecuación (3) son la determinación del polinomio de grado tres que pasa por los puntos (t_{n-3}, y'_{n-3}), (t_{n-2}, y'_{n-2}), (t_n, y'_{n-1}) y (t_n, y'_n), y la integración de este polinomio desde t_n hasta t_{n+1}. El método de construcción de polinomios de interpolación se remonta hasta Newton y se analiza en libros sobre métodos numéricos; ver, por ejemplo, la obra de Henrici (capítulo 5) o la de Conte y deBoor (capítulo 4). Lo importante aquí no son estos detalles algebraicos, sino el principio subyacente en los métodos de pasos múltiples.

1. Se ajusta un polinomio de grado p a los $p + 1$ puntos

$$(t_{n-p}, y'_{n-p}), \ldots, (t_n, y'_n).$$

2. Este polinomio de interpolación se integra sobre un intervalo en t que termina en t_{n+1}, con lo que se obtiene una ecuación para y_{n+1}.

Nótese también que al integrar el mismo polinomio sobre intervalos diferentes pueden obtener fórmulas diferentes. Si el polinomio usado para obtener la ecuación (3) se integra desde t_{n-3} hasta t_{n+1}, se obtiene la fórmula de Milne (1890-1971):

$$y_{n+1} = y_{n-3} + (4h/3)(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}). \tag{4}$$

Esta fórmula también tiene un error local por truncamiento proporcional a h^5.

El método predictor-corrector de Adams-Moulton comprende, además de la (3), una **fórmula correctora** para mejorar el valor de y_{n+1} predicho por la ecuación (3). La fórmula correctora se deduce al integrar $\phi'(t)$ desde t_n hasta t_{n+1} si se usa un polinomio de interpolación que pase por los puntos $[t_{n-2}, \phi'(t_{n-2})]$, $[t_{n-1}, \phi'(t_{n-1})]$, $[t_n, \phi'(t_n)]$ y $[t_{n+1}, \phi'(t_{n+1})]$. En el cálculo real, se usan los valores aproximados y'_{n-2}, y'_{n-1}, y'_n y y'_{n+1} de $\phi'(t)$

en t_{n-2}, t_{n-1}, t_n y t_{n+1}, y se evalúa $y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$ usando el valor de y_{n+1} determinado por la ecuación (3). La fórmula correctora de Adams-Moulton es

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}). \tag{5}$$

Esta fórmula también tiene un error local por truncamiento proporcional a h^5. Sin embargo, la constante de proporcionalidad en la cota del error para la fórmula correctora (5) es aproximadamente $\frac{1}{15}$ de la constante de proporcionalidad en la cota del error para la fórmula predictora (3).

Una vez que se conocen y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-2} y y_n, es posible calcular y'_{n-3}, y'_{n-2}, y'_{n-3} y y'_n y luego usar la fórmula predictora (3) para obtener un primer valor para y_{n+1}. Entonces se calcula y'_{n+1} y se usa la fórmula correctora (5) para obtener un valor mejorado de y_{n+1}. Por supuesto, es posible seguir usando la fórmula correctora (5) si el cambio en y_{n+1} es demasiado grande. Sin embargo, como regla general, si es necesario utilizar la fórmula correctora más de una o dos veces, es posible esperar que el tamaño del paso, h, sea demasiado grande y deba hacerse más pequeño. Nótese también que la ecuación (5) sirve como verificación de la aritmética (programación) en la determinación de y_{n+1} a partir de la ecuación (3); cualquier diferencia sustancial entre los valores de y_{n+1} de (3) y de (5) indicaría una posibilidad definida de un error aritmético.

En resumen, primero se calcula y_1, y_2 y y_3 mediante una fórmula de arranque con un error local por truncamiento no mayor que h^5. Luego se pasa a la fórmula predictoría (3) para calcular y_{n+1}, $n \geq 3$, y a la fórmula correctora (5) para corregir y_{n+1}. Se sigue corrigiendo y_{n+1} hasta que el cambio relativo sea menor que un error permisible prescrito. En las obras de Conta y deBoor (capítulo 6) y se Henrici (capítulo 5) se puede hallar un análisis más detallado del método predictor-corrector de Adams-Moulton y otros métodos de pasos múltiples.

Ejemplo 1 Aplicar el método predictor-corrector de Adams-Moulton, con $h = 0.1$ para determinar un valor aproximado de la solución exacta de $y = \phi(t)$ en $t = 0.4$ para el problema con valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{6}$$

Como datos de arranque se usa y_1, y_2 y y_3 determinados con el método de Runge-Kutta y que se dan en la tabla 8.4.1. Entonces si se aplica la ecuación (6), se obtiene

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 & y'_0 &= 5 \\ y_1 &= 1.6089333 & y'_1 &= 7.3357332 \\ y_2 &= 2.5050062 & y'_2 &= 10.820025 \\ y_3 &= 3.8294145 & y'_3 &= 16.017658. \end{aligned}$$

Por la ecuación (3) se encuentra que el valor predicho de y_4 es

$$y_4 = 3.8294145 + \frac{0.1(469.011853)}{24} = 5.783631.$$

A continuación, se aplica la fórmula correctora (5) para corregir y_4. Con correspondencia al valor predicho de y_4, a partir de la ecuación (6), se encuentra que $y'_4 = 23.734524$. Entonces, por la ecuación (5), el valor corregido de y_4 es

$$y_4 = 3.8294145 + \frac{0.1(471.181828)}{24} = 5.792673.$$

El valor exacto, correcto hasta ocho dígitos, es 5.7942260. Nótese que el aplicar una vez la fórmula de corrección, el error en y_4 se reduce aproximadamente a la séptima parte del error anterior a su aplicación.

Una pregunta que resulta natural hacerse es por qué usar un método predictor-corrector con un error local por truncamiento proporcional a h^5, si el método de Runge-Kutta tiene un error del mismo orden de magnitud. Una razón es que, para muchos problemas, la parte del cálculo que consume más tiempo y, por lo tanto más costosa, es la evaluación de la función $f(t, y)$ en pasos sucesivos. En el método de Runge-Kutta, para avanzar un paso se requieren cuatro evaluaciones de f. Por otra parte, para el método predictor-corrector (3) y (5), la predictora sólo requiere la evaluación de $f(t, y)$ en cada t_n y el uso de la correctora requiere una evaluación adicional de $f(t, y)$ en t_{n+1}, por cada iteración efectuada. Por tanto, el número de evaluaciones de la función puede reducirse de manera notable. Este ahorro puede ser muy importante al escribir un programa general para resolver problemas con valor inicial.

Estabilidad. Al principio de este capítulo se mencionó que cuando se aplican métodos de pasos múltiples pueden surgir dificultades numéricas. Se ilustrará lo que puede ocurrir mediante la consideración del problema con valor inicial

$$y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \tag{7}$$

y el método de pasos múltiples

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_n. \tag{8}$$

El método de pasos múltiples (8) se deduce en los problemas 13 y 14; su error local por truncamiento es proporcional a h^3. Para referencias posteriores, se observa que la solución exacta del problema con valor inicial (7) es $y = e^{-2t}$.

Para este problema, $y'_n = -2y_n$, por lo que la ecuación (8) queda

$$y_{n+1} + 4hy_n - y_{n-1} = 0. \tag{9}$$

La ecuación (9) es una ecuación lineal en diferencia de segundo orden, que es posible resolver explícitamente si se sigue una teoría semejante a la de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Se busca una solución de (9) de la forma $y_n = \lambda^n$, en donde λ tiene que determinarse. Se tiene

$$\lambda^{n+1} + 4h\lambda^n - \lambda^{n-1} = 0,$$

o bien,

$$\lambda^{n-1}(\lambda^2 + 4h\lambda - 1) = 0. \tag{10}$$

Las soluciones diferentes de cero de la ecuación (10) son

$$\lambda_1 = -2h + \sqrt{1 + 4h^2} \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -(2h + \sqrt{1 + 4h^2}). \tag{11}$$

Las soluciones correspondientes de la ecuación (9) son

$$y_n = \lambda_1^n \qquad \text{y} \qquad y_n = \lambda_2^n. \tag{12}$$

Por analogía con la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, es razonable esperar (y es posible demostrar) que la solución general de la ecuación en diferencias (9) sea

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \tag{13}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Lo importante es que la ecuación en diferencias (9) tiene dos soluciones, λ_1^n y λ_2^n, mientras que la ecuación diferencial original solamente tiene la solución e^{-2t}; lo cual puede provocar dificultades. A continuación se demostrará que cuando $h \to 0$ una de las soluciones de la ecuación en diferencias tiende a la solución verdadera e^{-2t} de la ecuación diferencial, pero que la otra oscila entre $\pm e^{2t}$. Sea T un valor fijo pero arbitrario de t, y supóngase que h decrece y n crece de tal forma que $nh = T$. Entonces, para h pequeño y n grande, i) $(1 + 4h^2)^{1/2}$ se aproxima por $1 + 2h^2$, ii) λ_1 se aproxima por $1 - 2h$ y λ_2 se aproxima por $-1 - 2h$ y iii) se aplica el hecho de que $(1 + \alpha/n)^n \to e^{\alpha}$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, se tiene

$$\lambda_1^n \cong (1 - 2h)^n = (1 - 2T/n)^n \to e^{-2T} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Un cálculo semejante muestra que

$$(-1)^n\lambda_2^n \to e^{2T} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Entonces, para h pequeño y n grande se puede escribir

$$y_n \cong c_1e^{-2T} + c_2(-1)^ne^{2T}. \tag{16}$$

En virtud de que T es arbitrario, el primer término de la ecuación (16) da correctamente la solución general c_1e^{-2t} de la ecuación diferencial original (7). El segundo término es una solución extraña que surge del procedimiento numérico.

Al aplicar la fórmula de pasos múltiples (8) o (9) es necesario conocer, además del valor inicial $y_0 = 1$ en $t_0 = 0$, el valor de y_1 en $t_1 = h$. En teoría, si se usan los valores correctos de y_0 y y_1, las constantes c_1 y c_2 de la (16) se determinarán como $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ y no aparecería la solución extraña $(-1)^ne^{2t}$. Sin embargo, como se analizó en la sección anterior, siempre habrá pequeños errores y, como consecuencia, el término $c_2(-1)^ne^{2t}$ aparecerá en la solución de la ecuación (9). Aun cuando c_1 puede ser muy pequeña, correspondiendo al error muy pequeño en el cálculo, el término $c_2(-1)^ne^{2t}$ dominará pronto toda la solución al crecer t. Este hecho destaca en la gráfica de la figura 8.6.1 de la solución numérica del problema con valor inicial (7), aplicando el método de pasos múltiples (8) con $h = 7/224 \simeq 0.03$. Resulta evidente que la solución extraña $(-1)^ne^{2t}$ domina más allá de $t = 3$.

Este fenómeno se conoce como **inestabilidad numérica**. En términos generales, un procedimiento numérico es inestable si los errores introducidos en los cálculos crecen con rapidez exponencial a medida que se avanza en los cálculos. Aunque dar una explicación detallada acerca de la estabilidad de los métodos numéricos rebasa el alcance de este libro, es posible hacer varias observaciones. La cuestión de la estabilidad (o inestabilidad) de un método de pasos múltiples no sólo depende del método, también de la ecuación diferencial en particular; el método puede ser estable para un problema, pero no para otro. También, los métodos de pasos múltiples pueden ser estables para algunos valores de h, pero no para

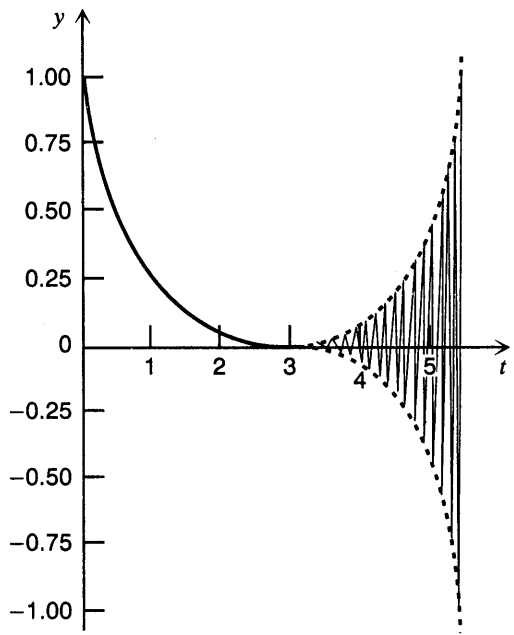


FIGURA 8.6.1 Ejemplo de inestabilidad numérica: $y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$; $y_{n+1} = y_n + 2hy'_n$.

todos los valores de h. Para evaluar la estabilidad de un método de pasos múltiples cuando se aplica a un problema con valor inicial, es necesario examinar las soluciones de la ecuación en diferencias resultante. Se dice que el método es **fuertemente estable** si las soluciones extrañas λ^n de la ecuación en diferencias son tales que $|\lambda| < 1$ cuando $h \to 0$. Si este es el caso, entonces $\lambda^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ para h suficientemente pequeño, y los errores en los cálculos no crecerán con el crecimiento de n. Nótese que en el problema ejemplo que acaba de analizarse la solución extraña λ_2^n tiene $|\lambda_2| > 1$.

En general, no es posible aplicar este criterio al problema con valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Por lo común, al analizar la estabilidad de un método numérico se considera suficiente analizar la *estabilidad lineal* del método ¿es estable el procedimiento para la ecuación diferencial $y' = Ay$, en donde A es una constante arbitraria? Es posible demostrar que el método predictor-corrector de Adams-Moulton es muy estable en el sentido de la estabilidad lineal, para h suficientemente pequeño. Ver los problemas 16 y 17 para un análisis más detallado de estas ideas.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, determine un valor aproximado de la solución en $t = t_0 + 0.4$ y $t_0 + 0.5$ aplicando el método predictor-corrector de Adams-Moulton con $h = 0.1$. Use la fórmula correctora para calcular un valor corregido en cada paso. Para y_1, y_2 y y_3, use los valores dados por el método de Runge-Kutta; ver el inciso a) de los problemas 1 a 8 de la sección 8.4.

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
3. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
5. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
6. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
7. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(1) = 2$
8. $y' = (t^2 - y^2) \operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

En cada uno de los problemas 9 a 12, encuentre un valor aproximado de la solución del problema dado con valor inicial, en $t = t_0 + 1$.

a) Al aplicar el método de Adams-Moulton con $h = 0.1$.

b) Al aplicar el método de Adams-Moulton con $h = 0.05$.

Aplique la fórmula correctora para calcular un valor corregido en cada paso. Para obtener y_1, y_2 y y_3, use el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ y 0.05, respectivamente. Compare los resultados con los obtenidos mediante otros métodos.

9. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
10. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
11. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
12. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

13. Dado que los valores de $\phi'(t)$ en t_{n-1} y t_n son y'_{n-1} y y'_n, ajuste un polinomio de primer grado $at + b$ a $\phi'(t)$ de modo que pase por estos dos puntos. Al integrar $\phi'(t)$ desde t_{n-1} hasta t_{n+1}, deduzca la fórmula de pasos múltiples

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_n.$$

Sugerencia: los cálculos no son difíciles si se hace $t_{n+1} = t_n + h$ y $t_{n-1} = t_n - h$.

14. Demuestre que la fórmula de pasos múltiples deducida en el problema 13 tiene un error local por truncamiento proporcional a h^3. Observe que esta fórmula es precisamente tan fácil de usar (una vez que se ha calculado y_1) como la fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hy'_n$, cuyo error local por truncamiento es sólo proporcional a h^2. Sin embargo, desafortunadamente, como se muestra en el texto esta fórmula de pasos múltiples es inestable.
Sugerencia: evalúe $\phi(t_n \pm h)$ al desarrollar $\phi(t)$ en una serie de Taylor alrededor de $t = t_n$.

15. Este problema está relacionado con la fórmula predictora-correctora de Milne. La fórmula predictora se dio en la fórmula (4) del texto. La fórmula correctora se deduce al evaluar la integral de $\phi'(t)$ desde t_{n-1} hasta t_{n+1} por la regla de Simpson. La fórmula es

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n-1} + 4y'_n + y'_{n+1}).$$

Tanto la fórmula predictora como la correctora tienen errores locales por truncamiento proporcionales a h^5. El método de Milne suele ser muy eficaz, pero la correctora puede ser inestable (ver el problema 17). Por consiguiente, debe preferirse el método predictor-corrector de Adams-Moulton. En cada uno de los siguientes problemas, determine un valor aproximado de la solución exacta en $t = 0.4$ aplicando el método predictor-corrector de Milne. Use la fórmula correctora para calcular una corrección.

a) Problema 1 b) Problema 2 c) Problema 3 d) Problema 4.

* 16. En este problema se demuestra que la fórmula correctora (5) de Adams-Moulton es estable para la ecuación diferencial lineal $y' = Ay$.

a) Demuestre que la solución de la ecuación diferencial es $y = ce^{At}$.

b) Demuestre que la ecuación en diferencias adecuada es

$$(1 - 9\alpha)y_{n+1} - (1 + 19\alpha)y_n + 5\alpha y_{n-1} - \alpha y_{n-2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

en donde $\alpha = Ah/24$.

c) En seguida, demuestre que $y_n = \lambda^n$ es una solución de la ecuación (i) si λ es una raíz de

$$(1 - 9\alpha)\lambda^3 - (1 + 19\alpha)\lambda^2 + 5\alpha\lambda - \alpha = 0. \tag{ii}$$

d) En el límite cuando $h \to 0$, lo cual implica que $\alpha \to 0$, demuestre que las raíces de la (ii) son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$.

e) Se examinará la raíz λ_1, con más cuidado para h pequeño. Sea $\lambda_1 = 1 + \lambda_{11}h$, sustituya en la ecuación (ii) y desprecie los términos proporcionales a h^2 o superiores. Deduzca que $\lambda_{11} = A$ y demuestre que si $y_1 = \lambda_1^n \simeq (1 + Ah)^n$ entonces $y_1 \to e^{At_n}$ cuando $h \to 0$, al usar $t_n = nh$.

Por tanto, la solución correspondiente a λ_1 se aproxima a la solución verdadera de la ecuación diferencial. Para h pequeño se tiene $|\lambda_2| < 1$ y $|\lambda_3| < 1$; por tanto, las soluciones extrañas correspondientes no crecerán. Como consecuencia, la fórmula correctora de Adams-Moulton es muy estable.

*17. En este problema se demuestra que la fórmula correctora de Milne que se da en el problema 15 es inestable para la ecuación diferencial lineal $y' = Ay$. El análisis es paralelo al del problema 16.

a) Demuestre que la solución de la ecuación diferencial es $y = ce^{At}$

b) Demuestre que la ecuación en diferencias adecuada es

$$(1 - \alpha)y_{n+1} - 4\alpha y_n - (1 + \alpha)y_{n-1} = 0 \tag{i}$$

en donde $\alpha = Ah/3$.

c) En seguida, demuestre que $y_n = \lambda^n$ es una solución de la ecuación (i) si λ es una raíz de

$$(1 - \alpha)\lambda^2 - 4\alpha\lambda - (1 + \alpha) = 0. \tag{ii}$$

d) En el límite $h \to 0$, lo que implica $\alpha \to 0$, demuestre que las raíces de la ecuación (ii) son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Observe que $|\lambda_1| = |\lambda_1| = 1$, y, de donde, para valores pequeños de h diferentes de cero una de las raíces puede tener valor absoluto mayor que uno.

e) Resuelve la ecuación cuadrática (ii) y demuestre que si h es pequeño, entonces $\lambda_1 \simeq 1 + Ah$ y $\lambda_2 \simeq -(1 - Ah/3)$. Luego demuestre que cuando $h \to 0$ con $t_n = nh$, la solución de la ecuación en diferencias (i) es

$$y_n = c_1 e^{At_n} + c_2(-1)^n e^{-At_n/3}. \tag{iii}$$

El primer término de la ecuación (iii) se aproxima a la solución verdadera de la ecuación diferencial. El segundo término, la solución extraña correspondiente a λ_2, decae si $A > 0$ pero crece si $A < 0$. Por tanto, es posible que la fórmula correctora de Milne sea inestable. Los métodos cuya estabilidad (inestabilidad) depende del signo de A se dice que son *débilmente estables*. Finalmente, se observa que $|\lambda_2| > 1$ para $A < 0$.

8.7 Sistemas de ecuaciones de primer orden

En las secciones anteriores se analizaron métodos numéricos para resolver problemas con valor inicial asociados con ecuaciones diferenciales de primer orden. Estos métodos también pueden aplicarse a un sistema de ecuaciones de primer orden o a ecuaciones de orden superior. Una ecuación de orden superior como $d^2x/dt^2 = f(t, x, dx/dt)$ se puede reducir al sistema de ecuaciones de primer orden $dx/dt = y$, $dy/dt = f(t, x, y)$ y esta transformación casi

siempre se efectúa antes de la aplicación de los métodos numéricos. Por lo tanto basta considerar sólo sistemas de ecuaciones de primer orden. Por razones de simplicidad, la atención se restringirá a un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$x' = f(t, x, y), \qquad y' = g(t, x, y), \tag{1}$$

con las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Se supone que las funciones f y g satisfacen las condiciones del teorema 7.1.1, de modo que el problema con valor inicial (1), (2) tiene una solución única en algún intervalo del eje t que contenga al punto t_0. Se desea determinar los valores aproximados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la solución $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ en los puntos $t_n = t_0 + nh$, con $n = 1, 2, \ldots$.

Los métodos de las secciones anteriores pueden generalizarse para manejar sistemas de dos (o más) ecuaciones. Por ejemplo, para el método de Euler se usan las condiciones iniciales para determinar $\phi'(t_0)$ y $\psi'(t_0)$ y luego desplazarse a lo largo de la recta tangente a la curva $x = \phi(t), y = \psi(t)$. Por tanto,

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0, y_0), \qquad y_1 = y_0 + hg(t_0, x_0, y_0).$$

En general,

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n) = x_n + hx'_n \tag{3}$$

y

$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n) = y_n + hy'_n. \tag{4}$$

De manera semejante, el método de Runge-Kutta puede extenderse a un sistema. Para el paso de t_n a t_{n+1} se tiene

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (h/6)(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}) \\ y_{n+1} &= y_n + (h/6)(l_{n1} + 2l_{n2} + 2l_{n3} + l_{n4}), \end{aligned} \tag{5}$$

en donde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, x_n, y_n), \\ k_{n2} &= f[t_n + (h/2), x_n + (h/2)k_{n1}, y_n + (h/2)l_{n1}], \\ k_{n3} &= f[t_n + (h/2), x_n + (h/2)k_{n2}, y_n + (h/2)l_{n2}], \\ k_{n4} &= f(t_n + h, x_n + hk_{n3}, y_n + hl_{n3}), \end{aligned} \tag{6}$$

y

$$\begin{aligned} l_{n1} &= g(t_n, x_n, y_n), \\ l_{n2} &= g[t_n + (h/2), x_n + (h/2)k_{n1}, y_n + (h/2)l_{n1}], \\ l_{n3} &= g[t_n + (h/2), x_n + (h/2)k_{n2}, y_n + (h/2)l_{n2}], \\ l_{n4} &= g(t_n + h, x_n + hk_{n3}, y_n + hl_{n3}). \end{aligned} \tag{7}$$

En el problema 9 se dan las fórmulas del método de Adams-Moulton según se aplica al problema con valor inicial (1), (2).

Ejemplo 1 Determinar valores aproximados de la solución $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ del problema con valor inicial

$$x' = x - 4y, \qquad y' = -x + y, \tag{8}$$

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0, \tag{9}$$

en el punto $t = 0.2$. Aplíquese el método de Euler con $h = 0.1$ y el método de Runge-Kutta con $h = 0.2$. Compárense los resultados con los valores de la solución exacta

$$\phi(t) = \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2}, \qquad \psi(t) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{4}. \tag{10}$$

En primer lugar, aplíquese el método de Euler. Para este problema, $x'_n = x_n - 4y_n$ y $y'_n = -x_n + y_n$; de donde,

$$x'_0 = 1 - (4)(0) = 1, \qquad y'_0 = -1 + 0 = -1.$$

Entonces, por las fórmulas de Euler (3) y (4), se obtiene

$$x_1 = 1 + (0.1)(1) = 1.1, \qquad y_1 = 0 + (0.1)(-1) = -0.1.$$

En el siguiente paso,

$$x'_1 = 1.1 - (4)(-0.1) = 1.5, \qquad y'_1 = -1.1 + (-0.1) = -1.2.$$

Como consecuencia,

$$x_2 = 1.1 + (0.1)(1.5) = 1.25, \qquad y_2 = -0.1 + (0.1)(-1.2) = -0.22.$$

Los valores de la solución exacta, correctos hasta ocho dígitos, son $\phi(0.2) = 1.3204248$ y $\psi(0.2) = -0.25084701$. Por tanto, los valores calculados a partir del método de Euler son erróneos en alrededor de 0.0704 y 0.0308, respectivamente, lo cual corresponde a errores porcentuales aproximados de 5.3% y 12.3%.

A continuación, aplíquese el método de Runge-Kutta para aproximar $\phi(0.2)$ y $\psi(0.2)$. Con $h = 0.2$ se obtienen los siguientes valores a partir de las ecuaciones (6) y (7):

$$k_{01} = f(1, 0) = 1, \qquad l_{01} = g(1, 0) = -1;$$

$$k_{02} = f(1.1, -0.1) = 1.5, \qquad l_{02} = g(1.1, -0.1) = -1.2;$$

$$k_{03} = f(1.15, -0.12) = 1.63, \qquad l_{03} = g(1.15, -0.12) = -1.27;$$

$$k_{04} = f(1.326, -0.254) = 2.342, \qquad l_{04} = g(1.326, -0.254) = -1.58.$$

Entonces, si se sustituyen estos valores en la ecuación (5) se obtiene

$$x_1 = 1 + \frac{0.2}{6}(9.602) = 1.3200667, \qquad y_1 = 0 + \frac{0.2}{6}(-7.52) = -0.25066667.$$

Estos alores de x_1 y y_1 son erróneos en alrededor de 0.000358 y 0.000180, respectivamente, con errores porcentuales mucho menores que un décimo del uno por ciento.

Una vez más, este ejemplo ilustra las grandes ganancias en exactitud que es posible obtener al aplicar un método de aproximación más exacto, como el de Runge-Kutta. En los cálculos que acaban de describirse, el método de Runge-Kutta. En los cálculos que acaban de describirse, el método de Runge-Kutta requiere solamente el doble de evaluaciones de funciones que para el método de Euler, pero el error en el método de Runge-Kutta es alrededor de 200 veces menor que en el de Euler.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6 determine valores aproximados de la solución $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ del problema con valor inicial dado en $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0.

a) Al aplicar el método de Euler con $h = 0.1$.

b) Al aplicar el método de Runge-Kutta con $h = 0.2$.

c) Al aplicar el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$.

Compare los resultados obtenidos por los diferentes métodos y los diferentes tamaños de paso.

1. $x' = x + y + t, \quad y' = 4x - 2y; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$
2. $x' = 2x + ty, \quad y' = xy; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$
3. $x' = -tx - y - 1, \quad y' = x; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$
4. $x' = x - y + xy, \quad y' = 3x - 2y - xy; \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1$
5. $x' = x(1 - 0.5x - 0.5y), \quad y' = y(-0.25 + 0.5x); \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 1$
6. $x' = \exp(-x + y) - \cos x, \quad y' = \operatorname{sen}(x - 3y); \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$

7. Considere el problema ejemplo $x' = x - 4y$, $y' = -x + y$ con la condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $y(0) = 0$. Aplique el método de Runge-Kutta para resolver este problema sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Empiece con $h = 0.2$ y, a continuación repita el cálculo con tamaños de paso $h = 0.1, 0.05, \ldots$, cada una igual a la mitad del tamaño del paso anterior. Continúe el proceso hasta que los cinco primeros dígitos de la solución en $t = 1$ no se alteren para los tamaños sucesivos de paso. Determine si estos dígitos son exactos al compararlos con la solución exacta dada en las ecuaciones (10) del texto.
8. Considere el problema con valor inicial

$$x'' + t^2x' + 3x = t, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Transforme este problema en un sistema de dos ecuaciones y determine valores aproximados de la solución en $t = 0.5$ y $t = 1.0$ al aplicar el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$.

9. Considere el problema con valor inicial $x' = f(t, x, y)$ y $y' = g(t, x, y)$ con $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$. La generalización del método predictor-corrector de Adams-Moulton de la sección 8.6 es

$$x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{24}h(55x'_n - 59x'_{n-1} + 37x'_{n-2} - 9x'_{n-3}),$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{24}h(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}),$$

y

$$x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{24}h(9x'_{n+1} + 19x'_n - 5x'_{n-1} + x'_{n-2}),$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{24}h(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}).$$

Determine un valor aproximado de la solución en $t = 0.4$ para el problema ilustrativo con valor inicial $x' = x - 4y$, $y' = -x + y$, con $x(0) = 1, y(0) = 0$. Considere $h = 0.1$. Corrija una vez el valor predicho. Para los valores de $x_1, \ldots, y_3$ use los valores de la solución exacta redondeados hasta seis dígitos: $x_1 = 1.12883$, $x_2 = 1.32042$, $x_3 = 1.60021$, $y_1 = -0.110527$, $y_2 = -0.250847$ y $y_3 = -0.429696$.

BIBLIOGRAFÍA

Existen muchos libros de diversos grados de complejidad que tratan sobre análisis en general, programación y la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales. En el texto se mencionaron los siguientes libros:

Conte, S. D., y deBoor, Carl, *Elementary Numerical Analysis; An Algorithmic Approach* (3a. ed.) (New York; McGraw-Hill).

Henrici, Peter, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations* (New York; Wiley, 1962).

El libro de Henrici proporciona abundante información teórica sobre métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias; sin embargo, es bastante avanzado. Dos libros más sobre métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias son:

Gear, C. William, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall).

Lambert, J. D., *Computational Methods in Ordinary Differential Equations* (New York; Wiley).

Una exposición detallada de los métodos predictores-correctores de Adams-Moulton, incluyendo directrices prácticas para su ejecución, puede encontrarse en:

Shampine, L. F. y Gordon, M. K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem* (San Francisco: Freeman).

Muchos libros sobre análisis numérico tienen capítulos acerca de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, en un nivel elemental:

Burden, R. L., y Faires, J. D., *Numerical Analysis* (4a. ed.) (Boston: Prindle, Weber and Schmidt).

En un nivel más avanzado, consúltese:

Rice, J. R., *Numerical Methods, Software and Analysis* (New York; McGraw-Hill).

Este último libro también incluye un análisis de algunas de las subrutinas que existen en la International Mathematics and Statistics Library (IMSL).

Capítulo 9 Ecuaciones diferenciales no lineales y estabilidad

Existen muchas ecuaciones diferenciales, en especial las no lineales, que no admiten la solución analítica de alguna manera razonablemente conveniente. Los métodos numéricos, como los que se analizaron en el capítulo anterior, proporcionan un medio para tratar estas ecuaciones. Otro enfoque, que se presenta en este capítulo, es de carácter geométrico y da una comprensión cualitativa del comportamiento de las soluciones, en vez de información cuantitativa detallada.

9.1 Plano fase: sistemas lineales

En virtud de que muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse convenientemente mediante métodos analíticos, es importante considerar qué información cualitativa[1] es posible obtener acerca de sus soluciones sin resolver en realidad las ecuaciones. Las cuestiones que se consideran en este capítulo están asociadas con la idea de estabilidad de una solución y los métodos que se emplean son básicamente geométricos. Tanto el concepto de estabilidad como la aplicación del análisis geométrico se introdujeron en la sección 2.6 para una ecuación simple de primer orden de la forma

$$dy/dt = f(y). \tag{1}$$

[1] La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales fue creada por Henri Poincaré (1854-1912) en varios artículos importantes entre 1880 y 1886. Poincaré fue profesor en la Universidad de París y suele ser considerado como el matemático más importante de su época. Realizó varios descubrimientos en diferentes áreas de las matemáticas incluyendo teoría de las funciones complejas, ecuaciones diferenciales parciales y mecánica celeste. En una serie de artículos que empezó a publicar en 1894 inició el empleo de los métodos modernos en topología. En ecuaciones diferenciales fue un pionero en el uso de las series asintóticas, uno de los instrumentos más poderosos de las matemáticas aplicadas contemporáneas. Entre otras cosas, utilizó los desarrollos asintóticos para obtener soluciones alrededor de puntos singulares irregulares, extendiendo de esta manera el trabajo de Fuchs y Frobenius analizado en el capítulo 5.

En este capítulo se afinan estas ideas y se extiende el análisis a los sistemas de ecuaciones.

Se empezará con una consideración del sistema más sencillo; a saber, un sistema lineal homólogo de segundo orden con coeficientes constantes. Este sistema tiene la forma

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{2}$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante de 2×2 y $\mathbf{x}$ es un vector columna de 2×1. En las secciones 7.5 a 7.7 se resolvieron sistemas de este tipo. Recuérdese que si se buscan soluciones de la forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, por sustitución de $\mathbf{x}$ en la ecuación (2) se encuentra que

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Por tanto r debe ser un eigenvalor y $\boldsymbol{\xi}$ un eigenvector correspondiente de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Los eigenvalores son raíces de la ecuación polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0 \tag{4}$$

los eigenvectores se determinan a partir de la ecuación (3) hasta una constante multiplicativa arbitraria.

En la sección 2.6 se aprendió que los puntos en los que el segundo miembro de la ecuación (1) es cero tienen una importancia especial. Estos puntos se denominan puntos críticos. De manera semejante, para el sistema (2) los puntos críticos son puntos en donde $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dado que también en estos puntos $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{0}$, corresponden a soluciones constantes o **soluciones de equilibrio** de la ecuación diferencial (2). Se supondrá que $\mathbf{A}$ es no singular, o bien, que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Se concluye que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es el único punto crítico del sistema (2).

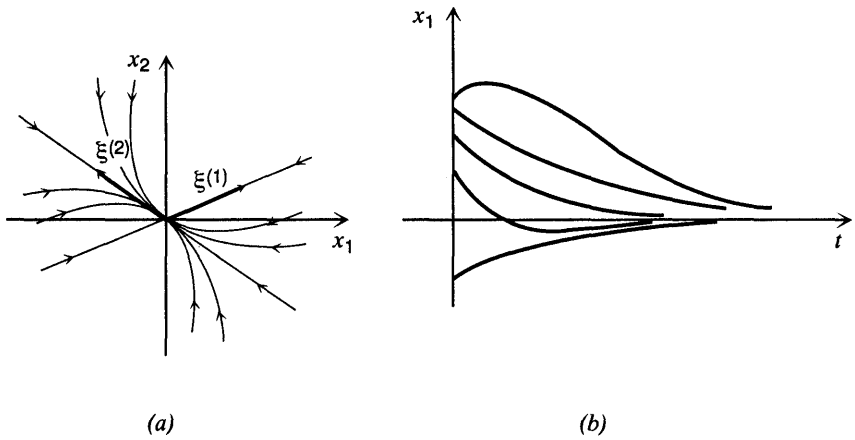
Recuérdese que una solución de la ecuación (2) es una función vectorial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ que satisface la ecuación diferencial. Esta función puede concebirse como una representación paramétrica de una curva en el plano x_1x_2. A menudo es útil considerar esta curva como la **trayectoria** recorrida por una partícula en movimiento cuya velocidad $d\mathbf{x}/dt$ queda especificada por la ecuación diferencial. El propio plano x_1x_2 se conoce como **plano fase** y el conjunto de trayectorias se menciona como **retrato fase**.

Al analizar el sistema (2) es necesario considerar diferentes casos, dependiendo de la naturaleza de los eigenvalores de $\mathbf{A}$. Estos casos también se presentan en las secciones 7.5 a 7.7, en donde el interés principal era hallar una fórmula conveniente para la solución general. Ahora, la meta principal es caracterizar la ecuación diferencial según el patrón geométrico formado por sus trayectorias. En cada caso se analiza el comportamiento de las trayectorias en general y se ilustra en un ejemplo. Es importante que el lector se familiarice con los tipos de comportamiento que tienen las trayectorias en cada caso, ya que éstas constituyen los principios básicos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

CASO 1 **Eigenvalores reales y desiguales del mismo signo.** La solución general de la ecuación (2) es

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2t}, \tag{5}$$

en donde r_1 y r_2 son los dos positivos y los dos negativos. Supóngase en primer lugar que $r_1 < r_2 < 0$ y que los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son como se indica en la figura 9.1.1*a*. Por la ecuación (5) se sigue que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ cuando $t \to \infty$, sin importar los valores de c_1 y c_2; en otras palabras, todas las soluciones tienden al punto crítico en el origen cuando $t \to \infty$. Si la



(a) (b)

FIGURA 9.1.1 Nodo impropio; $r_1 < r_2 < 0$. a) Plano fase. b) x_1 contra t.

solución parte de un punto inicial de la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, entonces $c_2 = 0$. Como consecuencia, la solución permanece sobre la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, para toda t, y se aproxima al origen cuando $t \to \infty$. De manera semejante, si el punto inicial está sobre la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, entonces la solución se aproxima al origen a lo largo de esa recta. En la situación general, es útil volver a escribir la ecuación (5) en la forma

$$\mathbf{x} = e^{r_2 t}[c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)}]. \tag{6}$$

En tanto que $c_2 \neq 0$, el término $c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} \exp[(r_1 - r_2)t]$ es despreciable en comparación con $c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)}$, para t suficientemente grande. Por tanto, cuando $t \to \infty$, la trayectoria no sólo se aproxima al origen, también tiende hacia la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. De donde, todas las soluciones se aproximan al punto crítico tangente a $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, excepto aquellas que se inician exactamente sobre la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. En la figura 9.1.1*a* se muestran varias trayectorias. En la figura 9.1.1*b* se presentan algunas gráficas típicas de x_1 contra t, que ilustran que todas las soluciones exhiben un decaimiento exponencial en el tiempo. El comportamiento de x_2 contra t es semejante. Este tipo de punto crítico se llama **nodo**, o algunas veces **nodo impropio**, para distinguirlo de otro tipo de nodo que se menciona después.

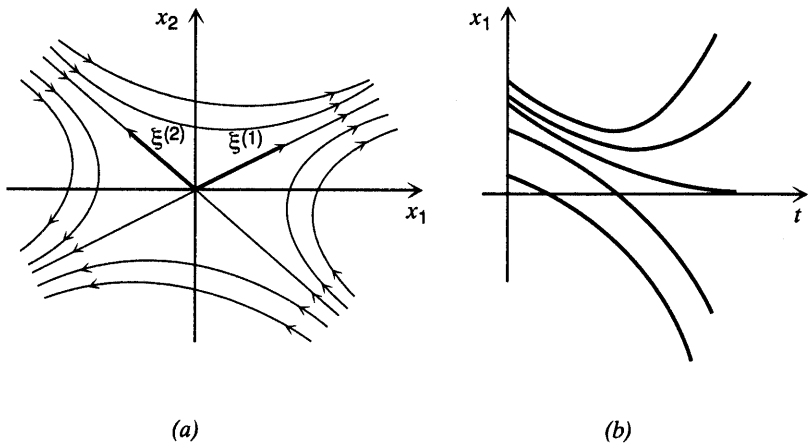
Si tanto r_1 como r_2 son positivos y $0 < r_1 < r_2$, entonces las trayectorias tienen el mismo patrón que el de la figura 9.1.1*a*, pero la dirección de movimiento se aleja del punto crítico en el origen, en vez de acercarse a éste. En este caso x_1 y x_2 crecen exponencialmente como funciones de t.

Un ejemplo de un nodo impropio se tiene en el ejemplo 2 de la sección 7.5 y sus trayectorias se muestran en la figura 7.5.2.

CASO 2 **Eigenvalores reales de signos opuestos.** La solución general de la ecuación (2) es

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 t}, \tag{7}$$

en donde $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$. Supóngase que los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son como se muestra en la figura 9.1.2*a*. Si la soluciónl parte de un punto inicial de la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, se concluye que $c_2 = 0$. Como consecuencia, la solución permanece sobre la recta que pasa



(a) *(b)*

FIGURA 9.1.2 Punto silla; $r_1 > 0$, $r_2 < 0$. a) Plano fase. b) x_1 contra t.

por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ para toda t y, como $r_1 > 0$, $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Si la solución parte de un punto inicial sobre la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, entonces la situación es semejante, excepto que $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, cuando $t \to \infty$ porque $r_2 < 0$. Las soluciones que parten de otros puntos iniciales siguen trayectorias como las que se muestran en la figura 9.1.2*a*. El exponencial positivo es el término dominante en la ecuación (7), para t grande, de modo que al final todas estas soluciones tienden al infinito asintóticamente a la recta determinada por el eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ correspondiente al eigenvalor positivo r_1. Las únicas soluciones que se aproximan al punto crítico en el origen son las que se inician precisamente sobre la recta determinada por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. En la figura 9.1.2*b* se muestran algunas gráficas típicas de x_1 contra t. Para ciertas condiciones iniciales, la solución no cuenta con el término exponencial positivo, de modo que $x_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$. Para todas las demás condiciones iniciales, el término exponencial positivo termina por dominar y hace que x_1 se vuelva no acotada. El comportamiento de x_2 es semejante. El origen se conoce como **punto silla** en este caso.

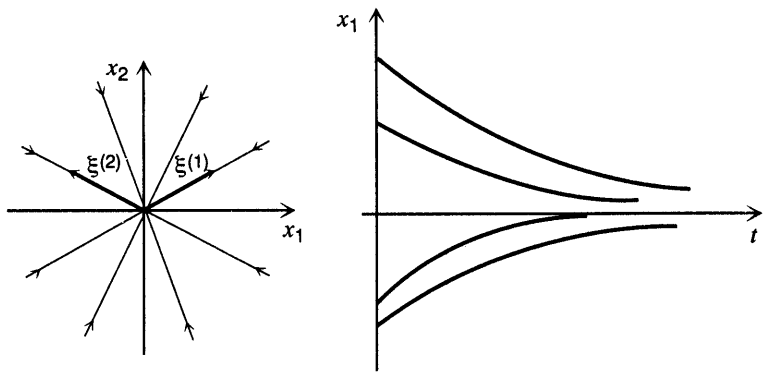
Un ejemplo específico de un punto silla se tiene en el ejemplo 1 de la sección 7.5, y sus trayectorias son las que se muestran en la figura 7.5.1.

CASO 3 **Eigenvalores iguales.** Supóngase ahora que $r_1 = r_2 = r$. Se considerará el caso en que los eigenvalores son negativos; si son positivos, las trayectorias son semejantes, pero se invierte la dirección del movimiento. Existen dos subcasos, dependiendo de si el eigenvalor repetido tiene dos eigenvectores independientes o solamente uno.

a) Dos eigenvectores independientes. La solución general de la ecuación (2) es

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{rt} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{rt}, \tag{8}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son los eigenvectores independientes. La razón x_2/x_1 es independiente de t, pero depende de las componentes de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, así como de las constantes arbitrarias c_1 y c_2. Por tanto, todas las trayectorias se encuentran sobre una recta que pasa por el origen, como se muestra en la figura 9.1.3*a*. En la figura 9.1.3*b* se muestran gráficas típicas de x_1 o x_2 contra t. El punto crítico se llama **nodo propio**.



(a) *(b)*

FIGURA 9.1.3 Nodo propio, dos eigenvectores independientes; $r_1 = r_2 < 0$. Plano fase. b) x_1 contra t.

b) Un eigenvector independiente. Como se muestra en la sección 7.7, en este caso la solución general de la ecuación (2) es

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt} + c_2(\boldsymbol{\xi}te^{rt} + \boldsymbol{\eta}e^{rt}), \tag{9}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ es el eigenvector y $\boldsymbol{\eta}$ es el eigenvector generalizado asociado con el eigenvalor repetido. Para t grande, el término dominante en la ecuación (9) es $c_2\boldsymbol{\xi}te^{rt}$. Por tanto, cuando $t \to \infty$, todas las trayectorias se aproximan al origen tangentes a la recta que pasa por el eigenvector. Esto es cierto incluso si $c_2 = 0$, porque entonces la solución $\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ se encuentra sobre esta recta. De manera semejante, para t negativa grande, el término $c_2\boldsymbol{\xi}te^{rt}$ es de nuevo el dominante, de modo que, cuando $t \to -\infty$, cada trayectoria es asintótica a una recta paralela a $\boldsymbol{\xi}$.

La orientación de las trayectorias depende de las posiciones relativas de $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$. En la figura 9.1.4*a* se muestra una situación posible. Para localizar las trayectorias resulta útil escribir la solución (9) en la forma

$$\mathbf{x} = [(c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t]e^{rt} = \mathbf{y}e^{rt}, \tag{10}$$

en donde $\mathbf{y} = (c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t$. Obsérvese que el vector $\mathbf{y}$ determina la dirección de $\mathbf{x}$, mientras que la cantidad escalar e^{rt} sólo afecta a la magnitud de $\mathbf{x}$. Nótese también que para valores fijos de c_1 y c_2, la expresión para $\mathbf{y}$ es una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ y es paralela a $\boldsymbol{\xi}$.

Para trazar la trayectoria correspondiente a una pareja dada de valores de c_1 y c_2, es posible proceder de la siguiente manera. En primer lugar trácese la recta dada por $(c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t$ y nótese la dirección de la t creciente sobre esta recta. En la figura 9.1.4 *a* se muestran dos de esas rectas, una para $c_2 > 0$ y la otra para $c_2 < 0$. A continuación, nótese que la trayectoria dada pasa por el punto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ cuando $t = 0$. Además, a medida que t crece, la dirección del vector $\mathbf{x}$ dado por la ecuación (10) sigue la dirección de la t creciente sobre la recta, pero la magnitud de $\mathbf{x}$ decrece con rapidez y tiende a cero, debido al factor

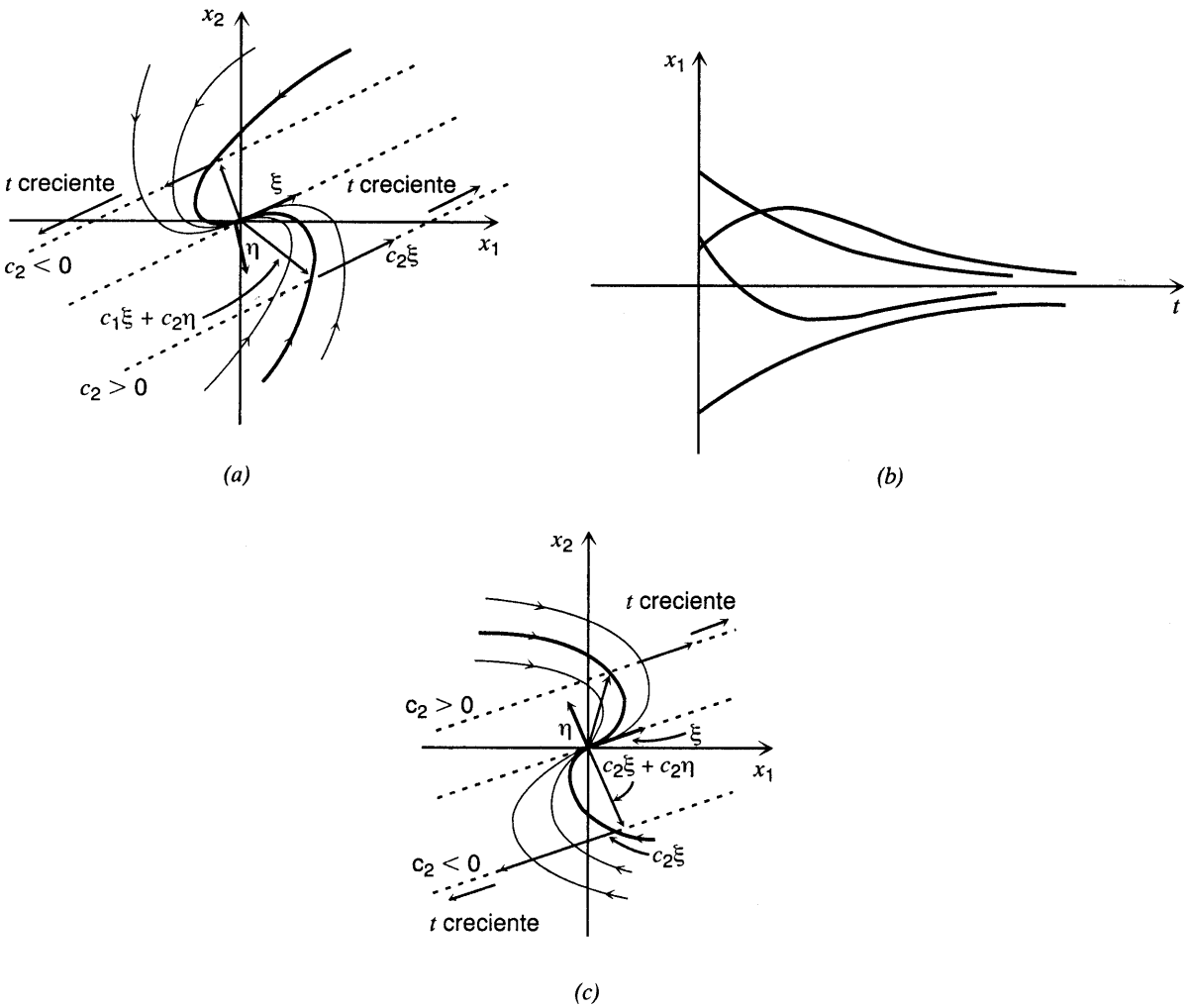


FIGURA 9.1.4 Nodo impropio, un eigenvector independiente: $r_1 = r_2 < 0$. a) Plano fase. b) x_1 contra t. c) Plano fase.

exponencial decreciente e^{rt}. Por último, cuando t decrece hacia $-\infty$, la dirección de $\mathbf{x}$ queda determinada por los puntos sobre la parte correspondiente de la recta y la magnitud de $\mathbf{x}$ tiende al infinito. De esta manera, se obtienen las trayectorias de trazo grueso de la figura 9.1.4 *a*. Para completar el diagrama también se trazaron algunas de las otras trayectorias con líneas más tenues. En la figura 9.1.4*b* se muestran gráficas típicas de x_1 contra t.

La otra situación posible se observa en la figura 9.1.4 *c*, en donde está invertida la orientación relativa de $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$. Como se indica en la figura, esto da por resultado una inversión en la orientación de las trayectorias.

Si $r_1 = r_2 > 0$, es posible trazar las trayectorias si se sigue el mismo procedimiento. En este caso, las trayectorias se recorren en la dirección hacia afuera y también se invierte la orientación de las trayectorias con respecto a las de $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$.

Cuando un eigenvalor doble sólo tiene un eigenvector independiente, el punto crítico se conoce una vez más como **nodo impropio.** Un ejemplo específico de este caso es el 1 de la sección 7.7 y las trayectorias se muestran en la figura 7.7.1.

CASO 4 **Eigenvalores complejos.** Supóngase que los eigenvalores son $\lambda \pm i\mu$, en donde λ y μ son reales, $\lambda \neq 0$ y $\mu > 0$. Es posible escribir la solución general en términos de los eigenvalores y los eigenvectores, como se indica en la sección 7.6. Sin embargo, aquí se procederá de manera diferente.

Los sistemas que tienen los eigenvalores $\lambda \pm i\mu$ se tipifican por

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{11}$$

o, en forma escalar,

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \qquad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2. \tag{12}$$

Se introducen las coordenadas polares r, θ definidas por

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \qquad \tan\theta = x_2/x_1.$$

Al derivar estas ecuaciones se obtiene

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \qquad (\sec^2\theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2. \tag{13}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (12) en la primera de las (13), se encuentra que

$$r' = \lambda r, \tag{14}$$

y, de donde,

$$r = ce^{\lambda t}, \tag{15}$$

en donde c es una constante. De manera semejante, si se sustituyen las ecuaciones (12) en la segunda de las (13) y se aplica el hecho de que $\sec^2\theta = r^2/x_1^2$, se tiene

$$\theta' = -\mu. \tag{16}$$

De donde,

$$\theta = -\mu t + \theta_0, \tag{17}$$

en donde θ_0 es el valor de θ cuando $t = 0$.

Las ecuaciones (15) y (17) son las ecuaciones paramétricas en coordenadas polares de las trayectorias del sistema (11). Como $\mu > 0$, por la (17) se deduce que θ decrece cuando t crece, por lo que la dirección del movimiento sobre una trayectoria es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Cuando $t \to \infty$, por la ecuación (15) se ve que $r \to 0$ si $\lambda < 0$ y $r \to \infty$ si $\lambda > 0$. Por tanto, las trayectorias son espirales que se aproximan o se alejan del origen, dependiendo del signo de λ. Las dos posibilidades se muestran en la figura 9.1.5, junto con algunas gráficas típicas de x_1 contra t. En este caso, el punto crítico se conoce como **punto espiral.**

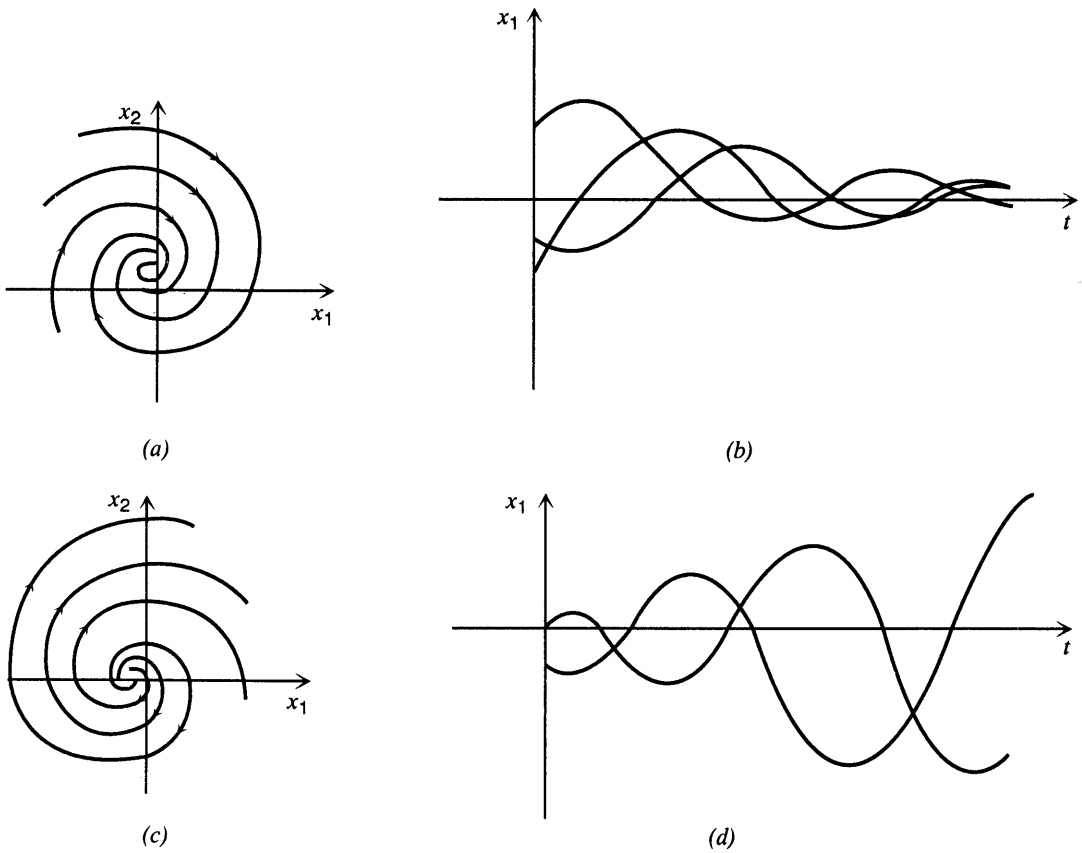


FIGURA 9.1.5 Punto espiral; $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$. a) $\lambda < 0$, plano fase. b) $\lambda < 0$, x_1 contra t. c) $\lambda > 0$, plano fase. d) $\lambda > 0$, x_1 contra t.

De manera más general, es posible demostrar que para cualquier sistema con eigenvalores complejos $\lambda \pm i\mu$, en donde $\lambda \neq 0$, las trayectorias siempre son espirales; dirigidas hacia dentro o hacia fuera, respectivamente, dependiendo de si λ es negativa o positiva. Pueden ser alargadas o sesgadas con respecto a los ejes de coordenadas, y la dirección del movimiento puede ser en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o en sentido contrario. Aunque un análisis detallado es un poco difícil, es fácil obtener una idea general de la orientación de las trayectorias directamente a partir de las ecuaciones diferenciales. Supóngase que

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{18}$$

tiene los eigenvalores complejos $\lambda \pm i\mu$ y considérese el punto (0,1) sobre el eje y positivo. En este punto, por las ecuaciones (18) se concluye que $dx/dt = b$ y $dy/dt = d$. Dependiendo de los signos de b y d, es posible inferir la dirección del movimiento y la orientación aproximada de las trayectorias. Por ejemplo, si b y d son negativos, entonces las trayectorias

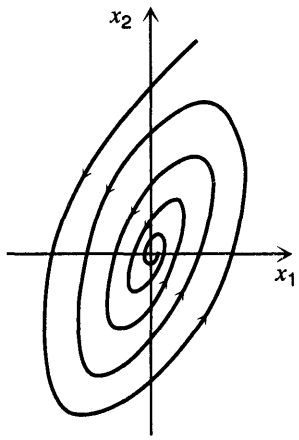


FIGURA 9.1.6 Punto espiral; $r = \lambda \pm i\mu$ con $\lambda < 0$.

cruzan el eje y positivo como si se dirigiesen hacia abajo y hacia el segundo cuadrante. Si también $\lambda < 0$, entonces las trayectorias deben ser espirales hacia adentro como la de la figura 9.1.6. En el ejemplo 1 de la sección 7.6 se dio otro caso, cuyas trayectorias se muestran en la figura 9.6.1.

CASO 5 **Eigenvalores imaginarios puros.** En este caso, $\lambda = 0$ y el sistema (11) se reduce a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \tag{19}$$

con eigenvalores $\pm i\mu$. Si se aplica el mismo argumento que en el caso 4, se encuentra que

$$r' = 0, \qquad \theta' = -\mu, \tag{20}$$

y, por consecuencia,

$$r = c, \qquad \theta = -\mu t + \theta_0, \tag{21}$$

en donde c y θ_0 son constantes. Por tanto, las trayectorias son circunferencias con centros en el origen que se recorren en el sentido del movimiento de los manecillas del reloj si $\mu > 0$ y en sentido contrario si $\mu < 0$. Se realiza un circuito completo alrededor del origen en un intervalo de tiempo de duración $2\pi/\mu$, por lo que todas las soluciones son periódicas con periodo $2\pi/\mu$. El punto crítico se llama **centro.**

En general, cuando los eigenvalores son imaginarios puros, es posible demostrar (ver el problema 19) que las trayectorias son elipses con centro en el origen. Una situación típica se muestra en la figura 9.1.7, en la que también se ilustran algunas gráficas típicas de x_1 contra t.

Al reflexionar en estos cinco casos y analizar las figuras correspondientes, es posible realizar varias observaciones.

1. Después de mucho tiempo cada trayectoria individual exhibe sólo uno de tres tipos de comportamiento. De hecho, cuando $t \to \infty$, cada trayectoria tiende al infinito, se aproxima

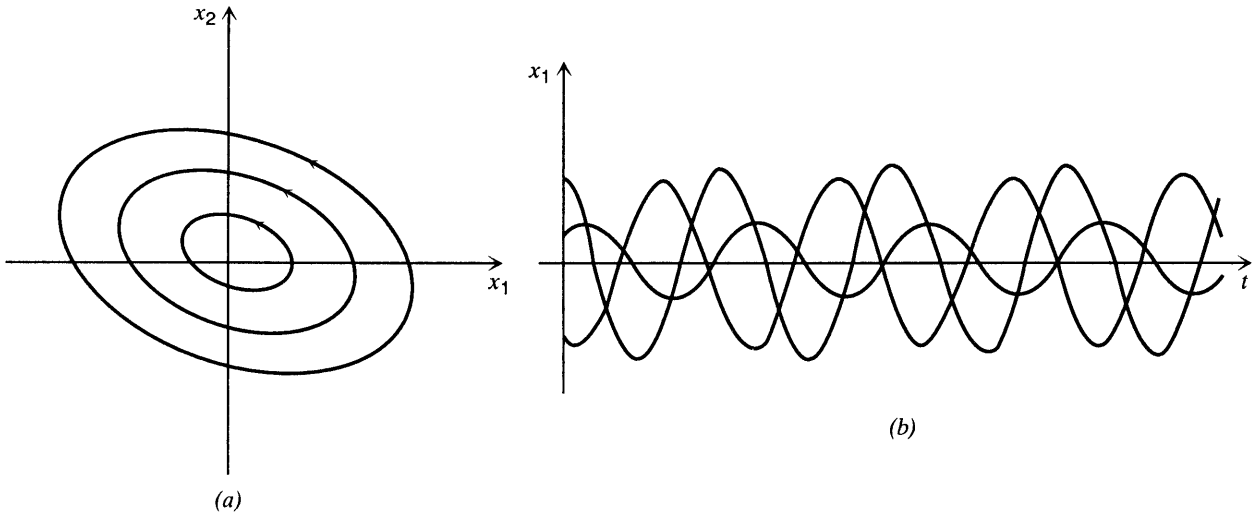


FIGURA 9.1.7 Centro $r_1 = i\mu$, $r_2 = -i\mu$. a) Plano fase. b) x_1 contra t.

al punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o, de manera repetida, recorre una curva cerrada, correspondiente a una solución periódica, que rodea al punto crítico.

2. Considerado como un todo, el patrón de las trayectorias en cada caso es relativamente simple. Para ser más específicos, por cada punto (x_0, y_0) en el plano fase existe sólo una trayectoria; por tanto, las trayectorias no se cortan entre sí. No hay que malinterpretar las figuras, en lo que a veces parece que muchas trayectorias pasan por el punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De hecho, la única solución que pasa por el origen es la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Las otras soluciones que parecen pasar por el origen en realidad sólo se aproximan a este punto $t \to \infty$ o $t \to -\infty$.
3. En cada caso, el conjunto de todas las trayectorias es tal que ocurre una de tres situaciones.
   a) Todas las trayectorias se aproximan al punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ cuando $t \to \infty$. Este es el caso si los eigenvalores son reales y negativos o complejos con parte real negativa.
   b) Todas las trayectorias permanecen acotadas pero no se aproximan al origen cuando $t \to \infty$. Este es el caso si los eigenvalores son imaginarios puros.
   c) Por lo menos una de las trayectorias (o quizá todas) tiende al infinito cuando $t \to \infty$. Este es el caso, si por lo menos uno de los eigenvalores es positivo o si los eigenvalores tienen parte real positiva.

Las situaciones descritas en a), b) y c) ilustran los conceptos de estabilidad asintótica, estabilidad e inestabilidad, respectivamente, o la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema (2).

Las definiciones precisas de estos términos se dan en la sección 9.2, pero su significado básico debe quedar claro con base en el análisis geométrico de esta sección. En la tabla 9.1.1 se resume la información obtenida acerca del sistema (2). Ver también los problemas 20 y 21, y la figura 9.1.9 que acompaña a estos problemas.

El análisis hecho en esta sección sólo es válido para los sistemas de segundo orden $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cuyas soluciones se representan geométricamente como curvas en el plano fase. Es

TABLA 9.1.1 Propiedades de estabilidad de los sistemas lineales.

$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$	$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$ $\det \mathbf{A} \neq 0$	
Eingenvalores	Tipo de punto crítico	Estabilidad
$r_1 > r_2 > 0$	Nodo impropio	Inestable
$r_1 < r_2 < 0$	Nodo impropio	Asintóticamente estable
$r_2 < 0 < r_1$	Punto silla	Inestable
$r_1 = r_2 > 0$	Nodo propio o impropio	Inestable
$r_1 = r_2 < 0$	Nodo propio o impropio	Asintóticamente estable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Punto espiral	
$\lambda > 0$		Inestable
$\lambda < 0$		Asintóticamente estable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estable

posible hacer un análisis semejante, aunque más complicado, para un sistema de n-ésimo orden, con una matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de $n \times n$ cuyas soluciones sean curvas en un espacio fase n-dimensional.

Los casos que pueden ocurrir en los sistemas de orden superior son esencialmente combinaciones de los que se han visto en dos dimensiones. Por ejemplo, en un sistema de tercer orden con un espacio fase tridimensional, una posibilidad es que las soluciones en cierto plano puedan describir espirales hacia el origen, mientras que otras pueden tender al infinito a lo largo de una recta transversal a este plano. Este sería el caso si la matriz de coeficientes tiene dos eigenvalores complejos con parte real negativa y un eigenvalor real positivo. Sin embargo, debido a su complejidad, aquí no se analizarán sistemas de orden superior al segundo.

Problemas

Para cada uno de los sistemas de los problemas 1 a 12:

a) Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores.

b) Clasifique el punto crítico (0, 0) según su tipo y determine si es estable, asintóticamente estable o inestable.

c) Trace varias trayectorias en el plano fase y también la gráfica de x_1 contra t.

d) En caso de ser posible, use una computadora para trazar con exactitud las curvas solicitadas en el inciso c).

1. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

9. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los problemas 13 a 16 determine el punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$; a continuación clasifique su tipo y examine su estabilidad al realizar la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}$.

13. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

14. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

16. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

17. La ecuación del movimiento de un sistema resorte-masa con amortiguamiento (ver la sección 3.8) es

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = 0,$$

en donde m, c y k son positivos. Escriba esta ecuación de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden para $x = u$, $y = du/dt$. Demuestre que $x = 0$, $y = 0$ es un punto crítico y analice la naturaleza y estabilidad de ese punto crítico como una función de los parámetros m, c y k. Se puede aplicar un análisis semejante a la ecuación del circuito eléctrico (ver la sección 3.8)

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0.$$

18. Considere el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y suponga que $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor igual a cero.
    a) Demuestre que $\mathbf{x} = 0$ es un punto crítico, pero no aislado.
    b) Sean $r_1 = 0$ y $r_2 \neq 0$ y $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ los eigenvectores correspondientes. Demuestre que las trayectorias son como se indica en la figura 9.1.8. ¿Cuál es la dirección del movimiento sobre las trayectorias?

19. En este problema se indica cómo demostrar que las trayectorias son elipses cuando los eigenvalores son imaginarios puros. Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{i}$$

a) Demuestre que los eigenvalores de la matriz de coeficientes son imaginarios puros si y sólo si

$$a + d = 0, \qquad ad - bc > 0. \tag{ii}$$

b) Pueden hallarse las trayectorias del sistema (i) al convertir las ecuaciones (i) en la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{cx + dy}{ax + by}. \tag{iii}$$

Aplique la primera de las ecuaciones (ii) para demostrar que (iii) es exacta.

c) Integre la ecuación (iii) para demostrar que

$$cx^2 + 2dxy - by^2 = k, \tag{iv}$$

en donde k es una constante. Use las ecuaciones (ii) para concluir que la gráfica de la ecuación (iv) siempre es una elipse. *Sugerencia:* ¿cuál es la discriminante de la forma cuadrática dada en la ecuación (iv)?

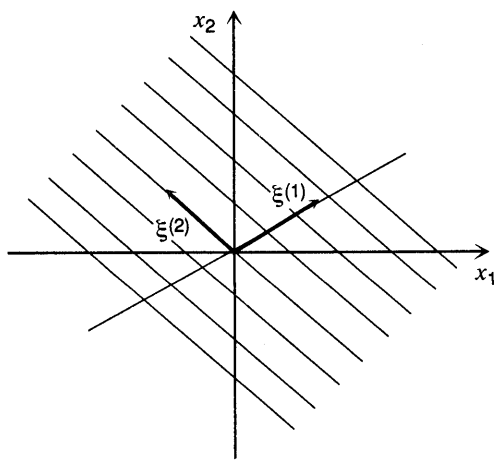


FIGURA 9.1.8 Punto crítico no aislado; $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$.

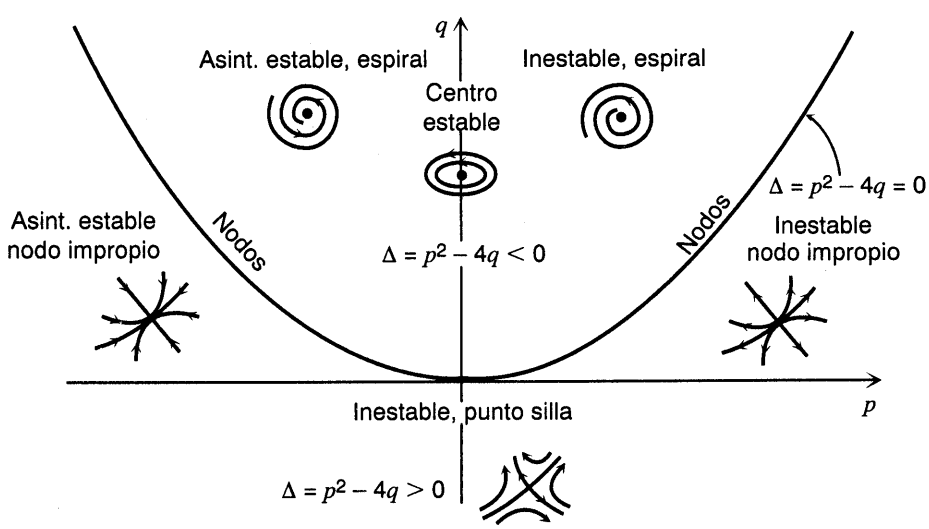


FIGURA 9.1.9 Diagrama de estabilidades.

20. Considere el sistema lineal

$$dx/dt = ax + by, \qquad dy/dt = cx + dy,$$

en donde a, b, c y d son constantes reales. Sean $p = a + d$, $q = ad - bc$ y $\Delta = p^2 - 4q$. Demuestre que el punto crítico (0, 0) es un

a) nodo si $q > 0$ $\Delta \geq 0$; b) punto silla si $q < 0$;

c) punto espiral si $p \neq 0$ y $\Delta < 0$; d) centro si $p = 0$ y $q > 0$.

Sugerencia: Es posible llegar a estas conclusiones al estudiar los eigenvalores r_1 y r_2. También puede ser útil demostrar, y luego aplicar, las relaciones $r_1 r_2 = q$ y $r_1 + r_2 = p$.

21. Continuando con el problema 20, demuestre que el punto crítico (0, 0) es

a) asintóticamente estable si $q > 0$ y $p < 0$;

b) estable si $q > 0$ y $p = 0$;

c) inestable si $q < 0$ o $p > 0$.

Observe que los resultados a), b) y c), junto con el hecho de que $q \neq 0$, demuestran que el punto crítico es asintóticamente estable si y sólo si $q > 0$ y $p < 0$. Los resultados de los problemas 20 y 21 se resumen de manera conveniente en la figura 9.1.9.

9.2 Sistemas autónomos y estabilidad

En esta sección se empiezan a reunir y desarrollar las ideas geométricas introducidas en la sección 2.6, para ciertas ecuaciones de primer orden, y en la sección 9.1, para los sistemas lineales homogéneos de segundo orden con coeficientes constantes. Estas ideas tienen que ver con el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales y el concepto de estabilidad, concepto que se definirá con precisión posteriormente en esta sección.

Sistemas autónomos. Se tiene interés en los sistemas de dos ecuaciones diferenciales simultáneas de la forma

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y). \tag{1}$$

Se supone que las funciones F y G son continuas y que tienen derivadas parciales continuas en algún dominio D del plano xy. Si (x_0, y_0) es un punto en este dominio entonces, por el teorema 7.1.1, existe una solución única $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ del sistema (1) que satisface las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

La solución está definida en algún intervalo I que contiene el punto t_0.

Con frecuencia, el problema con valor inicial (1), (2) se escribirá en la forma vectorial

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \tag{3}$$

en donde $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$ y $\mathbf{x}^0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$. En este caso, la solución se expresa como $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$, en donde $\boldsymbol{\phi}(t) = \phi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$. Como de costumbre, una solución $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ se interpreta como una curva recorrida por un punto móvil en el plano xy, el plano fase.

Obsérvese que el sistema (1) no contiene de manera explícita a la variable independiente t. Se dice que un sistema con esta propiedad es **autónomo**. El sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4}$$

en donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante, es el ejemplo más sencillo de un sistema autónomo bidimensional. Por otra parte, si uno o más de los elementos de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es una función de la variable independiente t, entonces el sistema es no autónomo. La distinción entre sistemas autónomos y no autónomos es importante porque el análisis geométrico cualitativo de la sección 9.1 puede extenderse eficazmente a sistemas autónomos bidimensionales en general, pero no es tan útil para los sistemas no autónomos. A fin de aclarar esta diferencia importante entre los sistemas autónomos y los no autónomos, se considerarán dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1 Describir las trayectorias que pasan por el punto (1, 2) para el sistema

$$dx/dt = x, \qquad dy/dt = y. \tag{5}$$

Este problema puede visualizarse al suponer que en el punto (1, 2) se emiten partículas de manera continua y, a continuación, se mueven en el plano xy según las ecuaciones diferenciales (5). La partícula emitida en el instante $t = s$ se especifica por las condiciones iniciales $x(s) = 1$, $y(s) = 2$. ¿Cuál es la trayectoria de la partícula para $t \geq s$? La solución de las ecuaciones (5) que satisface estas condiciones iniciales es

$$x = \phi(t; s) = e^{t-s}, \qquad y = \psi(t; s) = 2e^{t-s}, \qquad t \geq s. \tag{6}$$

Las trayectorias seguidas por las partículas que se emiten en diferentes instantes s pueden visualizarse con más facilidad si de las ecuaciones (6) se elimina t; esto da

$$y = 2x, \tag{7}$$

en donde, a partir de las ecuaciones (6), es evidente que $x \geq 1$, $y \geq 2$. En la figura 9.2.1 se observa la parte de la recta $y = 2x$ correspondiente a las ecuaciones (6), con la dirección de movimiento indicada por una flecha. Lo que importa es que en la ecuación (7) no aparece el

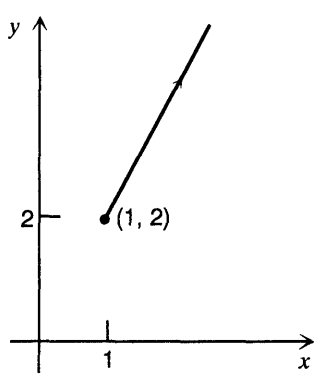


FIGURA 9.2.1 Para un sistema autónomo hay una trayectoria que pasa por cada punto.

instante inicial s. Por consiguiente, no importa cuándo se emita una partícula desde el punto (1, 2), siempre se mueve a lo largo de la misma curva; sólo existe una trayectoria que pasa por el punto (1, 2).

Ejemplo 2 Describir las trayectorias que pasan por el punto (1, 2) para el sistema

$$dx/dt = x/t, \qquad dy/dt = y. \tag{8}$$

Obsérvese que la primera de las ecuaciones (8) comprende explícitamente a t en el segundo miembro de la ecuación; de donde, el sistema (8) es no autónomo. La solución de las ecuaciones (8) que satisface las condiciones iniciales $x(s) = 1$, $y(s) = 2$ es

$$x = \phi(t; s) = t/s, \qquad y = \psi(t; s) = 2e^{t-s}, \qquad t \geq s. \tag{9}$$

Al resolver la primera de las ecuaciones (9) se obtiene $t = sx$. Luego, al sustituir en la segunda de ellas se obtiene

$$y = 2e^{s(x-1)}, \tag{10}$$

en donde una vez más $x \geq 1$. En virtud de que s aparece en la ecuación (10), la trayectoria que siga una partícula depende del instante en el que se emite; es decir, el instante en el que se aplica la condición inicial. Por tanto, existen una infinidad de trayectorias que se originan en el punto (1, 2). En la figura 9.2.2 están trazadas las trayectorias seguidas por partículas que se emiten en instantes diferentes.

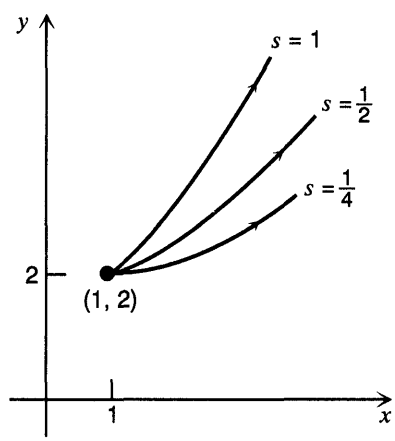


FIGURA 9.2.2 Para un sistema no autónomo hay muchas trayectorias que pasan por cada punto.

En el primer ejemplo, cuando se eliminó la variable t, automáticamente también se eliminó s, ya que t y s sólo aparecían en la combinación $t - s$. En el segundo ejemplo no fue así, y s permaneció en el resultado final (10). Estos ejemplos ilustran una propiedad básica de los sistemas autónomos, a saber, todas las partículas que pasan por un punto dado siguen la misma curva en el plano fase. Como resultado, el patrón de trayectorias en el plano fase es

relativamente sencillo. Por otra parte, para un sistema no autónomo por lo general existe una infinidad de trayectorias distintas por cada punto y, por lo tanto, la colección de trayectorias es notablemente confusa.

Una proposición más analítica de la propiedad que se da en el párrafo anterior es la siguiente: supóngase que $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ es una solución de las ecuaciones (1) para $-\infty < t < \infty$. Si s es cualquier constante, entonces $x = \phi(t - s)$, $y = \psi(t - s)$ también es una solución de ellas para $-\infty < t < \infty$. Esto se verifica con facilidad al sustituir las últimas expresiones para x y y en las ecuaciones diferenciales (1). Por tanto, la misma curva en el plano fase se representa paramétricamente por muchas soluciones distintas que difieren entre sí por traslaciones de la variable de tiempo t; es decir, por selecciones diferentes del instante inicial. Esto se ilustra en la figura 9.2.1, en donde todas las soluciones del sistema (5) que pasan por el punto (1, 2) están sobre la recta $y = 2x$.

Pueden hallarse las trayectorias de sistemas bidimensionales autónomos, como en el ejemplo 1, al resolver el sistema y luego eliminar el parámetro t. En muchos casos, también es posible encontrarlas si se resuelve una ecuación diferencial relacionada de primer orden. De las ecuaciones (1) se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \tag{11}$$

que es una ecuación de primer orden en las variables x y y. Obsérvese que esta reducción no suele ser posible si F y G también dependen de t. Si la ecuación (11) puede resolverse por cualquiera de los métodos del capítulo 2, su solución suministra una ecuación para las trayectorias del sistema (1).

Por ejemplo, para el sistema

$$dx/dt = x, \qquad dy/dt = y$$

del ejemplo 1, se tiene

$$dy/dx = y/x,$$

cuya solución general es $y = cx$. Si el punto inicial es (1, 2), entonces es necesario elegir $c = 2$, de modo que $y = 2x$, con $x \geq 1$, es la ecuación de la trayectoria que pasa por (1, 2).

Los sistemas autónomos se presentan con frecuencia en las aplicaciones. Físicamente, un sistema autónomo es aquel cuya configuración, incluyendo parámetros físicos y fuerzas o efectos externos, es independiente del tiempo. Entonces, la respuesta del sistema a las condiciones iniciales dadas es independiente del instante en el que se imponen esas condiciones.

Estabilidad e inestabilidad. Ya se han mencionado varias veces en este libro los conceptos de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad. Es el momento de dar una definición matemática precisa de estos conceptos, al menos para los sistemas autónomos de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{12}$$

En las siguientes definiciones, y en todo lo demás, se usa la notación $\|\mathbf{x}\|$ para designar la longitud o magnitud del vector $\mathbf{x}$.

Los puntos, si los hay, en donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se llaman **puntos críticos** del sistema autónomo (12). En esos puntos, también $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, por lo que los puntos críticos corresponden a soluciones constantes, o de equilibrio, del sistema de ecuaciones diferenciales. Se dice que un

punto crítico $\mathbf{x}^0$ del sistema (12) es **estable** si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que la solución $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ del sistema (1), que en $t = 0$ satisface

$$\|\boldsymbol{\phi}(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta, \tag{13}$$

existe y satisface

$$\|\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon \tag{14}$$

para toda $t \geq 0$. Esto se ilustra geométricamente en la figura 9.2.3*a* y *b*. Estas proposiciones matemáticas afirman que todas las soluciones que se inician lo "suficientemente cerca" (es decir, a menos de la distancia δ) de $\mathbf{x}^0$ permanecen "cerca" (a menos de la distancia ϵ) de $\mathbf{x}^0$. Nótese que en la figura 9.2.3*a* la trayectoria está dentro del círculo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \delta$ en $t = 0$ y, aunque pronto sale de este círculo, permanece en el interior del círculo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \epsilon$ para toda $t \geq 0$. Sin embargo, la trayectoria de la solución no tiene que aproximarse al punto crítico $\mathbf{x}^0$ cuando $t \to \infty$, como se ilustra en la figura 9.2.3*b*. Se dice que un punto crítico es **inestable** si es no estable.

Se dice que un punto crítico $\mathbf{x}^0$ es **asintóticamente estable** si es estable y si existe un δ_0, con $0 < \delta_0 < \delta$, tal que si una solución $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ satisface

$$\|\boldsymbol{\phi}(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0, \tag{15}$$

entonces

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{x}^0. \tag{16}$$

Por tanto, las trayectorias que se inician "suficientemente cerca" de $\mathbf{x}^0$ no sólo deben permanecer "cerca", al final deben aproximarse a $\mathbf{x}^0$ cuando $t \to \infty$. Este es el caso de la trayectoria de la figura 9.2.3*a*, pero no para la de la figura 9.2.3*b*. Nótese que la estabilidad asintótica es una propiedad más fuerte que la estabilidad, ya que un punto crítico debe ser estable antes de que incluso sea posible hablar sobre si es asintóticamente estable. Por otra parte, la condición límite (16), que es una característica esencial de la estabilidad asintótica, no implica por sí misma ni siquiera estabilidad ordinaria. De hecho, es posible construir ejemplos en los que todas las trayectorias se aproximen a $\mathbf{x}^0$ cuando $t \to \infty$, pero para los

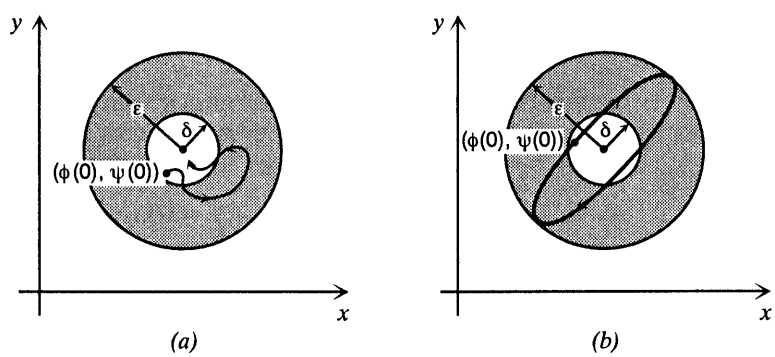


FIGURA 9.2.3 a) Estabilidad asintótica. b) Estabilidad.

que $\mathbf{x}^0$ no sea un punto crítico estable[2]. Geométricamente, todo lo que se necesita es una familia de trayectorias que tenga elementos que se inicien arbitrariamente cerca de $\mathbf{x}^0$ y luego se aparten una distancia arbitrariamente grande, antes de, por último, aproximarse a $\mathbf{x}^0$ cuando $t \to \infty$.

Aunque originalmente se especificó que el sistema (2) es de segundo orden, las definiciones que acaban de darse son independientes del orden del sistema. Si el lector interpreta los vectores de las ecuaciones (12) a (16) como n-dimensionales, las definiciones de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad también se aplican a los sistemas de n-ésimo orden. Estas definiciones se pueden hacer más concretas al interpretarlas en términos de un problema físico específico.

Péndulo oscilante. Los conceptos de estabilidad asintótica, estabilidad e inestabilidad pueden visualizarse con facilidad en términos de un péndulo oscilante. Considérese la configuración que se muestra en la figura 9.2.4, en la cual una masa m está sujeta a uno de los extremos de una varilla rígida, pero sin peso, de longitud l. El otro extremo de la varilla está sostenido en el origen O y la varilla puede girar con libertad en el plano del papel. La posición del péndulo se describe por el ángulo θ entre la varilla y la dirección vertical hacia abajo, en donde la dirección en contra del sentido del movimiento de las manecillas del reloj se considera positiva. La fuerza gravitacional mg actúa hacia abajo, mientras que la fuerza de amortiguamiento $c|d\theta/dt|$, en donde c es positiva, siempre es opuesta a la dirección del movimiento. Se supone que θ y $d\theta/dt$ son positivas. Las ecuaciones del movimiento puede deducirse rápidamente a partir del principio de la cantidad de movimiento angular, la que afirma que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular, con respecto a cualquier punto, es igual al momento de la fuerza resultante en torno a ese punto. La cantidad de movimiento angular con respecto al origen es $ml^2(d\theta/dt)$, por lo que la ecuación que rige es

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -cl\frac{d\theta}{dt} - mgl \operatorname{sen} \theta. \tag{17}$$

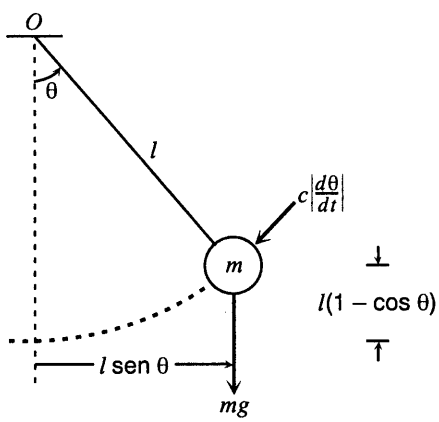


FIGURA 9.2.4 Péndulo oscilante.

[2] Estos ejemplos son bastante complicados (ver Cesari, p. 96).

Los factores l y l sen θ del segundo miembro de la ecuación (17) son los brazos de momento de la fuerza de resistencia y de la fuerza gravitacional, respectivamente, mientras que los signos negativos se deben al hecho de que las dos fuerzas tienden a hacer que el péndulo gire en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj (negativo). El lector debe comprobar, como ejercicio, que para las otras tres posibles combinaciones de signo de θ y $d\theta/dt$ se obtiene la misma ecuación.

Mediante operaciones algebraicas directas es posible escribir la ecuación (17) en la forma estándar

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{ml}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{18}$$

Para transformar la ecuación (18) en un sistema de dos ecuaciones de primer orden, se hace $x = \theta$ y $= d\theta/dt$; entonces,

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x - \frac{c}{ml}y. \tag{19}$$

Como c, g, l y m son todas constantes, el sistema (19) es autónomo de la forma (1).

Los puntos críticos de las ecuaciones (19) se encuentran al resolver

$$y = 0, \qquad -(g/l)\operatorname{sen} x - (c/ml)y = 0.$$

Como consecuencia, $y = 0$ y $x = \pm n\pi$, en donde n es un entero. Estos corresponden a dos posiciones de equilibrio físico, una con la masa directamente debajo del punto de apoyo ($\theta = 0$) y la otra con la masa directamente arriba del punto de apoyo ($\theta = \pi$). La intuición sugiere que la primera es estable y que la segunda es inestable.

Con más precisión, si la masa se desplaza ligeramente de la posición de equilibrio inferior, oscilará de uno a otro lado con una amplitud gradualmente decreciente, aproximándose al final de la posición de equilibrio, a medida que se disipa la energía potencial inicial por la fuerza de amortiguamiento. Este tipo de movimiento ilustra la *estabilidad asintótica.*

Por otra parte, si la masa se desplaza ligeramente de la posición de equilibrio superior, cae rápidamente por efecto de la gravedad y jamás regresa a la posición de equilibrio original o se aproxima a ella. De hecho, también en este caso, la masa se aproximará al final a la posición de equilibrio inferior. Este tipo de movimiento ilustra la *inestabilidad.* En la práctica, es imposible mantener el péndulo en su posición de equilibrio superior, durante cualquier intervalo de tiempo, sin un mecanismo externo de restricción, ya que la más ligera perturbación provocará la caída de la masa.

Por último, considérese la situación ideal en la que el coeficiente de amortiguamiento c es cero. En este caso, si la masa se desplaza ligeramente desde su posición de equilibrio inferior, oscilará indefinidamente con amplitud constante alrededor de esa posición de equilibrio. Dado que en el sistema no hay disipación, la masa permanecerá cerca de la posición de equilibrio, pero no se aproximará a ésta de manera asintótica. Este tipo de movimiento es *estable*, pero no asintóticamente estable. En general, es imposible lograr experimentalmente este movimiento porque el más ligero grado de resistencia del aire o fricción en el punto de sostén provocará al final que el péndulo se aproxime a su posición de reposo.

En la figura 9.2.5 se ilustra de manera esquemática estos tres tipos de movimiento.

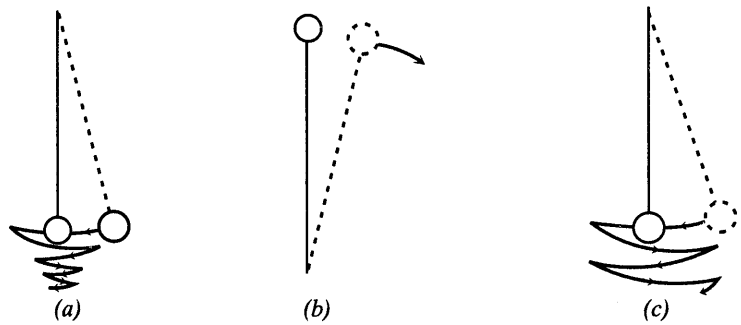


FIGURA 9.2.5 Movimiento cualitativo de un péndulo. a) Con resistencia del aire. b) Con o sin resistencia del aire. c) Sin resistencia del aire.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, trace la trayectoria correspondiente a la solución que satisface las condiciones iniciales especificadas e indique la dirección del movimiento para la t creciente.

1. $dx/dt = -x, \quad dy/dt = -2y; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 2$
2. $dx/dt = -x, \quad dy/dt = 2y; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 2 \quad$ y $\quad x(0) = 4, \quad y(0) = 0$
3. $dx/dt = -y, \quad dy/dt = x; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 0 \quad$ y $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 4$
4. $dx/dt = ay, \quad dy/dt = -bx, \quad a > 0, b > 0; \quad x(0) = \sqrt{a}, \quad y(0) = 0$

En cada uno de los problemas 5 a 8, determine los puntos críticos del sistema dado.

5. $dx/dt = x - xy, \quad dy/dt = y + 2xy$
6. $dx/dt = x - x^2 - xy, \quad dy/dt = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy$
7. $dx/dt = y, \quad dy/dt = -(g/l)\operatorname{sen} x - (c/ml)y; \quad g, l, c, m > 0$
8. La ecuación de Van der Pool: $d\,x/dt = y, \quad dy/dt = \mu(1 = x^2)y - x, \quad \mu > 0$

9. Dado que $x = \phi(t), y = \psi(t)$ es una solución del sistema autónomo

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y)$$

para $\alpha < t < \beta$, demuestre que $x = \Phi(t) = \phi(t - s), y = \Psi(t) = \psi(t - s)$ es una solución para $\alpha + s < t < \beta + s$.

10. Demuestre por integración directa que aun cuando el segundo miembro del sistema

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1 + t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1 + t}$$

depende de t, las trayectorias seguidas por las partículas emitidas en (x_0, y_0), en el instante $t = 0$, son las mismas sin importar el valor de s. ¿A qué se debe esto?
Sugerencia: considere la ecuación (11) para este caso.

11. Considere el sistema

$$dx/dt = F(x, y, t), \qquad dy/dt = G(x, y, t).$$

Demuestre que si las funciones $F/(F^2 + G^2)^{1/2}$ y $G/(F^2 + G^2)^{1/2}$ son independientes de t, entonces las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales $x(s) = x_0, y(s) = y_0$ dan las mismas trayectorias sin importar al valor de s.
Sugerencia: aplique la ecuación (11).

12. Demuestre que las trayectorias de la ecuación no lineal del péndulo no amortiguado $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\text{sen}\,\theta = 0$ se expresan por

$$(g/l)(1 - \cos x) + (y^2/2) = c,$$

en donde $x = \theta$ y $= d\theta/dt$.
Sugerencia: demuestre que $d^2\theta/dt^2 = y(dy/dx)$.

13. Determine una ecuación para las trayectorias de

$$d^2\theta/dt^2 + \theta - \alpha\theta^3 = 0,$$

en donde α es una constante. Haga $x = \theta$ y $d\theta/dt$.

14. Demuestre que las trayectorias de

$$d^2\theta/dt^2 + f(\theta) = 0$$

se expresan por

$$F(x) + (y^2/2) = c,$$

en donde F es una antiderivada de f, $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$.

15. Demuestre que para el sistema

$$dx/dt = F(x, y), \quad dy/dt = G(x, y)$$

existe cuando más una trayectoria que pasa por un punto dado (x_0, y_0).
Sugerencia: sean C_0 la trayectoria generada por la solución $x = \phi_0(t), y = \psi_0(t)$ con $\phi_0(t_0) = x_0, \psi_0(t_0) = y_0$, y C_1 la trayectoria generada por la solución $x = \phi_1(t), y = \psi_1(t)$, con $\phi_1(t_1) = x_0, \psi_1(t) = y_0$. Aplique el hecho de que el sistema es autónomo y también el teorema de existencia y unicidad para demostrar que C_0 y C_1 son la misma.

16. Demuestre que si una trayectoria se inicia en un punto no crítico del sistema

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y),$$

no puede llegar a un punto crítico (x_0, y_0) en un intervalo de tiempo finito.
Sugerencia: suponga lo contrario; es decir, suponga que la solución $x = \phi(t), y = \psi(t)$ satisface $\phi(a) = x_0, \psi(a) = y_0$. Luego aplique el hecho de que $x = x_0, y = y_0$ es una solución del sistema dado, que satisface la condición inicial $x = x_0, y = y_0$, en $t = a$.

17. Si se supone que la trayectoria correspondiente a una solución $x = \phi(t), y = \psi(t), -\infty < t < \infty$, de un sistema autónomo es cerrada, demuestre que la solución es periódica.
Sugerencia: dado que la trayectoria es cerrada, existen por lo menos un punto (x_0, y_0) tal que $\phi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0$ y un número $T > 0$ tal que $\phi(t_0 + T) = x_0, \psi(t_0 + T) = y_0$. Demuestre que $x = \Phi(t) = \phi(t + T)$ y $= \Psi(t) = \psi(t + T)$ es una solución y luego aplique el teorema de existencia y unicidad para demostrar que $\Phi(t) = \phi(t)$ y $\Psi(t) = \psi(t)$ para toda t.

9.3 Sistemas casi lineales

En la sección 9.1 se dio una descripción informal de las propiedades de estabilidad de la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema lineal bidimensional

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1}$$

En la tabla 9.1.1 se resumen los resultados. Recuérdese que se requirió que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es el único punto crítico del sistema (1). Ahora que se definieron con más precisión los conceptos de estabilidad asintótica, estabilidad e inestabilidad, es posible volver a plantear estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 9.3.1

El punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del sistema lineal (1) es

asintóticamente estable si los eigenvalores r_1 y r_2 son reales y negativos o tienen parte real negativa;
estable, pero no asintóticamente estable, si r_1 y r_2 son imaginarios puros;
inestable si r_1 y r_2 son reales y cualquiera de los dos es positivo o si tienen parte real positiva.

Con base en este teorema o en la tabla 9.1.1 resulta evidente que los eigenvalores r_1, r_2 de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ determinan el tipo de punto crítico en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y sus características de estabilidad. A su vez, los valores de r_1 y r_2 dependen de los coeficientes del sistema (1). Cuando un sistema de este tipo surge en algún campo de aplicación, los coeficientes suelen ser el resultado de las mediciones de ciertas cantidades físicas. A menudo estas mediciones están sujetas a pequeñas incertidumbres, por lo que es de interés investigar si cambios (perturbaciones) pequeños en los coeficientes pueden afectar la estabilidad o inestabilidad de un punto crítico o alterar significativamente el patrón de las trayectorias o las dos cosas.

Recuérdese que los eigenvalores r_1, r_2 son las raíces de la ecuación polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{2}$$

Es posible demostrar que las perturbaciones *pequeñas* en alguno o en todos los coeficientes se reflejan en perturbaciones *pequeñas* en los eigenvalores. La situación más delicada ocurre cuando $r_1 = i\mu$ y $r_2 = -i\mu$; es decir, cuando el punto crítico es un centro y las trayectorias son curvas cerradas que lo rodean. Si se hace un ligero cambio en los coeficientes, los eigenvalores r_1 y r_2 tomarán los nuevos valores $r_1' = \lambda' + i\mu'$ y $r_2' = \lambda' - i\mu'$, en donde μ' es pequeño en magnitud y $\mu' \cong \mu$ (ver la figura 9.3.1). Si $\lambda' \neq 0$, lo que ocurre casi siempre, las trayectorias del sistema perturbado son espirales en vez de curvas cerradas. El sistema es asintóticamente estable si $\lambda' < 0$, pero inestable si $\lambda' > 0$. Por tanto, en el caso de un centro, perturbaciones pequeñas en los coeficientes bien pueden cambiar un sistema estable en uno inestable y, cuando en cualquier caso, es de esperar que se altere radicalmente el patrón de trayectorias en el plano fase (ver el problema 18).

Otro caso ligeramente menos sensible ocurre si los eigenvalores r_1 y r_2 son iguales; en este caso el punto crítico es un nodo. Perturbaciones pequeñas en los coeficientes normalmente hacen que las dos raíces iguales se separen (se bifurquen). Si las raíces separadas son reales, entonces el punto crítico del sistema perturbado sigue siendo un nodo, pero si las

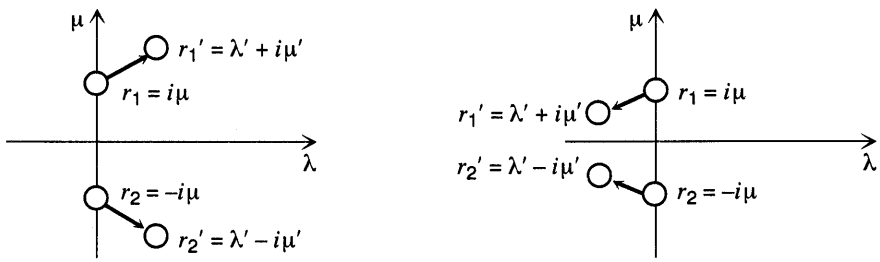


FIGURA 9.3.1 Perturbación esquemática de $r_1 = i\mu$, $r_2 = -i\mu$

raíces separadas son complejas conjugadas, entonces el punto crítico se vuelve un punto espiral. En la figura 9.3.2 se ilustran esquemáticamente estas dos posibilidades. En este caso, la estabilidad o inestabilidad del sistema no es afectada por perturbaciones pequeñas en los coeficientes, pero las trayectorias pueden alterarse de manera considerable (ver el problema 19).

En todos los demás casos no se cambia la estabilidad o inestabilidad del sistema, ni se altera el tipo de punto crítico, por perturbaciones suficientemente pequeñas en los coeficientes del sistema. Por ejemplo, si r_1 y r_2 son reales, negativos y distintos, un cambio *pequeño* en los coeficientes no modifica el signo de r_1 y r_2 ni les permite unirse. Por tanto, el punto crítico sigue siendo un nodo impropio asintóticamente estable.

A continuación se considera un sistema autónomo no lineal bidimensional

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

El interés principal es examinar el comportamiento de las trayectorias del sistema (3) en la vecindad de un punto crítico $\mathbf{x}^0$. Es conveniente elegir que el punto crítico esté en el origen. Esto no significa pérdida de generalidad, ya que si $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$, siempre es posible sustituir $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ en la ecuación (3); entonces $\mathbf{u}$ satisfará un sistema autónomo con un punto crítico en el origen.

Lo primero es considerar sistemas no lineales (3) que sean próximos, en algún sentido apropiado, a un sistema lineal (1). En consecuencia supóngase que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{4}$$

y que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un *punto crítico aislado* del sistema (4). Esto significa que existe algún círculo alrededor del origen dentro del cual no hay otros puntos críticos. Además, se supondrá que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = 0$ también es un punto crítico aislado del sistema lineal

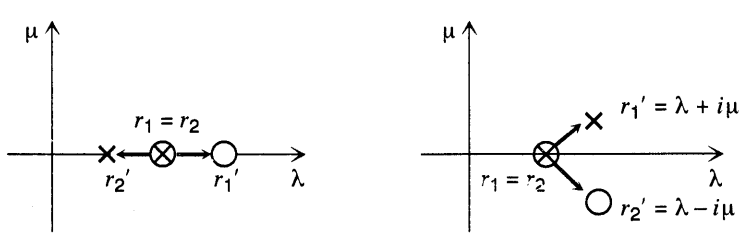


FIGURA 9.3.2 Perturbación esquemática de $r_1 = r_2$.

$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Por último, se supondrá que las componentes de $\mathbf{g}$ tienen primeras derivadas parciales continuas y que satisfacen la condición límite

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{0}; \tag{5}$$

es decir, cerca del origen $\|\mathbf{g}\|$ es pequeño en comparación con el propio $\|\mathbf{x}\|$. A un sistema de este tipo se le conoce como **sistema casi lineal** en la vecindad del punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Puede ser de utilidad expresar la condición (5) en forma escalar. Si se hace $\mathbf{x}^T = (x, y)$, entonces $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$. De manera semejante, si $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$, entonces $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = [g_1^2(x, y) + (g_2^2(x, y)]^{1/2}$. Así, se concluye que la condición (5) se satisface si y sólo si

$$g_1(x, y)/r \to 0, \qquad g_2(x, y)/r \to 0 \quad \text{cuando } r \to 0. \tag{6}$$

Ejemplo 1 Determinar si el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0.75xy - 0.25y^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

es casi lineal en la vecindad del origen.

Obsérvese que el sistema (7) es de la forma (4), que (0, 0) es un punto crítico y que $\det \mathbf{A} \neq 0$. No es difícil demostrar que los otros puntos críticos de las ecuaciones (7) son (0, 2), (1, 0) y (0.5, 0.5); como consecuencia, el origen es un punto crítico aislado. En la comprobación de la condición (6) es conveniente introducir coordenadas polares al hacer $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$; entonces,

$$\frac{g_1(x, y)}{r} = \frac{-x^2 - xy}{r} = \frac{-r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{r}$$
$$= -r(\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta) \to 0$$

cuando $r \to 0$. De manera semejante es posible demostrar que $g_2(x, y)/r \to 0$ cuando $r \to 0$. De donde, el sistema (7) es casi lineal cerca del origen.

Ejemplo 2 El movimiento no amortiguado de un péndulo se describe por el sistema [ver la ecuación (19) de la sección 9.2 con $c = 0$]

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,x. \tag{8}$$

Los puntos críticos son (0, 0), $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, . . . , de modo que el origen es un punto crítico aislado de este sistema. Demostrar que el sistema es casi lineal cerca del origen.

A fin de comparar las ecuaciones (8) con la ecuación (4) es necesario volver a escribir aquéllas de modo que se identifiquen con claridad los términos lineal y no lineal. Si se escribe $\text{sen}\,x = x + (\text{sen}\,x - x)$ y se sustituye esta expresión en la segunda de las ecuaciones (8), se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{g}{l}\begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}\,x - x \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Al comparar la ecuación (9) con la (4) se ve que $g_1(x, y) = 0$ y $g_2(x, y) = -(g/l)(\text{sen}\,x - x)$. Por la serie de Taylor para sen x se sabe que sen $x - x$ se comporta como $-x^3/3! = -(r^3\cos^3\theta)/3!$ cuando x es pequeña. Como consecuencia, $(\text{sen}\,x - x)/r \to 0$ cuando $r \to 0$. Por tanto, se satisfacen las condiciones (6) y el sistema (9) es casi lineal cerca del origen.

Ahora se escribirá el sistema no lineal general (3) en la forma escalar

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y). \tag{10}$$

El sistema (10) es casi lineal en la vecindad de un punto crítico (x_0, y_0) siempre que las funciones F y G tengan derivadas parciales continuas hasta el orden dos. Para demostrar esto, aplíquense los desarrollos de Taylor en turno al punto (x_0, y_0), para escribir $F(x, y)$ y $G(x, y)$ en la forma

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y),$$
$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y),$$

en donde $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \to 0$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, y, de manera semejante η_2. Nótese que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ y que $dx/dt = d(x - x_0)/dt$ y $dy/dt = d(y - y_0)/dt$. Entonces el sistema (10) se reduce a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

o, en notación vectorial,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}), \tag{12}$$

en donde $\mathbf{u}^T = (x - x_0, y - y_0)$ y $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \{\eta_2)^T$. Obsérvese que la parte lineal de las ecuaciones (11) o (12) tienen la matriz de coeficientes que consta de las derivadas parciales de F y G evaluadas en el punto crítico (x_0, y_0). Las ecuaciones (11) o (12) proporcionan un método general para encontrar el sistema lineal correspondiente a un sistema casi lineal cerca de un punto crítico dado.

Ejemplo 3 Aplicar la ecuación (11) para hallar el sistema lineal correspondiente a las ecuaciones del péndulo (8) cerca del origen y cerca del punto crítico $(\pi, 0)$.

En este caso,

$$F(x, y) = y, \qquad G(x, y) = -(g/l) \operatorname{sen} x, \tag{13}$$

por tanto,

$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -(g/l)\cos x, \quad G_y = 0. \tag{14}$$

De este modo, en el origen, el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{15}$$

lo cual concuerda con la ecuación (9).

De manera semejante, si se evalúan las derivadas parciales (14) en $(\pi, 0)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{16}$$

en donde $u = x - \pi$, $v = y$. Este es el sistema lineal correspondiente a las (8) cerca del punto $(\pi, 0)$.

Ahora se regresa al sistema casi lineal (4). Como el término no lineal $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es pequeño en comparación con el término lineal $\mathbf{Ax}$, cuando $\mathbf{x}$ es pequeño, es razonable esperar que las trayectorias del sistema lineal (1) sean buenas aproximaciones a las del sistema no lineal (4), por lo menos cerca del origen. Esto resulta ser cierto en muchos casos (pero no en todos), como afirma el siguiente teorema.

Teorema 9.3.2 Sean r_1 y r_2 los eigenvalores del sistema lineal (1) correspondiente al sistema casi lineal (4). Entonces el tipo y la estabilidad del punto crítico (0, 0) del sistema lineal (1) y del sistema casi lineal (4) son como se indica en la tabla 9.3.1.

En esta etapa, es bastante difícil dar la demostración de este teorema por lo que se aceptarán sus resultados sin demostrar. Los resultados para la estabilidad asintótica y la inestabilidad se concluyen como consecuencia de un resultado analizado en la sección 9.6, y se describió una demostración en los problemas 10 a 12 de esa sección. En esencia, el teorema 9.3.2 afirma que para $\mathbf{x}$ pequeño los términos no lineales también son pequeños y no afectan la estabilidad ni el tipo de punto crítico, según quedan determinados por los términos lineales, excepto en dos casos sensibles: r_1 y r_2 imaginarios puros, y r_1 y r_2 reales e iguales. Recuérdese que antes en esta sección se afirmó que perturbaciones pequeñas en los coeficientes del sistema lineal (1) y, por tanto, en los eigenvalores r_1 y r_2, pueden modificar el tipo y la estabilidad del punto crítico sólo en estos dos casos sensibles. Resulta razonable esperar que el término no lineal pequeño de la ecuación (4) podría tener un efecto sustancial semejante, por lo menos en estos dos casos sensibles. Esto es así, pero el principal significado del teorema 9.3.2 es que en *todos los demás casos* el término no lineal pequeño no altera el tipo o la estabilidad del punto crítico. Por tanto, excepto en los dos casos sensibles, pueden determinarse el tipo y la estabilidad del punto crítico del sistema no lineal (4) a partir de un estudio del sistema lineal mucho más sencillo (1).

TABLA 9.3.1 Propiedades de estabilidad e inestabilidad de los sistemas lineales y casi lineales.

	Sistema lineal		Sistema casi lineal	
r_1, r_2	Tipo[a]	Estabilidad	Tipo[a]	Estabilidad
$r_1 > r_2 > 0$	NI	Inestable	NI	Inestable
$r_1 < r_2 < 0$	NI	Asintóticamente estable	NI	Asintóticamente estable
$r_2 > 0 < r_1$	PS	Inestable	PS	Inestable
$r_1 = r_2 > 0$	NP o NI	Inestable	NP, NI o PEs	Inestable
$r_1 = r_2 < 0$	NP o NI	Asintóticamente estable	NP, NI o PEs	Asintóticamente estable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	PEs	Inestable	PEs	Inestable
$\lambda < 0$	PEs	Asintóticamente estable	PEs	Asintóticamente estable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Estable	C o PEs	Indeterminada

[a] NI, nodo impropio; NP, nodo propio; PS, punto silla; PEs, punto espiral; C, centro.

Aun si el punto crítico es del mismo tipo que el del sistema lineal, las trayectorias del sistema casi lineal pueden tener una apariencia considerablemente diferente a las del sistema lineal correspondiente, excepto muy cerca del punto crítico. Sin embargo, es posible demostrar que la pendiente con la que las trayectorias "entran" o "salen" del punto crítico quedan dadas correctamente por la ecuación lineal.

Péndulo amortiguado. Como ilustración de la relación entre los sistemas lineales y casi lineales, se considera el movimiento de un péndulo amortiguado. Las ecuaciones del movimiento se dedujeron en la sección 9.2 y son

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x - \frac{c}{ml}y. \tag{17}$$

En estas ecuaciones $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$, en donde θ es el ángulo que forma el péndulo con la dirección vertical hacia abajo. Ver la figura 9.2.4. Los puntos críticos de este sistema son $(n\pi, 0)$, en donde n es cualquier entero.

En primer lugar se considera el punto crítico (0, 0). Debido al mecanismo de amortiguamiento, es de esperar que cualquier movimiento pequeño alrededor de $\theta = 0$ decaiga en amplitud. Por tanto, intuitivamente el punto de equilibrio (0, 0) debe ser asintóticamente estable. Para demostrar que esto es cierto, se vuelve a escribir el sistema (17) como

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}x - \frac{c}{ml}y - \frac{g}{l}(\operatorname{sen} x - x). \tag{18}$$

En el ejemplo 2 se demostró que $(\operatorname{sen} x - x)/r \to 0$ cuando $r \to 0$, de modo que el sistema (18) es un sistema casi lineal; de donde, puede aplicarse el teorema 9.3.2. Los eigenvalores del sistema lineal correspondiente

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}x - \frac{c}{ml}y \tag{19}$$

son

$$r_1, r_2 = \frac{-c/ml \pm \sqrt{(c/ml)^2 - 4g/l}}{2}. \tag{20}$$

La naturaleza de las soluciones de las ecuaciones (17) y (19) depende del signo de $(c/ml)^2 - 4g/l$, como sigue:

1. Si $(c/ml)^2 - 4g/l > 0$, entonces los eigenvalores son reales, distintos y negativos. El punto crítico (0, 0) es un nodo impropio asintóticamente estable del sistema lineal (19) y del sistema casi lineal (17).
2. Si $(c/ml)^2 - 4g/l = 0$, entonces los eigenvalores son reales, iguales y negativos. El punto crítico (0, 0) es un nodo asintóticamente estable del sistema lineal (19). Puede ser un nodo asintóticamente estable o un punto espiral asintóticamente estable del sistema casi lineal (17).
3. $(c/ml)^2 - 4g/l < 0$, entonces los eigenvalores son complejos con parte real negativa. El punto crítico (0, 0) es un punto espiral asintóticamente estable del sistema lineal (19) y del sistema casi lineal (17).

Por lo tanto, el punto crítico (0, 0) es un punto espiral del sistema (17) si el amortiguamiento es pequeño, y un nodo si el amortiguamiento es suficientemente grande. En cualquiera de los dos casos, el origen es asintóticamente estable.

A continuación se consideran los otros puntos críticos. Sobre bases físicas, se espera que el comportamiento del sistema cerca de $\theta = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ sea semejante al que tiene cerca de $\theta = 0$. Por tanto, es de esperar que los puntos críticos correspondientes a estos valores de θ sean puntos espiral asintóticamente estables si c es suficientemente grande. También es de esperar, una vez más por razones físicas, que los puntos críticos correspondientes a $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ sean inestables.

Para determinar la naturaleza del punto crítico $x = \pi$, $y = 0$, por ejemplo, es posible encontrar el sistema lineal correspondiente a partir de la ecuación (11), como se hizo para el péndulo no amortiguado en el ejemplo 3. De manera alternativa, se puede introducir el cambio de variables

$$x = \pi + u, \qquad y = 0 + v, \tag{21}$$

e investigar el sistema resultante para u y v pequeñas. Si se sustituyen x y y en las ecuaciones (17) y se aplica el hecho de que sen $(\theta + u) = -\text{sen } u$, se obtiene

$$\frac{du}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{c}{ml}v + \frac{g}{l}\,\text{sen } u. \tag{22}$$

Interesa estudiar el punto crítico $u = v = 0$ del sistema (22), que corresponde al punto crítico $x = \pi$, $y = 0$ del sistema (17). Al volver a escribir la segunda de las ecuaciones (22), se tiene

$$\frac{du}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{l}u - \frac{c}{ml}v + \frac{g}{l}(\text{sen } u - u). \tag{23}$$

El sistema (23) es el mismo sistema (18), excepto que se sustituyó $-g/l$ por g/l. Por tanto, el sistema (23) es casi lineal y los eigenvalores del sistema lineal correspondiente son

$$r_1, r_2 = \frac{-c/ml \pm \sqrt{(c/ml)^2 + 4g/l}}{2}. \tag{24}$$

Un eigenvalor (r_1) es positivo y el otro (r_2) es negativo. Por lo tanto, sin importar la cantidad de amortiguamiento, el punto crítico $x = \pi$, $y = 0$ es un punto silla inestable tanto del sistema lineal (19) como del sistema casi lineal (17).

El resto de los puntos críticos del sistema (17) se pueden analizar de manera semejante. Los puntos $(\pm n\pi, 0)$, con n par son puntos espiral o nodos asintóticamente estables, mientras que los puntos $(\pm n\pi, 0)$, con n impar, son puntos silla inestables.

Considérese ahora con más detalle el caso $(c/ml)^2 - 4g/l < 0$, correspondiente a un amortiguamiento pequeño. Se mostrará cómo elaborar un diagrama esquemático de las trayectorias en el plano (fase) xy. Se vio que el punto crítico (0, 0) es un punto espiral asintóticamente estable y se hizo notar que lo mismo es cierto para los puntos $(2n\pi, 0)$, para cualquier valor entero de n. Estos puntos corresponden al péndulo que cuelga verticalmente hacia abajo con velocidad cero. La dirección del movimiento sobre las espirales cerca de (0, 0) puede obtenerse directamente de las ecuaciones (17). Considérese el punto en el que una espiral se interseca con el eje y positivo ($x = 0$ y $y > 0$). En ese punto, por las ecuaciones (17) se concluye que $dx/dt > 0$. Por tanto, el punto (x, y) sobre la trayectoria se mueve hacia la

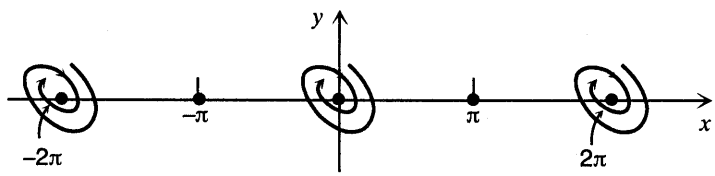


FIGURA 9.3.3 Puntos espirales asintóticamente estables para el péndulo amortiguado.

derecha, de modo que la dirección del movimiento sobre las espirales es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. La situación es igual cerca de los puntos críticos $(2n\pi, 0)$ con $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ En la figura 9.3.3 se muestran las espirales.

Antes se demostró que el punto crítico $(\pi, 0)$ es un punto silla y se hizo notar que lo mismo es cierto para los puntos críticos $((2n + 1)\pi, 0)$ con cualquier valor entero de n. Estos puntos corresponden al péndulo en una posición vertical hacia arriba con velocidad cero. Por tanto, en el plano fase los puntos espiral asintóticamente estables se entremezclan con puntos silla inestables. Recuérdese que sólo un par de trayectorias "entra" a un punto silla. Para determinar la dirección de las trayectorias que entran al punto silla $(\pi, 0)$, se considerará el sistema lineal correspondiente al sistema (23); a saber,

$$\frac{du}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{l}u - \frac{c}{ml}v. \tag{25}$$

Al aplicar la ecuación (24) y la primera de las ecuaciones (25), es posible escribir la solución general de estas últimas en la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} e^{r_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} e^{r_2 t}, \tag{26}$$

en donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Dado que $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$, se concluye que la solución que tiende a cero cuando $t \to \infty$ corresponde a $C_1 = 0$. Para esta solución $v/u = r_2$, de modo que la pendiente de las trayectorias que entran es negativa; una está en el segundo cuadrante $(C_2 < 0)$ y la otra en el cuarto cuadrante $(C_2 > 0)$. Para $C_2 = 0$, se obtiene el par de trayectorias que "salen" del punto silla. Estas trayectorias tienen la pendiente $r_1 > 0$; una está en el primer cuadrante $(C_1 > 0)$ y la otra en el tercer cuadrante $(C_1 < 0)$. La situación es la misma para todos los demás puntos silla. En la figura 9.3.4 se muestra un diagrama de las trayectorias en la vecindad de los puntos silla inestables.

Si se juntan las figuras 9.3.3 y 9.3.4, se obtiene el diagrama de las trayectorias en el plano fase que se muestra en la figura 9.3.5. Nótese que las trayectorias que entran a los puntos silla separan el plano fase en regiones. Una trayectoria de este tipo se llama **separatriz**. Las condiciones iniciales sobre θ y $d\theta/dt$ determinan la posición de un punto inicial (x, y) en el plano fase. El movimiento subsecuente del péndulo queda representado por la trayectoria que pasa por el punto inicial a medida que describe una espiral hacia el punto crítico asintóticamente estable en esa región. Nótese que matemáticamente es posible (pero físicamente irrealizable) elegir condiciones iniciales sobre una separatriz de modo que el movimiento resultante dé un péndulo balanceado en una posición vertical hacia arriba de equilibrio inestable.

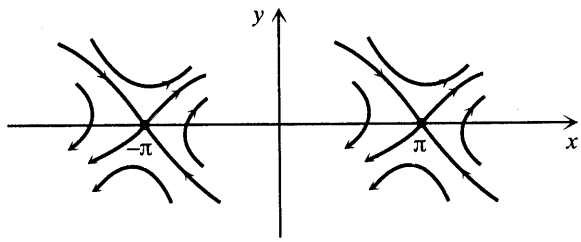


FIGURA 9.3.4 Puntos silla inestables para el péndulo amortiguado.

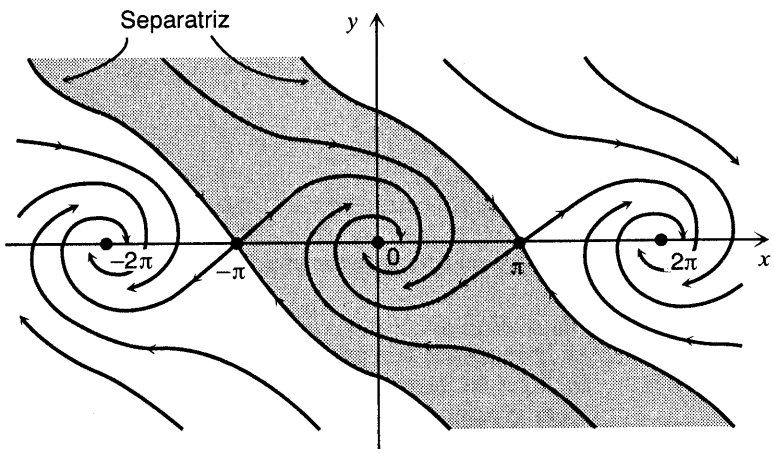


FIGURA 9.3.5 Retrato fase para el péndulo amortiguado.

Una diferencia importante entre sistemas autónomos no lineales y los sistemas lineales analizados en la sección 9.1 se ilustra mediante las ecuaciones del péndulo. Recuérdese que el sistema lineal (11), sólo tiene un punto crítico, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y que las soluciones son en esencia funciones exponenciales. Por tanto, si el origen es asintóticamente estable, entonces no sólo las trayectorias que se inician cerca del punto crítico tienden a éste, de hecho, toda trayectoria tiende al punto crítico. En este caso se dice que el punto crítico es **asintóticamente estable globalmente.** En general, esta propiedad de los sistemas lineales no se cumple para los no lineales. Para un sistema no lineal, un importante problema práctico es estimar el conjunto de condiciones iniciales para las que un punto crítico dado es asintóticamente estable. El conjunto de condiciones iniciales se conoce como **región de estabilidad asintótica** o **cuenca de atracción** del punto crítico. Para las ecuaciones del péndulo, cada punto crítico asintóticamente estable tiene su propia cuenca de atracción, que está acotada por las separatrices que pasan por los puntos silla inestables vecinos. En la figura 9.3.5 está sombreada la cuenca de atracción del origen.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 10, compruebe que (0, 0) es un punto crítico, demuestre que el sistema es casi lineal y analice el tipo de la estabilidad del punto crítico (0, 0).

1. $dx/dt = x - y + xy$
   $dy/dt = 3x - 2y - xy$
2. $dx/dt = x + x^2 + y^2$
   $dy/dt = y - xy$
3. $dx/dt = -2x - y - x(x^2 + y^2)$
   $dy/dt = x - y + y(x^2 + y^2)$
4. $dx/dt = y + x(1 - x^2 - y^2)$
   $dy/dt = -x + y(1 - x^2 - y^2)$
5. $dx/dt = 2x + y + xy^3$
   $dy/dt = x - 2y - xy$
6. $dx/dt = x + 2x^2 - y^2$
   $dy/dt = x - 2y + x^3$
7. $dx/dt = y$
   $dy/dt = -x + \mu y(1 - x^2), \mu > 0$
8. $dx/dt = 1 + y - e^{-x}$
   $dy/dt = y - \operatorname{sen} x$
9. $dx/dt = (1 + x)\operatorname{sen} y$
   $dy/dt = 1 - x - \cos y$
10. $dx/dt = e^{-x+y} - \cos x$
    $dy/dt = \operatorname{sen}(x - 3y)$

En cada uno de los problemas 11 a 14, determine todos los puntos críticos reales del sistema de ecuaciones dado y analice su tipo y estabilidad.

11. $dx/dt = x + y^2$
    $dy/dt = x + y$
12. $dx/dt = 1 - xy$
    $dy/dt = x - y^3$
13. $dx/dt = x - x^2 - xy$
    $dy/dt = 3y - xy - 2y^2$
14. $dx/dt = 1 - y$
    $dy/dt = x^2 - y^2$

15. Considere el sistema autónomo

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = x + 2x^3.$$

a) Demuestre que el punto crítico (0, 0) es un punto silla.
b) Trace las trayectorias del sistema lineal correspondiente al integrar la ecuación para dy/dx. A partir de la forma paramétrica de la solución, demuestre que la única trayectoria para la que $x \to 0$, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$ es $y = -x$.
c) Determine las trayectorias del sistema no lineal al integrar la ecuación para dy/dx. Trace las trayectorias para el sistema no lineal que corresponde a $y = -x$ y $y = x$ para el sistema lineal.

16. Considere el sistema autónomo

$$dx/dt = x, \qquad dy/dt = -2y + x^3.$$

a) Demuestre que el punto crítico (0, 0) es un punto silla.
b) Trace las trayectorias del sistema lineal correspondiente y demuestre que la trayectoria para la que $x \to 0$, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$ está dada por $x = 0$.
c) Determine las trayectorias del sistema no lineal para $x \neq 0$ al integrar la ecuación para dy/dx. Demuestre que la trayectoria correspondiente a $x = 0$ para el sistema lineal permanece sin cambio, pero que la correspondiente a $y = 0$ es $y^3/5$. Trace varias de las trayectorias del sistema no lineal.

17. El teorema 9.3.2 no proporciona información sobre la estabilidad de un punto crítico de un sistema casi lineal, si ese punto es un centro del sistema lineal correspondiente. Que éste debe ser el caso se ilustra mediante los dos sistemas siguientes.

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} dx/dt &= y + x(x^2 + y^2), \\ dy/dt &= -x + y(x^2 + y^2); \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} dx/dt &= y - x(x^2 + y^2), \\ dy/dt &= -x - y(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

a) Demuestre que (0, 0) es un punto crítico de cada sistema y, además, es un centro del sistema lineal correspondiente.

b) Demuestre que cada sistema es casi lineal.

c) Sea $r^2 + x^2 + y^2$ y observe que $x\,dx/dt + y\,dy/dt = r\,dr/dt$. Para el sistema (ii), demuestre que $dr/dt < 0$ y que $r \to 0$ cuando $t \to \infty$ y, por tanto, que el punto crítico es asintóticamente estable. Para el sistema (i), demuestre que la solución del problema con valor inicial para r, con $r = r_0$ en $t = 0$, se vuelve no acotada cuando $t \to 1/2r_0^2$ y, por tanto, que el punto crítico es inestable.

18. En este problema se muestra cómo cambios pequeños en los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales pueden afectar a un punto crítico que sea centro. Considere el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Demuestre que los eigenvalores son $\pm i$, de modo que (0, 0) es un centro. A continuación, considere el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

en donde ϵ es arbitrariamente pequeño. Demuestre que los eigenvalores son $\epsilon \pm i$. Por tanto, no importa cuán pequeño sea $\epsilon \neq 0$, el centro se convierte en un punto espiral. Si $\epsilon < 0$, entonces el punto espiral es asintóticamente estable; si $\epsilon > 0$, entonces el punto espiral es inestable.

19. En este problema se muestra cómo cambios pequeños en los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales pueden afectar la naturaleza de un punto crítico cuando los eigenvalores son iguales. Considere el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Demuestre que los eigenvalores son $r_1 = -1$, $r_2 = -1$ de modo que el punto crítico (0, 0) es un nodo asintóticamente estable. En seguida, considere el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

en donde ϵ es arbitrariamente pequeño. Demuestre que si $\epsilon > 0$, entonces los eigenvalores son $-1 \pm i\sqrt{\epsilon}$, de modo que el nodo asintóticamente estable se convierte en un punto espiral asintóticamente estable. Si $\epsilon < 0$, entonces las raíces son $-1 \pm \sqrt{\epsilon}$, y el punto crítico sigue siendo un nodo asintóticamente estable.

20. La ecuación del movimiento de un péndulo no amortiguado es $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\,\text{sen}\,\theta = 0$. Sean $x = \theta$, $y = d\theta/dt$ y $k^2 = g/l$ para obtener el sistema de ecuaciones

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -k^2\,\text{sen}\,x.$$

a) Demuestre que los puntos críticos son $(\pm n\pi, 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y que el sistema es casi lineal en la vecindad de cada punto crítico.

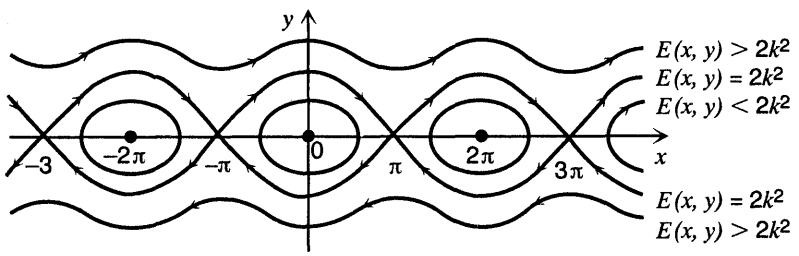


FIGURA 9.3.6 Retrato fase para el péndulo no amortiguado.

b) Demuestre que el punto crítico (0, 0) es un centro (estable) del sistema lineal correspondiente. Al aplicar el teorema 9.3.2, ¿qué se puede afirmar acerca del problema casi lineal? La situación es semejante en los puntos críticos $(\pm 2n\pi, 0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ¿Cuál es la interpretación física de estos puntos?

c) Demuestre que el punto crítico $(\pi, 0)$ es un punto silla (inestable). La situación es semejante en los puntos críticos $[\pm(2n-1)\pi, 0]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. ¿Cuál es la interpretación física de estos puntos críticos?

21. En este problema se dan algunos de los detalles del análisis para trazar las trayectorias del péndulo no amortiguado del problema 20. Demuestre al eliminar t, que la ecuación de las trayectorias pueden escribirse como

$$\tfrac{1}{2}y^2 + k^2(1 - \cos x) = E.$$

Para descubrir el significado de la constante E, observe que $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(dx/dt)^2 = \frac{1}{2}(d\theta/dt)^2$ es proporcional a la energía cinética del péndulo. También, $k^2(1 - \cos x) = \int_0^x k^2 \operatorname{sen} s\, ds$ es proporcional a la energía potencial del péndulo, debida a la fuerza de la gravedad. Por tanto, la constante E es la "energía" del movimiento. Esta es constante a lo largo de una trayectoria (durante el curso del movimiento) y queda determinada por los valores iniciales de x y y.

Al trazar las trayectorias es necesario considerar solamente el intervalo $-\pi < x < \pi$, ya que la ecuación es periódica en x, con periodo 2π. Para $E = 2k^2$, demuestre que $y = \pm 2k \cos x/2$ y trace estas trayectorias. Observe que las trayectorias entran o salen de los puntos silla inestables en $(\pm\pi, 0)$. Determine la dirección del movimiento sobre cada trayectoria al aplicar las ecuaciones diferenciales dadas en el problema 20.

Es posible demostrar que las trayectorias son curvas cerradas para $E < 2k^2$ y que no son cerradas para $E > 2k^2$. Aquí no se abordarán estos detalles, pero en la figura 9.3.6 se da un esquema de las trayectorias para un péndulo no amortiguado. Las trayectorias para $E < 2k^2$ corresponden a movimientos periódicos al rededor del centro, y las trayectorias para $E > 2k^2$ corresponden a movimientos arremolinados.

*22. En este problema se deduce una fórmula para el periodo natural de un péndulo no lineal y no amortiguado [$c = 0$ en la ecuación (17)]. Suponga que se tira de la lenteja hasta formar un ángulo α y luego se suelta con velocidad cero. Suponga que puede despejarse t como función de θ de la expresión para θ como función de t, de modo que puede considerarse $d\theta/dt$ como función de θ. Deduzca la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$\tfrac{1}{2}ml^2\frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -mgl\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\tfrac{1}{2}m\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mgl(\cos\theta - \cos\alpha),$$

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

¿Por qué en la última ecuación se eligió la raíz cuadrada negativa?
Si T es el periodo natural de oscilación del péndulo, deduzca la fórmula

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Al hacer el cambio de variables $\cos\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta/2$, $\cos\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\alpha/2$ seguido por $\text{sen}\,\theta/2 = k\,\text{sen}\,\phi$ con $k = \text{sen}\,\alpha/2$, demuestre que

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,\phi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,F(k, \pi/2).$$

La función F se conoce como **integral elíptica** de primera clase. Observe que el periodo depende de la razón l/g y también del desplazamiento inicial α, a través de $k = \text{sen}\,\alpha/2$. El periodo correspondiente para el péndulo linealizado es $2\pi(l/g)^{1/2}$ y es independiente del desplazamiento inicial. Para obtener este resultado especial a partir de la fórmula general, es necesario considerar el caso límite de α pequeño (desplazamiento angular pequeño), en cuyo caso k es pequeña. En el límite $k \to 0$, la fórmula precedente da $T = 4(l/g)^{1/2}F(0, \pi/2) = 2\pi(l/g)^{1/2}$

23. Una generalización de la ecuación del péndulo amortiguado analizada en el texto, o de un sistema amortiguado, resorte-masa es la ecuación de Liénard,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0.$$

Si $c(x)$ es una constante y $g(x) = kx$, entonces esta ecuación tiene la forma de la ecuación lineal del péndulo [sustituya $\text{sen}\,\theta$ por θ en la ecuación (18) de la sección 9.2]; en caso contrario, la fuerza de amortiguamiento $c(x)\,dx/dt$ y la fuerza de restitución $g(x)$ son no lineales. Suponga que c es continuamente diferenciable, g es dos veces continuamente diferenciable y $g(0) = 0$.

a) Escriba la ecuación de Liénard como un sistema de dos ecuaciones de primer orden al introducir la variable $y = dx/dt$.

b) Demuestre que $(0, 0)$ es un punto crítico y que el sistema es casi lineal en la vecindad de $(0, 0)$.

c) Demuestre que si $c(0) > 0$ y $g'(0) > 0$, entonces el punto crítico es asintóticamente estable, y que si $c(0) < 0$ o $g'(0) < 0$, entonces el punto crítico es inestable.

Sugerencia: aplique la serie de Taylor para aproximar c y g en la vecindad de $x = 0$.

9.4 Especies competidoras

En esta sección y en la siguiente se examina la aplicación del análisis del plano fase a algunos problemas de dinámica de poblaciones. En estos problemas intervienen dos poblaciones que interactúan entre sí y son extensiones de los analizados en la sección 2.6, que trataban de una sola población. Aunque las ecuaciones analizadas aquí son extremadamente sencillas, en comparación con las muy complejas relaciones que existen en la naturaleza, todavía es posible adquirir cierta comprensión de los principios ecológicos a partir del estudio de estos problemas modelo.

Suponga que en un ambiente cerrado hay dos especies semejantes que compiten por un suministro de alimento limitado; por ejemplo, dos especies de peces en un estanque que no son presa una de la otra, pero compiten por el alimento disponible. Sean x y y las poblaciones de las dos especies en el instante t. Como se analizó en la sección 2.6, se supone que la población de cada especie, en ausencia de la otra, se rige por una ecuación logística. Por tanto,

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x), \tag{1a}$$

$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y), \tag{1b}$$

respectivamente, en donde ϵ_1 y ϵ_2 son los índices de crecimiento de las dos poblaciones y ϵ_1/σ_1 y ϵ_2/σ_2 son sus niveles de saturación. Sin embargo, cuando las dos especies están presentes, cada una afecta el suministro de alimento disponible para la otra. De hecho, se reducen mutuamente los índices de crecimiento y las poblaciones de saturación. La expresión más simple para reducir el índice de crecimiento de la especie x por la presencia de la especie y, es sustituir el factor del índice de crecimiento $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ de la ecuación (1a) por $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$, en donde α_1 es una medida del grado en el que la especie y interfiere con la especie x. De manera semejante, en la ecuación (1b) se sustituye $\epsilon_2 - \sigma_2 y$ por $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$. De esta manera se tiene el sistema de ecuaciones

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y), \tag{2a}$$

$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x). \tag{2b}$$

Los valores de las constantes positivas ϵ_1, σ_1, α_1, ϵ_2, σ_2 y α_2 dependen de las especies particulares que se consideren y en general deben determinarse a partir de observaciones. Interesan las soluciones de las ecuaciones (2) para las que x y y sean no negativas. En los dos ejemplos siguientes se analizan con cierto detalle dos problemas típicos. Al final de la sección se regresa a las ecuaciones generales (2).

Ejemplo 1 Analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema.

$$dx/dt = x(1 - x - y), \tag{3a}$$

$$dy/dt = y(0.75 - y - 0.5x). \tag{3b}$$

Se encuentran los puntos críticos al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas

$$x(1 - x - y) = 0, \qquad y(0.75 - y - 0.5x) = 0. \tag{4}$$

Existen cuatro puntos que satisfacen las ecuaciones (4); a saber, (0, 0), (0, 0.75), (1, 0) y (0.5, 0.5); estos corresponden a las soluciones de equilibrio del sistema (3). Los tres primeros de estos puntos incluyen la extinción de una o las dos especies; solamente el último corresponde a la supervivencia a largo plazo de las dos. Otras soluciones se representan como curvas o trayectorias en el plano xy. Para empezar a descubrir su comportamiento cualitativo, es posible proceder de la siguiente manera:

En virtud de que x es no negativa, por la ecuación (3a) se concluye que x aumenta o disminuye si $1 - x - y > 0$ ó $1 - x - y < 0$; de manera análoga, por la ecuación (3b) se ve que y aumenta o dismimuye según $0.75 - y - 0.5x > 0$ ó $0.75 - y - 0.5x < 0$. Esta situación se muestra en la figura 9.4.1. La recta $x + y - 1 = 0$ se llama **nuliclina** x debido a que x' es cero en cada uno de los puntos de ella. Por tanto, siempre que una trayectoria corta la nuliclina x, su recta tangente debe ser paralela al eje y. De manera semejante, la recta $0.5x + y - 0.75 = 0$ se llama nuliclina y; las trayectorias que cruzan esta recta tienen tangentes paralelas al eje x. Para ver lo que le sucede a las dos especies simultáneamente, es necesario superponer los dos diagramas de la figura 9.4.1; es decir, trazar el campo direccional del sistema (3). Esto se hizo en la figura 9.4.2, en donde también se indican las soluciones de equilibrio mediante los puntos gruesos.

Las dos nuliclinas crean cuatro zonas en el primer cuadrante del plano xy. En la zona I se observa que $x' > 0$ y $y' > 0$, por lo tanto, siempre que el punto (x, y) esté en la zona I se debe estar moviendo hacia arriba y hacia la derecha. De manera semejante, el punto (x, y) se mueve hacia arriba y hacia la izquierda en la zona II, hacia abajo y hacia la izquierda en la zona III y hacia abajo y hacia la derecha en la zona IV. Por tanto, en todos los casos el punto (x, y) se desplaza hacia el punto crítico (0.5, 0.5). Como consecuencia, si los dos valores iniciales de x_0 y y_0 son positivos, entonces, después de que haya transcurrido un tiempo largo, es de esperar ver al punto (x, y) cerca del punto crítico (0.5, 0.5), que representa los niveles de población de las dos especies que pueden coexistir en equilibrio mutuo y con abastecimiento de alimento disponible. Esta configuración de equilibrio no depende de las poblaciones iniciales x_0 y y_0, mientras sean positivas.

Si $x_0 = 0$, entonces sólo está presente la especie y. En este caso, el punto (x, y) permanece sobre el eje y y tiende al punto crítico (0, 0.75), que representa el nivel de saturación de la especie y. La situación es semejante si $y_0 = 0$, excepto que las soluciones están sobre el eje x y tienden al punto (1, 0).

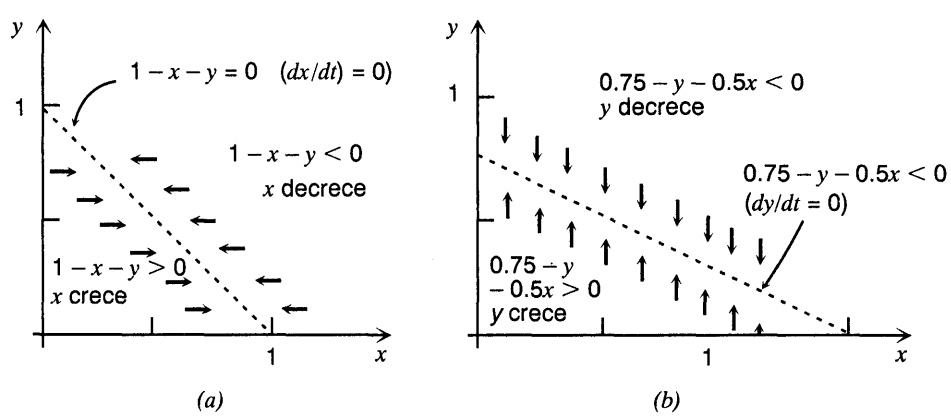


FIGURA 9.4.1 Nuliclinas para el sistema de especies competidoras (3).

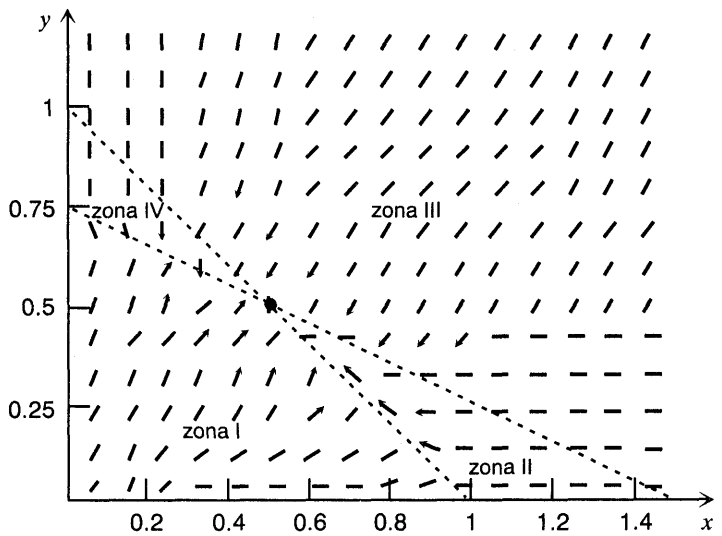


FIGURA 9.4.2 Puntos críticos y campo direccional para el sistema (3).

El paso siguiente para comprender las soluciones del sistema (3) es determinar su comportamiento local cerca de cada punto crítico. Como el sistema (3) es casi lineal en la vecindad de cada punto crítico, se puede hacer esto al resolver los sistemas lineales apropiados. Existen dos formas de obtener el sistema lineal cerca de un punto crítico (X, Y). En primer lugar, es posible aplicar la sustitución $x = X + \mu$, $y = Y + v$ en las ecuaciones (3), conservando sólo los términos que son lineales en u y v. De manera alternativa, se puede usar la ecuación (11) de la sección 9.3, es decir,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(X, Y) & F_y(X, Y) \\ G_x(X, Y) & G_y(X, Y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{5}$$

en donde, para el sistema (3),

$$F(x, y) = x(1 - x - y), \qquad G(x, y) = y(0.75 - y - 0.5x). \tag{6}$$

Por tanto, la ecuación (5) queda

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2X - Y & -X \\ -0.5Y & 0.75 - 2Y - 0.5X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$x = 0$, $y = 0$. Este punto crítico corresponde a un estado en el que las dos especies se extinguen como resultado de su competencia. Al volver a escribir el sistema (3) en la forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ 0.5xy + y^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

o al hacer $X = Y = 0$ en las ecuaciones (7), se ve que cerca del origen el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Los eigenvalores y eigenvectores del sistema (9) son

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 0.75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

por lo que la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.75t}. \tag{11}$$

Por tanto, el origen es un nodo impropio inestable tanto del sistema lineal (9) como del sistema no lineal (8). En la vecindad del origen, todas las trayectorias son tangentes al eje y, excepto por un par de trayectorias que se encuentran a lo largo del eje x.

$x = 1$, $y = 0$. Esto corresponde a un estado en el que la especie x sobrevive a la competencia, pero la especie y no. El sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Sus eigenvalores y eigenvectores son

$$r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 0.25, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

y la solución general es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{0.25t}. \tag{14}$$

Dado que los eigenvalores tienen signos opuestos, el punto (1, 0) es un punto silla y, de donde, es un punto de equilibrio inestable del sistema lineal (12) y del sistema no lineal (3). El comportamiento de las trayectorias cerca de (1, 0) puede verse a partir de la ecuación (14). Si $c_2 = 0$, entonces existe un par de trayectorias que tiende al punto crítico a lo largo del eje x. Todas las demás trayectorias salen de la vecindad de (1, 0).

$x = 0$, $y = 0.75$. En este caso, la especie y sobrevive pero la x no. El análisis es semejante al del punto (1, 0). El sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Los eigenvalores y eigenvectores son

$$r_1 = 0.25, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -0.75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

de modo que la solución general de la ecuación (15) es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} e^{0.25t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t}. \tag{17}$$

Por tanto, el punto (0, 0.75) también es un punto silla. Todas las trayectorias salen de la vecindad de este punto, excepto por un par que se aproxima a lo largo del eje y.

$x = 0.5$, $y = 0.5$. Este punto crítico corresponde a un estado de equilibrio mixto o de coexistencia; un empate, por así decirlo, en la competencia entre las dos especies. Los eigenvalores y eigenvectores del sistema lineal correspondiente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{18}$$

son

$$r_1 = (-2 + \sqrt{2})/4 \cong -0.147, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix};$$
$$r_2 = (-2 - \sqrt{2})/4 \cong -0.853, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (18) es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}e^{-0.147t} + c_2\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}e^{-0.853t}. \tag{20}$$

En virtud de que todos los eigenvalores son negativos, el punto crítico (0.5, 0.5) es un nodo impropio asintóticamente estable. Todas las trayectorias tienden al punto crítico cuando $t \to \infty$. Un par de trayectorias tiende al punto crítico a lo largo de la recta cuya pendiente es $\sqrt{2}/2$ determinada a partir del eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$.Todas las demás trayectorias tienden al punto crítico tangentes a la recta con pendiente $-\sqrt{2}/2$ determinada a partir del eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

En la figura 9.4.3 se muestra un diagrama de las trayectorias en la vecindad de cada punto crítico. Al juntar estos diagramas es posible obtener una imagen razonablemente buena de las trayectorias en todo el primer cuadrante. Además, nótese que todos los términos cuadráticos del

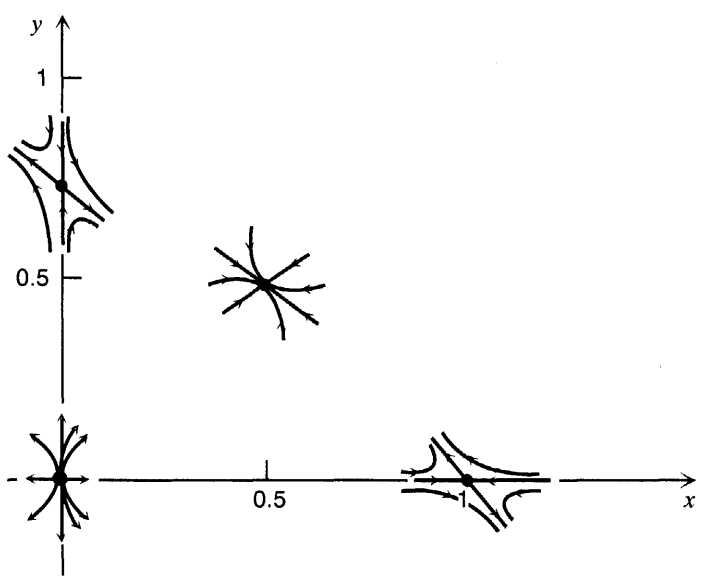


FIGURA 9.4.3 Trayectorias cerca de cada punto crítico para el sistema (3).

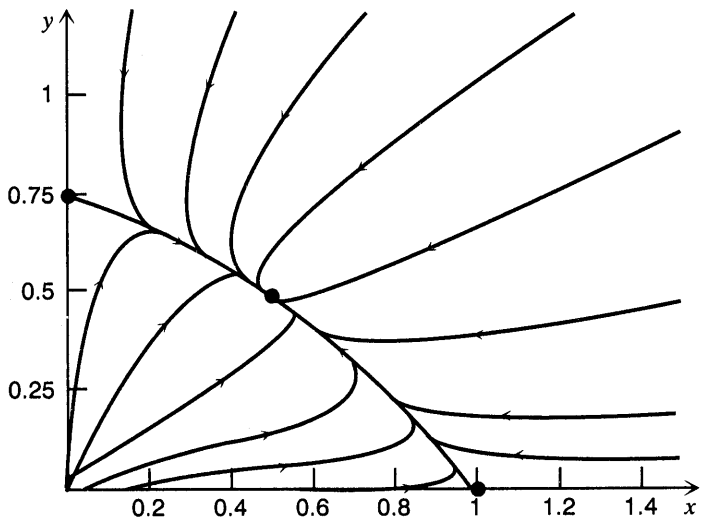


FIGURA 9.4.4 Trayectorias del sistema (3).

segundo miembro de las ecuaciones (3) son negativos. Como para x y y grandes y positivas estos términos son los dominantes, se concluye que lejos del origen en el primer cuadrante x' y y' son negativas, es decir, las trayectorias se dirigen hacia adentro. Por tanto, se concluye que todas las trayectorias que se inician en un punto (x_0, y_0) en el primer cuadrante tienden finalmente al punto (0.5, 0.5). En la figura 9.4.4 se muestran varias trayectorias calculadas del sistema (3) el patrón de estas trayectorias confirma las conclusiones a las que se llegó al analizar los puntos críticos del sistema.

Ejemplo 2 Analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema

$$dx/dt = x(1 - x - y), \tag{21a}$$

$$dy/dt = y(0.5 - 0.25y - 0.75x), \tag{21b}$$

en donde x y y son no negativas. Obsérvese que este sistema también es un caso especial del sistema (2) para dos especies en competencia.

Una vez más, existen cuatro puntos críticos; a saber, (0, 0), (1, 0), (0, 2) y (0.5, 0.5), correspondientes a las soluciones de equilibrio del sistema (21). Procediendo como en el ejemplo 1, por la ecuación (21a) se observa que $x' > 0$ ó $x' < 0$ según si $1 - x - y$ es positiva o negativa. De manera semejante, el signo de y' es el mismo que el de $0.5 - 0.75x - 0.25y$. Esto se indica en la figura 9.4.5. Al superponer los diagramas de la figura 9.4.5, se obtiene la figura 9.4.6. Las nuliclinas $x + y = 1$ y $0.75x + 0.25y = 0.5$ dividen el primer cuadrante en cuatro zonas, en cada una de las cuales las trayectorias del sistema tienen las direcciones indicadas. La solución de equilibrio mixto (0.5, 0.5) tienen un interés especial por que corresponde a la coexistencia entre las dos especies. En la figura 9.4.6 se indica que en las zonas I y II parece que las trayectorias tienden a (0.5, 0.5), en tanto que en las zonas II y IV parece que las trayectorias se alejan de este punto crítico. Esto sugiere que este punto es un punto silla y, por lo tanto, representa una configuración de equilibrio inestable. Obsérvese la diferencia entre la figura 9.4.6 y la 9.4.2 del ejemplo 1, en la que la solución de equilibrio mixto es un nodo asintóticamente estable. Para

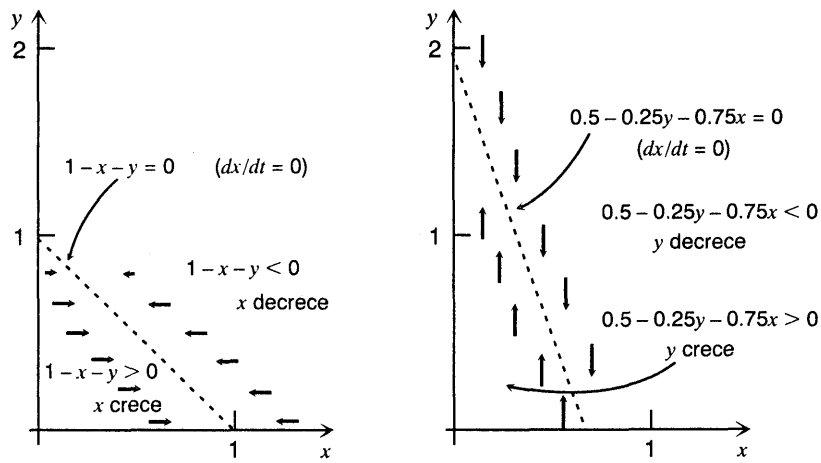


FIGURA 9.4.5 Nuliclinas para el sistema de especies competidoras (21).

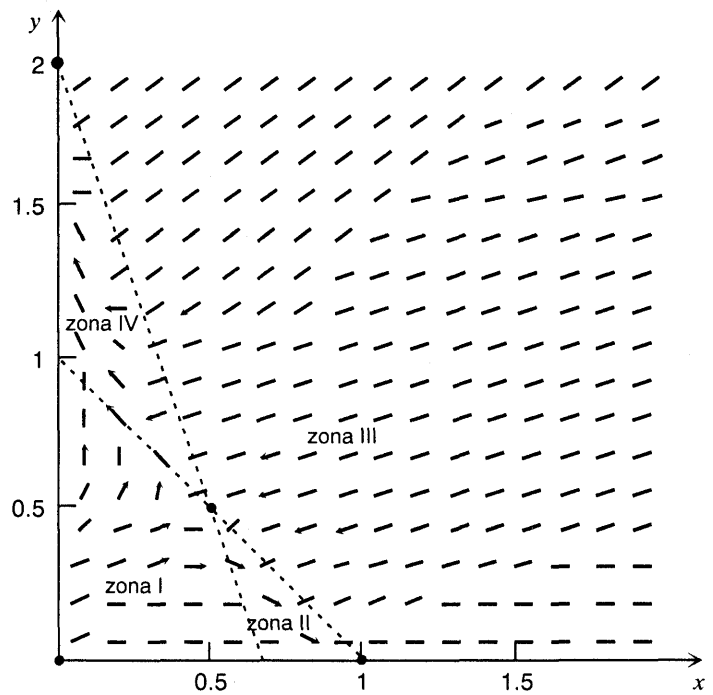


FIGURA 9.4.6 Puntos críticos y campo direccional para el sistema (21).

analizar aún más el sistema (21), es posible observar las aproximaciones lineales válidas en la vecindad de cada uno de los puntos críticos.

$x = 0, y = 0$. Si se desprecian los términos no lineales de las ecuaciones (21), se obtiene el sistema lineal

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{22}$$

que es válido cerca del origen. Los eigenvalores y eigenvectores del sistema (22) son

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 0.5, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

por lo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0.5t}. \tag{24}$$

Por consiguiente, el origen es un nodo impropio inestable del sistema lineal (22) y también del sistema no lineal (21). Todas las trayectorias salen del origen tangentes al eje y, excepto por un par de trayectorias que están a lo largo del eje x.

$x = 1, y = 0$. El sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Sus eigenvalores y eigenvectores son

$$r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -0.25, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

y su solución general es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}e^{-t/4}. \tag{27}$$

El punto (1, 0) es un nodo impropio asintóticamente estable del sistema lineal (25) y del sistema no lineal (21). Si los valores iniciales de x y y están lo suficientemente próximos a (1, 0) entonces el proceso de interacción da finalmente ese estado; es decir, la sobrevivencia de la especie x y la extinción de la especie y. Existe un par de trayectorias que tienden al punto crítico a lo largo del eje x. Todas las demás trayectorias tienden a (1, 0) tangentes a la recta con pendiente –3/4 que queda determinada por el eigenvector $\xi^{(2)}$.

$x = 0, y = 2$. En este caso, el análisis es semejante al del punto (1, 0). El sistema lineal adecuado es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Los eigenvalores y eigenvectores de este sistema son

$$r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -0.5, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

y su solución general es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2}. \tag{30}$$

Por tanto, el punto crítico (0, 2) es un nodo impropio asintóticamente estable. Todas las trayectorias tienden al punto crítico a lo largo del eje y, excepto por un par, que tiende a lo largo de la recta con pendiente 3.

$x = 0.5$, $y = 0.5$. El sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.375 & -0.125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Los eigenvalores y eigenvectores son

$$r_1 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{16} \cong 0.1594, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ (-3 - \sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ -1.3187 \end{pmatrix}, \tag{32a}$$

$$r_2 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{16} \cong -0.7844, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ (-3 + \sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5687 \end{pmatrix}, \tag{32b}$$

de modo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1.3187 \end{pmatrix}e^{0.1594t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5687 \end{pmatrix}e^{-0.7844t}. \tag{33}$$

En virtud de que los eigenvalores tienen signos opuestos, el punto crítico (0.5, 0.5) es un punto silla y, por lo tanto, es inestable, como se supuso antes. Un par de trayectorias tienden al punto crítico cuando $t \to \infty$; las demás se alejan de éste. A medida que las trayectorias se aproximan al punto crítico, las que entran son tangentes a la recta con pendiente $(\sqrt{57} - 3)/8 \cong 0.5687$ determinada a partir del eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$.

En la figura 9.4.7 se muestra un diagrama de las trayectorias en la vecindad de cada punto crítico. Con base en la información mostrada en esta figura, así como en la figura 9.4.6, es

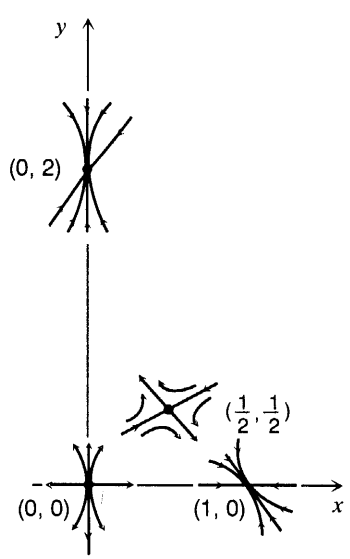


FIGURA 9.4.7 Trayectorias cerca de cada punto crítico para el sistema (21).

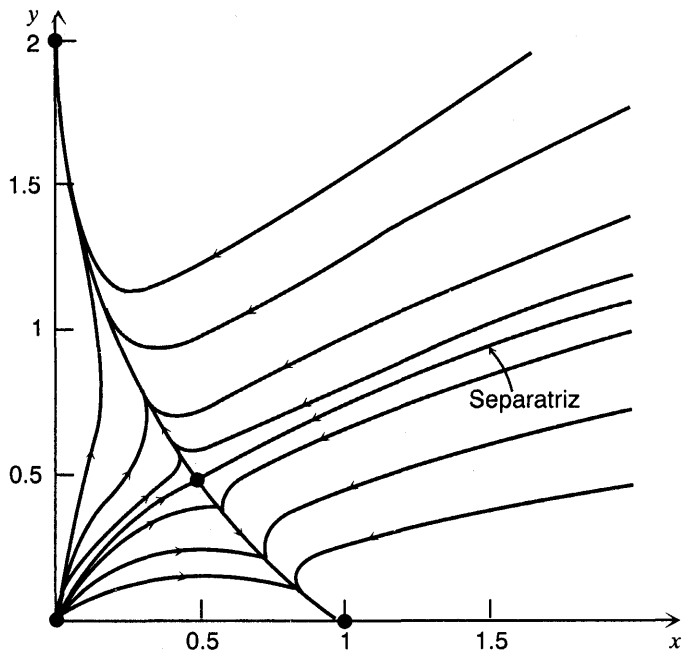


FIGURA 9.4.8 Trayectorias del sistema (21).

posible concluir con bastante confianza que en casi todos los casos una de las especies lleva a la otra a la extinción. En otras palabras, casi todas las trayectorias que se inician en el primer cuadrante al final tienden a uno o al otro de los dos nodos estables. La única excepción ocurre si el estado inicial está exactamente en el punto silla (0.5, 0.5) o sobre uno de los pares de trayectorias que terminan por entrar a este punto. Aun así, la más ligera perturbación a medida que se sigue esta trayectoria desalojará el punto (x, y) y, por el contrario, lo hará tender hacia uno de los nodos. Las trayectorias que entran al punto silla forman una curva a partir del origen que pasa por el punto (0.5, 0.5) y se va al infinito. Esta curva se llama separatriz, ya que separa (o divide) el primer cuadrante en dos partes conocidas como regiones (o cuencas) de atracción de los nodos respectivos. Todas las trayectorias que se inician en una de estas regiones terminan por tender al punto (0, 2), mientras que las trayectorias que se inician en la otra región terminan por aproximarse a (1, 0).

La información que se ha obtenido del examen cualitativo del sistema (21) puede confirmarse numéricamente al calcular varias soluciones y trazar las gráficas de las trayectorias correspondientes. En la figura 9.4.8 se dan algunas trayectorias representativas del sistema (21).

Los ejemplos 1 y 2 muestran que, en algunos casos, la competencia entre dos especies produce un estado de equilibrio de coexistencia, mientras que en otros casos la competencia da por resultado la extinción de una de las especies. Para comprender con mayor claridad cómo y por qué sucede esto y aprender a predecir qué situación ocurrirá, es útil volver a considerar el sistema general (2). Existen cuatro casos a considerar, dependiendo de la orientación relativa de las nuliclinas,

$$\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0 \qquad \text{y} \qquad \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0, \tag{34}$$

como se observa en la figura 9.4.9. Sea (X, Y) cualquier punto crítico en cualquiera de los cuatro casos. Como en los ejemplos 1 y 2, el sistema (2) es casi lineal en la vecindad de este punto porque el segundo miembro de cada ecuación diferencial es un polinomio cuadrático. Para estudiar el sistema (2) en la vecindad de este punto crítico se puede hacer

$$x = X + u, \qquad y = Y + v, \tag{35}$$

y sustituir en las ecuaciones (2). De manera alternativa, es posible usar la ecuación (11) de la sección 9.3. En cualquier caso, se obtiene el sistema lineal correspondiente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 X - \alpha_1 Y & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & \epsilon_2 - 2\sigma_2 Y - \alpha_2 X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{36}$$

A continuación aplíquese la ecuación (36) para determinar las condiciones en las que el modelo escrito por las ecuaciones (2) permite la coexistencia de las dos especies x y y. De los cuatro casos posibles que se muestran en la figura 9.4.9, sólo es posible la coexistencia en los casos c) y d). En estos casos, los valores de X y Y diferentes de cero se obtienen fácilmente al resolver las ecuaciones algebraicas (34); el resultado es

$$X = \frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\alpha_1}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}, \qquad Y = \frac{\epsilon_2\sigma_1 - \epsilon_1\alpha_2}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}. \tag{37}$$

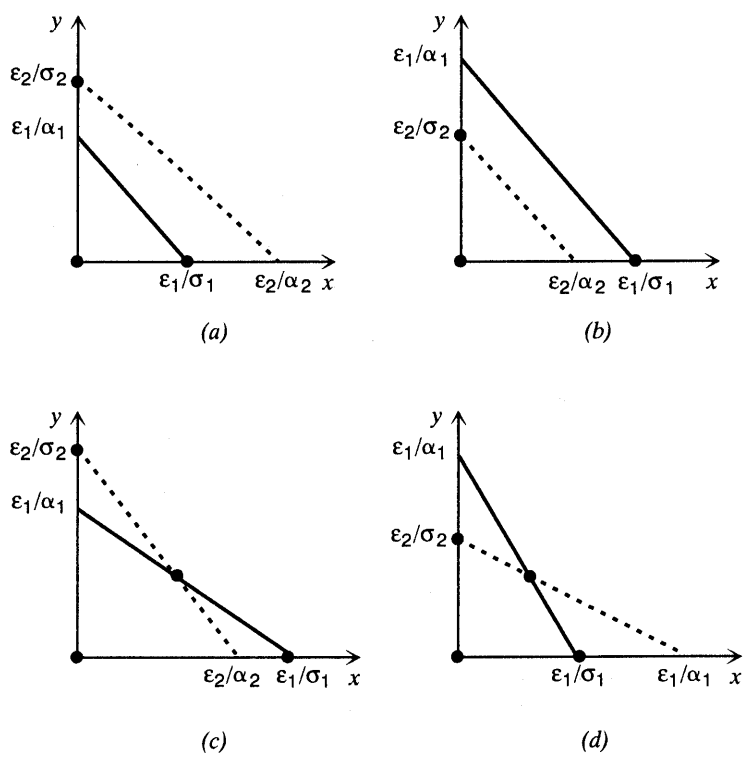


FIGURA 9.4.9 Los diversos casos para el sistema de especies competidoras (2).

Además, como $\epsilon_1 - \sigma_1 X - \alpha_1 Y = 0$ y $\epsilon_2 - \sigma_2 Y - \alpha_2 X = 0$, la ecuación (36) se reduce de inmediato a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 X & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & -\sigma_2 Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Los eigenvalores del sistema (38) se encuentran a partir de la ecuación

$$r^2 + (\sigma_1 X + \sigma_2 Y)r + (\sigma_1\sigma_2 XY - \alpha_1\alpha_2 XY) = 0. \tag{39}$$

Por tanto,

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1 X + \sigma_2 Y) \pm \sqrt{(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY}}{2}. \tag{40}$$

Si $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 < 0$, entonces el radicando de la ecuación (40) es positivo y mayor que $(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2$. Entonces, los eigenvalores son reales y tienen signos opuestos. Como consecuencia, el punto crítico (X, Y) es un punto silla inestable y no es posible la coexistencia. Este es el caso del ejemplo 2, en donde $\sigma_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.25$, $\alpha_2 = 0.75$ y $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = -0.5$.

Por otra parte, si $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 > 0$, el radicando de la ecuación (40) es menor que $(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2$. Por tanto, los eigenvalores son reales, negativos y distintos, o complejos con parte real negativa. Un análisis directo de dicho radicando muestra que los eigenvalores no pueden ser complejos (ver el problema 7). De este modo, el punto crítico es un nodo impropio asintóticamente estable y es posible la coexistencia sostenida. Esto se ilustra mediante el ejemplo 1, en donde $\sigma_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$ $\sigma_2 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$ y $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0.5$.

Relaciónese este resultado con las figuras 9.4.9*c* y 9.4.9*d*. En la figura 9.4.9*c* se tiene

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{o} \quad \epsilon_1\alpha_2 > \epsilon_2\sigma_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} > \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{o} \quad \epsilon_2\alpha_1 > \epsilon_1\sigma_2. \tag{41}$$

Estas desigualdades acopladas con la condición de que X y Y dadas por las ecuaciones (37) sean positivas da lugar a la desigualdad $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$. De donde, en este caso, el estado mixto es un punto silla. Por otra parte, en la figura 9.4.9*d* se tiene

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{o} \quad \epsilon_1\alpha_2 < \epsilon_2\sigma_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} < \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{o} \quad \epsilon_2\alpha_1 < \epsilon_1\sigma_2. \tag{42}$$

Ahora, la condición de que X y Y sean positivas da $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$. De donde, el estado mixto es asintóticamente estable. Para este caso también es posible demostrar que los otros puntos críticos $(0, 0)$ $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ y $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ son inestables. Por tanto para cualesquiera valores iniciales positivos de x y y, las dos poblaciones tienden al estado de equilibrio de coexistencia dado por las ecuaciones (37).

Las ecuaciones (2) proporcionan la interpretación biológica del resultado de que la coexistencia ocurre o no, dependiendo de si $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2$ es positiva o negativa. Las σ son una medida del efecto inhibitorio que el crecimiento de cada población tiene sobre sí misma, en tanto que las α son una medida del efecto inhibitorio que el crecimiento de cada población tiene sobre la otra especie. Por tanto, cuando $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$, la interacción (competencia) es "débil" y las especies pueden coexistir; cuando $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$, la interacción (competencia) es "fuerte" y las especies no pueden coexistir: una debe extinguirse.

Problemas

Cada uno de los problemas 1 a 6 puede interpretarse como si describiese la interacción de dos especies con poblaciones x y y. En cada uno de estos problemas efectúe los siguientes pasos:

a) Encuentre los puntos críticos.

b) Para cada punto crítico, halle el sistema lineal correspondiente. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores del sistema lineal; clasifique cada punto crítico según el tipo y determine si es asintóticamente estable, estable o inestable.

c) Trace las trayectorias en la vecindad de cada punto crítico.

d) En caso de ser posible, calcule y trace las gráficas de suficientes trayectorias del sistema dado para mostrar con claridad el comportamiento de las soluciones.

e) Determine el comportamiento límite de x y y cuando $t \to \infty$ e interprete los resultados en términos de las poblaciones de las dos especies.

1. $dx/dt = x(1.5 - x - 0.5y)$
   $dy/dt = y(2 - y - 0.75x)$
2. $dx/dt = x(1.5 - x - 0.5y)$
   $dy/dt = y(2 - 0.5y - 1.5x)$
3. $dx/dt = x(1.5 - 0.5x - y)$
   $dy/dt = y(2 - y - 1.125x)$
4. $dx/dt = x(1.5 - 0.5x - y)$
   $dy/dt = y(0.75 - y - 0.125x)$
5. $dx/dt = x(1 - x - y)$
   $dy/dt = y(1.5 - y - x)$
6. $dx/dt = x(1 - x + 0.5y)$
   $dy/dt = y(2.5 - 1.5y + 0.25x)$

7. Demuestre que

$$(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY = (\sigma_1 X - \sigma_2 Y)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 XY.$$

   De donde, que los eigenvalores dados por la ecuación (40) nunca pueden ser complejos.

8. Dos especies de peces que compiten entre sí por el alimento, pero ninguna es presa de la otra, son el *bluegill* (Lepomus machrochirus) y el *redear* (Lepomis microlophus). Suponga que se colocan en un estanque estas dos especies y sean x y y las poblaciones de *bluegill* y de *redear*, respectivamente, en el instante t. Además, suponga que la competencia la representan las ecuaciones

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y),$$
$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x).$$

   a) Si $\epsilon_2/\alpha_2 > \epsilon_1/\sigma_1$ y $\epsilon_2/\sigma_2 > \epsilon_1/\alpha_1$, demuestre que las únicas poblaciones de equilibrio en el estanque son ningún pez, ningún *redear* o ningún *bluegill*. ¿Qué sucederá?

   b) Si $\epsilon_1/\sigma_1 > \epsilon_2/\alpha_2$ y $\epsilon_1/\alpha_1 > \epsilon_2/\sigma_2$, demuestre que las únicas poblaciones de equilibrio en el estanque son ningún pez, ningún *redear* o ningún *bluegill*. ¿Qué sucederá?

9. Considere la competencia entre el *bluegill* y el *redear* mencionada en el problema 8. Suponga que $\epsilon_2/\alpha_2 > \epsilon_1/\sigma_1$ y $\epsilon_1/\alpha_1 > \epsilon_2/\sigma_2$, de modo que, como se demuestra en el texto, existe un punto de equilibrio estable en el que las dos especies pueden coexistir. Es conveniente volver a escribir las ecuaciones del problema 8 en términos de la capacidad de carga del estanque para el *bluegill* ($B = \epsilon_1/\sigma_1$) sin la presencia del *redear*, y para el *redear* ($R = \epsilon_2/\sigma_2$), sin la presencia del *bluegill*.

   a) Demuestre que las ecuaciones del problema 8 toman la forma

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon_1 x\left(1 - \frac{1}{B}x - \frac{\gamma_1}{B}y\right), \qquad \frac{dy}{dt} = \epsilon_2 y\left(1 - \frac{1}{R}y - \frac{\gamma_2}{R}x\right),$$

en donde $\gamma_1 = \alpha_1/\sigma_1$ y $\gamma_2 = \alpha_2/\sigma_2$. Determine el punto de equilibrio de coexistencia (X, Y) en términos de B, R, γ_1 y γ_2.

b) Suponga ahora que una persona pesca solamente *bluegill*, con el efecto de que se reduce B. ¿Qué efecto tiene esto en las poblaciones en equilibrio? ¿Es posible, al pescar, reducir la población de *bluegill* a un nivel en el que se extinga?

10. Considere el sistema (2) del texto, y suponga que $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0$.

a) Encuentre todos los puntos críticos del sistema. Observe que el resultado es diferente, dependiendo de si $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1$ es cero o no.

b) Si $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 > 0$, clasifique cada punto crítico y determine si es asintóticamente estable, estable o inestable. Observe que el problema 5 es de este tipo. Luego, haga lo mismo si $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 < 0$.

c) Analice la naturaleza de las trayectorias cuando $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 = 0$.

11. Considere el sistema (3) del ejemplo 1 del texto. Recuerde que este sistema tiene un punto crítico asintóticamente estable en (0.5, 0.5), correspondiente a la coexistencia estable de las dos especies de poblaciones. Suponga ahora que hay inmigración o emigración a las razones constantes δa y δb, para las especies x y y, respectivamente. En este caso, las ecuaciones (3) se sustituyen por

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y) + \delta a, \\ dy/dt &= y(0.75 - y - 0.5x) + \delta b. \end{aligned} \tag{i}$$

La pregunta es qué efecto tiene esto en la ubicación del punto de equilibrio estable.

a) Para encontrar el nuevo punto crítico es necesario resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} x(1 - x - y) + \delta a &= 0, \\ y(0.75 - y - 0.5x) + \delta b &= 0. \end{aligned} \tag{ii}$$

Una manera de proceder es si supone que x y y se dan en series de potencias en el parámetro δ; de este modo,

$$x = x_0 + x_1\delta + \cdots, \qquad y = y_0 + y_1\delta + \cdots. \tag{iii}$$

Sustituya la ecuaciones (iii) en las (ii) y agrupe los términos según las potencias de δ.

b) A partir de los términos constantes (los términos que no contienen δ), demuestre que $x_0 = 0.5$ y $y_0 = 0.5$, confirmando así que, sin inmigración o emigración del punto crítico es (0.5, 0.5).

c) A partir de los términos lineales en δ demuestre que

$$x_1 = 4a - 4b, \qquad y_1 = -2a + 4b. \tag{iv}$$

d) Suponga que $a > 0$ y $b > 0$, de modo que en las dos especies se tiene inmigración. Demuestre que la solución de equilibrio resultante puede representar un aumento en las dos poblaciones, o un aumento en una y una disminución en la otra. Explique intuitivamente por qué este resultado es razonable.

9.5 Ecuaciones del depredador-presa

En la sección anterior se analizó un modelo de dos especies que interactúan compitiendo por un suministro común de alimento o algún otro recurso natural. En esta sección se con-

sidera la situación en la que una de las especies (el depredador) se alimenta de la otra (la presa), mientras que ésta vive de otra fuente de alimento. Un ejemplo lo constituyen los zorros y los conejos en un bosque cerrado; los zorros cazan a los conejos y estos se alimentan de la vegetación del bosque. Otros ejemplos son la perca en un lago como depredador y el *redear* como presa, o las mariquitas como depredadoras y los pulgones como presas. Otra vez se insiste en que un modelo que incluye sólo a dos especies no puede describir por completo las complejas relaciones entre especies que en realidad ocurren en la naturaleza. Empero, el estudio de modelos simple es el primer paso hacia la comprensión de fenómenos más complicados.

Las poblaciones de la presa y del depredador en el instante t se denotarán por x y y, respectivamente. Al construir un modelo de la interacción de las dos especies, se hacen las siguientes suposiciones.

1. En ausencia del depredador, la presa crece con una razón proporcional a la población actual; por tanto, $dx/dt = ax$, $a > 0$, cuando $y = 0$.
2. En ausencia de la presa, el depredador se extingue; por tanto, $dy/dt = -cy$, $c > 0$, cuando $x = 0$.
3. El número de encuentros entre el depredador y la presa es proporcional al producto de sus poblaciones. Cada uno de esos encuentros tiende a favorecer el aumento de los depredadores y a inhibir el aumento de las presas. Por tanto, la razón de aumento de los depredadores se incrementa en un término de la forma γxy, mientras que la razón de aumento de las presas decrece en un término $-\alpha xy$, en donde γ y α son constantes positivas.

Como consecuencia de estas suposiciones, se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \\ dy/dt &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \end{aligned} \tag{1}$$

Todas las constantes a, c, α y γ son positivas; a y c son la razón de aumento de las presas y el índice de mortalidad de los depredadores, respectivamente, y α y γ son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies. Las ecuaciones (1) se conocen como ecuaciones de Lotka-Volterra; su desarrollo se publicó en artículos por Lotka[3] en 1925 y por Volterra[4] en 1926. Aunque éstas son ecuaciones más bien sencillas, caracterizan a una amplia clase de problemas. Al final de esta sección y en los problemas se analizan algunas formas de hacerlas más realistas. La meta aquí es estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones (trayectorias) del sistema (1) para valores iniciales positivos arbitrarios de x y y. Esto

[3] Alfred J. Lotka (1880-1949), biofísico estadounidense, nació en lo que ahora se conoce como Ucrania y se educó principalmente en Europa. Se le recuerda sobre todo por su planteamiento de las ecuaciones de Lotka-Volterra. También fue el autor, en 1924, del primer libro biología matemática, en la actualidad se le encuentra como *Elements of Mathematical Biology* (New York: Dover, 1956).

[4] Vito Volterra (1860-1940), distinguido matemático italiano, trabajó como profesor en Pisa, Turín y Roma. Es famoso en particular por su trabajo en ecuaciones integrales y análisis funcional. De hecho, una de las clases más importantes de ecuaciones integrales lleva su nombre; ver el problema 20 de la sección 6.6. Su teoría de las especies interactuantes fue motivada por los datos reunidos por un amigo suyo, D'Ancona, relacionados con la pesca en el Mar Adriático. Se puede hallar una traducción de su artículo de 1926 en un apéndice del libro de R. N. Chapman, *Animal Ecology with Special Reference to Insects* (New York: McGraw-Hill, 1931).

se hace primero para un ejemplo específico y después se regresa a las ecuaciones generales (1), al final de esta sección.

Ejemplo 1 Analizar las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - 0.5y) = x - 0.5xy, \\ dy/dt &= y(-0.75 + 0.25x) = -0.75y + 0.25xy \end{aligned} \tag{2}$$

para x y y positivas.

Los puntos críticos de este sistema son las soluciones de las ecuaciones algebraicas

$$x(1 - 0.5y) = 0, \qquad y(-0.75 + 0.25x) = 0, \tag{3}$$

a saber, los puntos (0, 0) y (3, 2). Las nuliclinas x y y son las rectas $y = 2$ y $x = 3$, respectivamente, así como los ejes de coordenadas. En la figura 9.5.1 se muestran los puntos críticos, las nuliclinas y el campo direccional del sistema (2). A partir de esta figura se concluye tentativamente que las trayectorias en el primer cuadrante deben ser curvas cerradas que rodean al punto crítico (3, 2).

En seguida, examina el comportamiento local de las soluciones cerca de cada punto crítico. Cerca del origen es posible despreciar los términos no lineales que de las ecuaciones (2), para obtener el sistema lineal correspondiente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Los eigenvalores y eigenvectores de la ecuación (4) son

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -0.75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

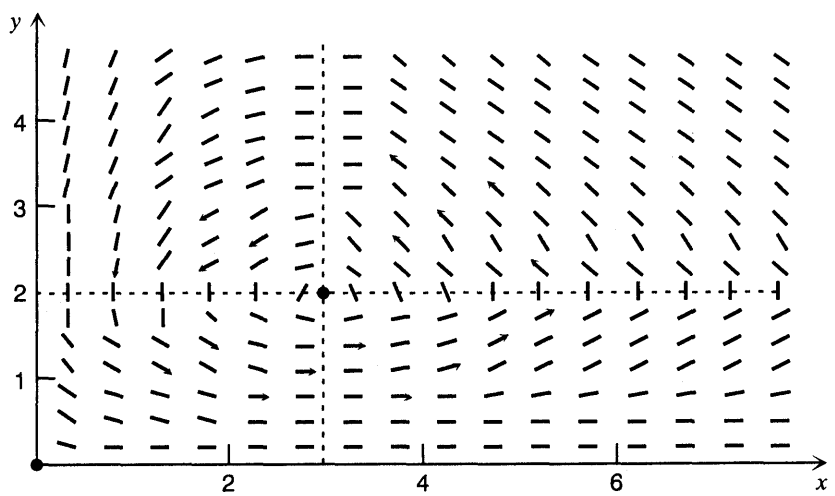


FIGURA 9.5.1 Nuliclinas, puntos críticos y campo direccional para el sistema depredador-presa (2).

por lo que su solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t}. \tag{6}$$

Por tanto, el origen es un punto silla del sistema lineal (4) y del sistema no lineal (2) por consiguiente, es un punto crítico inestable. Un par de trayectorias entran al origen a lo largo del eje y; todas las demás trayectorias salen de la vecindad del origen.

Para examinar el punto crítico (3, 2) es posible hacer la sustitución

$$x = 3 + u, \qquad y = 2 + v \tag{7}$$

en las ecuaciones (2) y luego despreciar los términos no lineales en u y en v, o bien, hacer referencia a la ecuación (11) de la sección 9.3. En cualquiera de los dos casos, se obtiene el sistema lineal

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Los eigenvalores y eigenvectores de este sistema son

$$r_1 = \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

En virtud de que los eigenvalores son imaginarios, el punto crítico (3, 2) es un centro del sistema lineal (8) y, por lo tanto, es un punto crítico estable de ese sistema. Recuérdese por lo visto en la sección 9.3, que este es uno de los casos en los que el comportamiento del sistema lineal puede trasladarse o no hacia el sistema no lineal, de modo que la caracterización del punto (3, 2) del sistema no lineal (2) puede no ser determinada a partir de esta información. La manera más sencilla de encontrar las trayectorias del sistema lineal (8) es dividir la segunda de las ecuaciones (8) entre la primera para obtener la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{0.5u}{-1.5v} = -\frac{u}{3v}$$

o bien

$$u\,du + 3v\,dv = 0. \tag{10}$$

Como consecuencia,

$$u_2 + 3v^2 = k, \tag{11}$$

en donde k es una constante arbitraria no negativa de integración.

En la figura 9.5.2 se muestra el comportamiento local de las soluciones de las ecuaciones (2), cerca de cada punto crítico. Obsérvese que este comportamiento es coherente con el campo direccional que se muestra en la figura 9.5.1.

Ahora, vuélva al sistema no lineal (2). Si se divide la segunda de las ecuaciones (2) entre la primera, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-0.75 + 0.25x)}{x(1 - 0.5y)}. \tag{12}$$

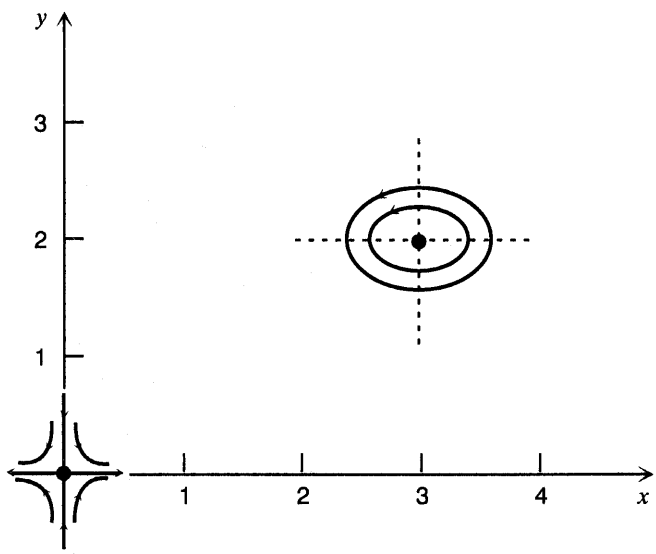


FIGURA 9.5.2 Trayectorias cerca de cada punto crítico para el sistema (2).

La ecuación (12) es una ecuación separable y es posible ponerla en la forma

$$\frac{1 - 0.5y}{y}\,dy = \frac{-0.75 + 0.25x}{x}\,dx,$$

a partir de la cual se concluye que

$$0.75 \ln x + \ln y - 0.5y - 0.25x = c, \tag{13}$$

en donde c es una constante de integración. Aunque la ecuación (13) no se puede resolver explícitamente para cualquiera de las variables en términos de la otra, es posible demostrar que la gráfica de la ecuación para un valor fijo de c es una curva cerrada que rodea al punto crítico (3, 2). Así entonces, el punto crítico también es un centro del sistema no lineal (2) y las poblaciones del depredador y de la presa muestran una variación cíclica.

En la figura 9.5.3 se muestran varias trayectorias del sistema (2) calculadas numéricamente. Para algunas condiciones iniciales, la trayectoria representa pequeñas variaciones en x y y alrededor del punto crítico y su forma es casi elíptica, como lo sugiere el análisis lineal. Para otras condiciones iniciales, las oscilaciones en x y y son más pronunciadas, y la forma de la trayectoria es notablemente diferente a una elipse. Obsérvese que las trayectorias se recorren en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. En la figura 9.5.4 se muestra la dependencia de x y y con respecto a t para un conjunto típico de condiciones iniciales. Nótese que x y y son funciones periódicas de t, como debe ser, dado que las trayectorias son curvas cerradas. Además, la oscilación de la población del depredador va a la zaga de la presa. Si se parte de un estado en el que las dos poblaciones, del depredador y de la presa, son relativamente pequeñas, las presas aumentan primero porque hay poca caza de ellas; en seguida, con alimento abundante, también aumenta la población de los depredadores. Esto causa una cacería más intensa y el número de presas tiende a disminuir. Por último, al disminuir el suministro de alimento, la población de depredadores también disminuye y el sistema regresa a su estado original.

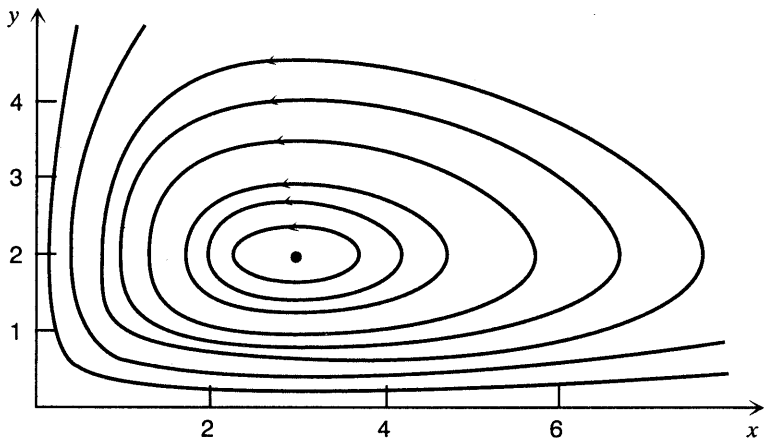


FIGURA 9.5.3 Trayectoria del sistema (3).

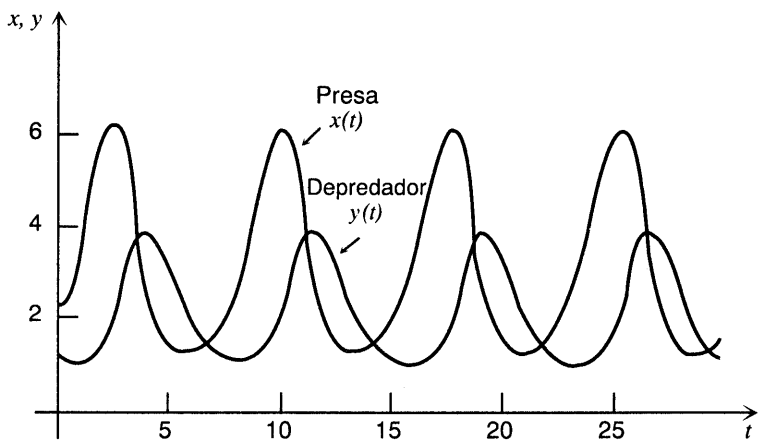


FIGURA 9.5.4 Variaciones de las poblaciones del depredador y de la presa con el tiempo, para el sistema (2).

El sistema general (1) se puede analizar exactamente de la misma manera que en el ejemplo. Los puntos críticos del sistema (1) son las soluciones de

$$x(a - \alpha y) = 0, \qquad y(-c + \gamma x) = 0,$$

es decir, los puntos (0, 0) y $(c/\gamma, a/\alpha)$. Se analizarán primero las soluciones del sistema lineal correspondiente cerca de cada punto crítico.

En la vecindad del origen se desprecian los términos no lineales de las ecuaciones (1) para obtener el sistema lineal correspondiente; a saber,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Los eigenvalores y eigenvectores son

$$r_1 = a, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -c, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

de modo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}. \tag{16}$$

Por tanto, el origen es un punto silla y, en consecuencia, inestable. La entrada al punto silla es a lo largo de la recta $x = 0$; todas las demás trayectorias salen de la vecindad del punto crítico.

A continuación, considérese el punto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Si $x = (c/\gamma) + u$ y $y = (a/\alpha) + v$, el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Los eigenvalores del sistema (17) son $r = \pm i\sqrt{ac}$, por lo que el punto crítico es un centro (estable) del sistema lineal. Para hallar las trayectorias del sistema (17) se puede dividir la segunda ecuación entre la primera para obtener

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v}, \tag{18}$$

o bien,

$$\frac{\gamma a}{\alpha} u\, du + \frac{\alpha c}{\gamma} v\, dv = 0. \tag{19}$$

Como consecuencia,

$$\frac{\gamma a}{\alpha} u^2 + \frac{\alpha c}{\gamma} v^2 = k, \tag{20}$$

en donde k es una constante no negativa de integración. Por tanto, las trayectorias del sistema lineal (17) son elipses, como en el ejemplo, y el punto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$ es un centro.

Si se regresa brevemente al sistema no lineal (1), obsérvese que es posible reducirlo a la simple ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)}. \tag{21}$$

La ecuación (21) es separable y tiene la solución

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C, \tag{22}$$

en donde C es una constante de integración. Una vez más, es posible demostrar que la gráfica de la ecuación (22), para C fija, es una curva cerrada que rodea al punto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Por tanto, este punto crítico también es un centro para el sistema no lineal general (1).

La variación cíclica de las poblaciones de depredadores y de presas se puede analizar con más detalle cuando las desviaciones con respecto al punto $(c/\gamma, a/\alpha)$ son pequeñas y es posible usar el sistema lineal (17). La solución del sistema (17) puede escribirse en la forma

$$u = \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{ac}\, t + \phi), \qquad v = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} K \operatorname{sen}(\sqrt{ac}\, t + \phi), \tag{23}$$

en donde las constantes K y ϕ quedan determinadas por las condiciones iniciales. Por tanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{ac}\, t + \phi), \\ y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} K \operatorname{sen}(\sqrt{ac}\, t + \phi). \end{aligned} \tag{24}$$

Estas ecuaciones son válidas para las trayectorias elípticas cercanas al punto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$; es posible aplicarlas para sacar varias conclusiones con respecto a la variación cíclica del depredador y la presa sobre esas trayectorias.

1. Los tamaños de las poblaciones del depredador y la presa varían sinusoidalmente con periodo $2\pi/\sqrt{ac}$; este periodo de oscilación es independiente de las condiciones iniciales.
2. Las poblaciones del depredador y la presa están desfasadas en un cuarto de ciclo; la de la presa va adelante y la del depredador atrás, como se explicó en el ejemplo.
3. Las amplitudes de las oscilaciones son Kc/γ para la presa y $a\sqrt{c}\, K/\alpha\sqrt{a}$ para el depredador y, por tanto, dependen de las condiciones iniciales, así como de los parámetros del problema.
4. Las poblaciones promedio del depredador y de la presa en un ciclo completo son c/γ y a/α, respectivamente; estas son las mismas que las poblaciones de equilibrio; ver el problema 9.

Las variaciones cíclicas del depredador y de la presa, como las predicen las ecuaciones (1) se han observado en la naturaleza. Un ejemplo sorprendente lo describe Odum (págs. 191-192); con base en los registros de la Hudson Bay Company de Canadá, la abundancia de lince y liebre, según lo indica el número de pieles obtenidas durante el periodo de 1845 a 1935, muestra una variación periódica distinta con periodo de nueve a diez años. Los picos de abundancia son seguidos por disminuciones muy rápidas, y los picos de abundancia del lince y la liebre están desfasados, con los de la liebre adelante de los del lince en un años o más.

El modelo de Lotka-Volterra del problema depredador-presa reveló una variación cíclica que quizá pudo haberse anticipado. Por otra parte, la aplicación del modelo de Lotka-Volterra en otras situaciones puede llevar a conclusiones que no son evidentes intuitivamente. En el problema 11 se da un ejemplo que sugiere un peligro potencial en el uso de insecticidas.

Una crítica a las ecuaciones de Lotka-Volterra es que, en ausencia del depredador, las presas aumentarán sin límite. Esto se corrige si se toma en cuenta el efecto inhibitorio natural que una población creciente tiene sobre su índice de crecimiento; por ejemplo, la primera de las ecuaciones (1) puede modificarse de modo que cuando $y = 0$ se reduzca a una ecuación logística para x (ver el problema 12). La consecuencia más importante de esta modificación es que el punto crítico en $(c/\gamma, a/\alpha)$ se desplaza hacia $(c/\gamma, a/\alpha - \sigma c/\alpha\gamma)$

y se vuelve un punto asintóticamente estable. Este es un nodo o un punto espiral, dependiendo de los valores de los parámetros en las ecuaciones diferenciales. En cualquier caso, las demás trayectorias dejan de ser curvas cerradas, aunque tienden al punto crítico cuando $t \to \infty$.

Problemas

Cada uno de los problemas 1 a 5 puede interpretarse como si describiera la interacción de dos especies con densidades de población x y y. En cada uno de estos problemas, efectúe los siguientes pasos:

a) Ecuentre los puntos críticos.

b) Para cada punto crítico, halle el sistema lineal correspondiente. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores del sistema lineal; clasifique cada punto crítico según su tipo y determine si es asintóticamente estable, estable o inestable.

c) Trace las trayectorias en la vecindad de cada punto crítico.

d) Si es posible, calcule y trace las trayectorias suficientes del sistema para mostrar con claridad el comportamiento de las soluciones.

e) Determine el comportamiento límite de x y y cuando $t \to \infty$ e interprete los resultados en términos de las poblaciones de las dos especies.

1. $dx/dt = x(1.5 - 0.5y)$
   $dy/dt = y(-0.5 + x)$
2. $dx/dt = x(1 - 0.5y)$
   $dy/dt = y(-0.25 + 0.5x)$
3. $dx/dt = x(1 - 0.5x - 0.5y)$
   $dy/dt = y(-0.25 + 0.5x)$
4. $dx/dt = x(1.125 - x - 0.5y)$
   $dy/dt = y(-1 + x)$
5. $dx/dt = x(-1 + 2.5x - 0.3y - x^2)$
   $dy/dt = y(-1.5 + x)$
6. En este problema se examina la diferencia de fase entre las variaciones cíclicas de las poblaciones del depredador y de la presa, según se dan en las ecuaciones (24) del texto. Suponga que $K > 0$ y que t se mide a partir del instante en que la población de la presa (x) es un máximo; entonces $\phi = 0$. Demuestre que la población del depredador (y) es un máximo en $t = \pi/2\sqrt{ac} = T/4$, en donde T es el periodo de oscilación. ¿Cuándo aumenta con mayor rapidez la población de la presa, cuándo disminuye más rápido y cuándo es un mínimo? Conteste las mismas preguntas para la población del depredador. Trace una trayectoria elíptica típica que encierre al punto $(c/\gamma, a/\alpha)$ y marque estos puntos en ella.
7. a) Encuentre la razón entre las amplitudes de las oscilaciones de las poblaciones de la presa y del depredador alrededor del punto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$, si se usa la aproximación (24), que es válida para oscilaciones pequeñas. Observe que la razón es independiente de las condiciones iniciales.

   b) Evalúe la razón hallada en el inciso a) para el sistema (2).

   c) Calcule la razón entre las amplitudes para la solución del sistema no lineal (2) que se muestra en la figura 9.5.4 ¿Concuerda el resultado con el obtenido a partir de la aproximación lineal?

   *d) Si es posible, determine la razón entre las amplitudes depredador-presa para otras soluciones del sistema (2); es decir, para soluciones que satisfagan otras condiciones iniciales. ¿Es independiente la razón de las condiciones iniciales?
8. a) Encuentre el periodo de las oscilaciones de las poblaciones de la presa y el depredador, si se usa la aproximación (24), que es válida para oscilaciones pequeñas. Observe que el periodo es independiente de la amplitud de las oscilaciones.

b) Para la solución del sistema no lineal (2) que se muestra en la figura 9.5.4, calcule el periodo tan bien como sea posible. ¿Es igual el resultado al de la aproximación lineal?

*c) En caso de ser posible, calcule otras soluciones del sistema (2); es decir, soluciones que satisfagan otras condiciones iniciales y determine sus periodos. ¿El periodo es el mismo para todas las condiciones iniciales?

9. Los tamaños promedio de las poblaciones de la presa y el depredador se definen como

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_A^{A+T} x(t)\,dt, \quad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_A^{A+T} y(t)\,dt,$$

respectivamente, en donde T es el periodo de un ciclo completo y A es cualquier constante no negativa.

a) Si se aplica la aproximación (24), válida cerca del punto crítico, demuestre que $\bar{x} = c/\gamma$, $\bar{y} = a/\alpha$.

b) Para la solución del sistema no lineal (2) que se muestra en la figura 9.5.4 calcule $\bar{x}$ y $\bar{y}$ tan bien como se pueda. Intente determinar en este caso, si $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se expresan por c/γ y a/α, respectivamente.

Sugerencia: considere cómo podría estimarse el valor de una integral aun sin contar con una fórmula para el integrado.

*c) Si es posible, calcule otras soluciones del sistema (2); es decir, soluciones que satisfagan otras condiciones iniciales y determine $\bar{x}$ y $\bar{y}$ para estas soluciones. ¿Los valores de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son los mismos para todas las soluciones?

10. Suponga que las ecuaciones depredador-presa (1) del texto rigen a los zorros (y) y conejos (x) en un bosque. Una compañía se dedica a atrapar zorros y conejos por sus pieles. Explique por qué es razonable que la compañía realice su operación de modo que desplace a la población de cada especie más cercana al centro $(c/\gamma, a/\alpha)$. ¿Cuándo es mejor atrapar zorros? ¿Cuándo conejos? ¿Cuándo conejos y zorros? ¿Cuándo ninguno?
Sugerencia: ver el problema 6. Todo lo que se requiere es un argumento intuitivo.

11. Suponga que a una población de insectos (x) la controla una población de un depredador natural (y), según el modelo (1), de modo que existen pequeñas variaciones cíclicas de las poblaciones alrededor del punto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Suponga que se emplea un insecticida con la meta de reducir la población de insectos y que este insecticida también es tóxico para los depredadores; de hecho, suponga que el insecticidas mata tanto a la presa como al depredador en razones proporcionales a sus poblaciones respectivas. Escriba las ecuaciones diferenciales modificadas, determine el nuevo punto de equilibrio y compárelo con el punto de equilibrio original.

Prohibir los insecticidas con base en este modelo simple y el resultado contrario a la intuición ciertamente sería desacertado. Por otra parte, también es imprudente ignorar la posible existencia genuina de un fenómeno como el sugerido por este modelo.

12. Como se mencionó en el texto, una mejora en el modelo depredador-presa es modificar la ecuación de la presa de modo que adquiera la forma de una ecuación logística, en ausencia del depredador. Por tanto, en lugar de las ecuaciones (1) se considera el sistema

$$dx/dt = x(a - \sigma x - \alpha y), \qquad dy/dt = y(-c + \gamma x),$$

en donde a, σ, α, c y γ son constantes positivas. Determine todos los puntos críticos y analice su naturaleza y características de estabilidad. Suponga que $a/\sigma \gg c/\gamma$. ¿Qué sucede para los datos iniciales $x \neq 0, y \neq 0$?

9.6 Segundo método de Liapunov

En la sección 9.3 se demostró de qué manera suele determinarse la estabilidad de un punto crítico de un sistema casi lineal a partir de un estudio del sistema lineal correspondiente. Sin embargo, no es posible sacar conclusiones cuando el punto crítico es un centro del sistema lineal correspondiente. Ejemplos de esta situación son el péndulo no amortiguado, las ecuaciones (1) y (2) que se dan un poco más adelante y el problema depredador-presa que se analizó en la sección 9.5. También, para un punto crítico asintóticamente estable puede ser importante investigar la región de estabilidad asintótica; es decir, ese dominio para el que todas las soluciones que inician en su interior tiendan al punto crítico. Dado que la teoría de los sistemas casi lineales es una teoría local, no proporciona información sobre esta cuestión.

En esta sección se analiza otro enfoque, conocido como **segundo método de Liapunov**[5] o **método directo**. El método se menciona como directo porque no se requiere conocimiento alguno de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. En vez de ello, las conclusiones sobre la estabilidad o inestabilidad de un punto crítico se obtienen al construir una función auxiliar adecuada. La técnica es una muy poderosa que proporciona un tipo de información más global; por ejemplo, una estimación de la extensión de la región de estabilidad asintótica de un punto crítico. Además, también puede aplicarse el segundo método de Liapunov para estudiar sistemas de ecuaciones que no sean casi lineales; sin embargo, aquí no se abordarán esos problemas.

Básicamente, el segundo método de Liapunov es una generalización de dos principios físicos de los sistemas conservativos; a saber, i) una posición de reposo es estable si la energía potencial es un mínimo local; en caso contrario, es inestable, y ii) la energía total es una constante durante cualquier movimiento. Para ilustrar estos conceptos, considérese otra vez el péndulo no amortiguado (un sistema mecánico conservativo), que se rige por la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{1}$$

El sistema correspondiente de ecuaciones de primer orden es

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x, \tag{2}$$

en donde $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$. Si se omite una constante arbitraria, la energía potencial U es el trabajo efectuado al elevar el péndulo por arriba de su posición más baja; a saber,

$$U(x, y) = mgl(1 - \cos x); \tag{3}$$

[5] Alexandr M. Liapunov (1857-1918), estudiante de Chebyshev en San Petersburgo, enseñó en la Universidad de Kharkov desde 1885 hasta 1901, cuando se hizo académico en matemáticas aplicadas en la Academia de Ciencias de San Petersburgo. En 1917 se mudó a Odessa debido a la delicada salud de su esposa. Sus investigaciones sobre estabilidad abarcan tanto análisis teóricos como aplicaciones a varios problemas físicos. Su segundo método formó parte de su trabajo más importante, *General Problem of Stability of Motion*, publicado en 1892.

ver la figura 9.2.4. Los puntos críticos del sistema (2) son $x = \pm n\pi$, $y = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, correspondientes a $\theta = \pm n\pi$, $d\theta/dt = 0$. Físicamente, es de esperar que los puntos $x = 0$, $y = 0$; $x = \pm 2\pi$, $y = 0, \ldots$, correspondientes a $\theta = 0 \pm 2\pi, \ldots$, para los que la lenteja del péndulo está vertical con el peso hacia abajo, sean estables, y que los puntos $x = \pm\pi$, $y = 0$; $x = \pm 3\pi$, $y = 0, \ldots$, correspondientes a $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$, para los que la lenteja del péndulo está vertical con el peso hacia arriba, sean inestables. Esto concuerda con la proposición i) porque, en los primeros puntos, U es un mínimo igual a cero, y en los segundos, U es un máximo igual a $2\,mgl$.

A continuación, considérese la energía total V, que es la suma de la energía potencial U y la energía cinética $\frac{1}{2}m^2\,(d\theta/dt)^2$. En términos de x y y,

$$V(x, y) = mgl(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}ml^2y^2. \tag{4}$$

Sobre una trayectoria correspondiente a una solución $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ de las ecuaciones (2), V puede considerarse como una función de t. La derivada de $V[\phi(t), \psi(t)]$ se llama razón de cambio de V al seguir la trayectoria. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= (mgl \operatorname{sen} x)\frac{dx}{dt} + ml^2y\frac{dy}{dt},\end{aligned} \tag{5}$$

en donde se sobreentiende que $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$. Por último, al sustituir dx/dt y dy/dt de la (5) por sus expresiones en (2), se encuentra que $dV/dt = 0$. De donde, V es una constante a lo largo de cualquier trayectoria del sistema (2), lo que es la proposición ii).

Es importante hacer notar que, en cualquier punto (x, y), la razón de cambio de V a lo largo de la trayectoria que pasa por ese punto se calculó *sin resolver realmente* el sistema (2). Es precisamente este hecho el que permite usar el segundo método de Liapunov para sistemas cuya solución se desconoce y, por tanto, lo convierte en una técnica tan importante.

En los puntos críticos estable $x = \pm 2n\pi$, $y = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, la energía V es cero. Si el estado inicial, por ejemplo (x_1, y_1), del péndulo se encuentra suficientemente cerca de un punto crítico estable, la energía $V(x_1, y_1)$ es pequeña y el movimiento (trayectoria) asociado con esta energía permanece cercana al punto crítico. Se puede demostrar que si $V(x_1, x_1)$ es suficientemente pequeña, la trayectoria es cerrada y contiene al punto crítico. Por ejemplo, supóngase que (x_1, y_1) está cerca de $(0, 0)$ y que $V(x_1, y_1)$ es muy pequeña. La ecuación de la trayectoria con energía $V(x_1, y_1)$ es

$$V(x, y) = mgl(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}ml^2y^2 = V(x_1, y_1).$$

Para x pequeña se tiene $1 - \cos x = 1 - (1 - x^2/2! + \cdots) \simeq x^2/2$. Por tanto, la ecuación de la trayectoria es aproximadamente

$$\tfrac{1}{2}mglx^2 + \tfrac{1}{2}ml^2y^2 = V(x_1, y_1)$$

o bien,

$$\frac{x^2}{2V(x_1, y_1)/mgl} + \frac{y^2}{2V(x_1, y_1)/ml^2} = 1.$$

Esta es una elipse que encierra al punto crítico (0, 0); mientras más pequeña sea $V(x_1, y_1)$, más pequeños son los ejes mayor y menor de la elipse. Físicamente, la trayectoria cerrada corresponde a una solución que es periódica en el tiempo: el movimiento es una pequeña oscilación en torno al punto de equilibrio.

Sin embargo, si existe amortiguamiento, es natural esperar que la amplitud del movimiento decaiga con el tiempo y que el punto crítico estable (centro) se vuelva un punto crítico asintóticamente estable (punto espiral). Ver el diagrama de las trayectorias para el péndulo amortiguado en la figura 9.3.5. Esto casi puede argumentarse al considerar dV/dt. Para el péndulo amortiguado, la energía total todavía se expresa por la ecuación (4); pero ahora, por las ecuaciones (17), de la sección 9.3, $dx/dt = y$ y $dy/dt = -(g/l)\operatorname{sen} x - (c/lm)y$. Si se sustituyen dx/dt y dy/dt de la ecuación (5) da $dV/dt = -cly^2 \leq 0$. Por tanto, la energía es no creciente a lo largo de cualquier trayectoria y, excepto por la recta $y = 0$, el movimiento es de tal tipo que la energía disminuye y por consiguiente, cada trayectoria debe tender a un punto de energía mínima: un punto de equilibrio estable. Si $dV/dt < 0$, en vez de $dV/dt \leq 0$, resulta razonable esperar que esto sea cierto para todas las trayectorias que se inician lo suficientemente cerca del origen.

Para proseguir más estas ideas, considérese el sistema autónomo

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y), \tag{6}$$

y supóngase que el punto $x = 0$, $y = 0$ es un punto crítico asintóticamente estable. Entonces existe algún dominio D que contiene a (0, 0) tal que toda trayectoria que se inicie en D debe tender al origen cuando $t \to \infty$. Supóngase que existe una función de "energía" V tal que $V(x, y) \geq 0$ para (x, y) en D, con $V = 0$ sólo en el origen. Como cada trayectoria en D tiende al origen cuando $t \to \infty$, si se sigue cualquier trayectoria particular, V decrece a cero cuando t tiende al infinito. El tipo de resultado que se desea demostrar es en esencia el inverso: si, sobre toda trayectoria, V decrece a cero cuando t crece, entonces las trayectorias deben tender al origen cuando $t \to \infty$ y, de donde, el origen es asintóticamente estable. Sin embargo, es necesario dar primero varias definiciones.

Sea V definida sobre algún dominio D que contiene el origen. Entonces se dice que V es definida positiva sobre D si $V(0, 0) = 0$ y $V(x, y) > 0$ para todos los demás puntos en D. De manera semejante, se dice que V es **definida negativa** sobre D si $V(0, 0) = 0$ y $V(x, y) < 0$ para todos los demás puntos en D. Si se sustituyen las desigualdades $>$ y $<$ por $\geq$ y $\leq$, se dice que V es **semidefinida positiva** y **semidefinida negativa** respectivamente. Se hace hincapié en que al hablar de una función definida positiva (definida negativa, . . .) sobre un dominio D que contiene al origen, la función debe ser cero en el origen, además de satisfacer la desigualdad adecuada en todos los demás puntos en D.

Ejemplo 1 La función

$$V(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$

es definida positiva sobre $x^2 + y^2 < \pi/2$, ya que $V(0, 0) = 0$ y $V(x, y) > 0$ para $0 < x^2 + y^2 < \pi/2$. Sin embargo, la función

$$V(x, y) = (x + y)^2$$

es sólo semidefinida positiva, ya que $V(x, y) = 0$ sobre la recta $y = -x$.

También se desea considerar la función

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y), \tag{7}$$

en donde F y G son las mismas funciones que en las ecuaciones (6). Se elige esta notación porque $\dot{V}(x, y)$ puede identificarse como la razón de cambio de V a lo largo de la trayectoria del sistema (6) que pasa por el punto (x, y). Es decir, si $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ es una solución del sistema (6), entonces

$$\begin{aligned} \frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \\ &= \dot{V}(x, y). \end{aligned} \tag{8}$$

Algunas veces la función $\dot{V}$ se menciona como la derivada de V con respecto al sistema (6).

A continuación se enuncian los dos teoremas de Liapunov; el primero sobre la estabilidad y el segundo sobre la inestabilidad.

Teorema 9.6.1 Supóngase que el sistema autónomo (6) tiene un punto crítico aislado en el origen. Si existe una función V que es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas, es definida positiva y para la cual la función $\dot{V}$ dada por la ecuación (7) es definida negativa sobre algún dominio D en el plano xy que contiene a $(0, 0)$, entonces el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Si $\dot{V}$ es semidefinida negativa, entonces el origen es un punto crítico estable.

Teorema 9.6.2 Sea el origen en un punto crítico aislado del sistema autónomo (6). Sea V una función que es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas. Supóngase que $V(0, 0) = 0$ y que en toda vecindad del origen existe por lo menos un punto en el que V es positiva (negativa). Entonces, si existe un dominio D que contenga al origen tal que la función $\dot{V}$, según se expresa por la ecuación (7), es definida positiva (definida negativa) sobre D, entonces el origen es un punto crítico inestable.

La función V se llama **función de Liapunov**. Antes de presentar demostraciones geométricas de los teoremas 9.6.1 y 9.6.2, es conveniente hacer notar que la dificultad en la aplicación de estos teoremas es que nada dicen sobre cómo construir una función de Liapunov, si se supone que existe. En los casos en los que el sistema autónomo (6) representa un problema físico, es natural considerar primero la función real de energía total del sistema como una función posible de Liapunov. Sin embargo, conviene resaltar que los teoremas 9.6.1 y 9.6.2 son aplicables en casos en los que no es pertinente el concepto de energía física. En esos casos puede ser necesario un enfoque prudente por tanteos.

Considérese ahora la segunda parte del teorema 9.6.1, es decir, el caso $\dot{V} \leq 0$. Sea $c \geq 0$ una constante y considérese la curva en el plano xy dada por $V(x, y) = c$. Para $c = 0$, la curva se reduce al simple punto $x = 0$, $y = 0$. Sin embargo, para $c > 0$ y suficientemente pequeña, es posible demostrar que al aplicar la continuidad de V, la curva es cerrada y contiene al

origen, como se ilustra en la figura 9.1.6*a*. Además se supone que si $0 < c_1 < c_2$, la curva $V(x, y) = c_1$ está dentro de la curva $V(x, y) = c_2$. Se demostrará que una trayectoria que se inicie adentro de una curva cerrada $V(x, y) = c$ no puede salir de ésta. Por tanto, dado un círculo de radio ϵ alrededor del origen, al tomar c suficientemente pequeña se puede asegurar que toda trayectoria que se inicie adentro de la curva cerrada $V(x, y) = c$ permanece dentro del círculo de radio ϵ; de hecho, permanece en el interior de la propia curva cerrada $V(x, y) = c$. Por tanto, el origen es un punto crítico estable.

Para demostrar esto, recuérdese por lo visto en cálculo que el vector

$$\nabla V(x, y) = V_x(x, y)\mathbf{i} + V_y(x, y)\mathbf{j}, \tag{9}$$

conocido como gradiente de V, es normal a la curva $V(x, y) = c$ y apunta en la dirección de V creciente. En este caso, V crece hacia afuera del origen, de modo que ∇V apunta hacia afuera del origen, como se indica en la figura 9.6.1*b*. Considérese a continuación una trayectoria $x = \phi(t), y = \psi(t)$ del sistema (6) y recuérdese que el vector $\mathbf{T}(t) = \phi'(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$ es tangente a la trayectoria en cada punto; ver la figura 9.6.1*b*. Sea $x_1 = \phi(t_1), y_1 = \psi(t_1)$ un punto de intersección de la trayectoria y una curva cerrada $V(x, y) = c$. En este punto, $\phi'(t_1) = F(x_1, y_1)$, $\psi'(t_1) = G(x_1, y_1)$, de modo que, por la ecuación (7), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, y_1) &= V_x(x_1, y_1)\phi'(t_1) + V_y(x_1, y_1)\psi'(t_1) \\ &= [V_x(x_1, y_1)\mathbf{i} + V_y(x_1, y_1)\mathbf{j}] \cdot [\phi'(t_1)\mathbf{i} + \psi'(t_1)\mathbf{j}] \\ &= \nabla V(x_1, y_1) \cdot \mathbf{T}(t_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Por tanto, $\dot{V}(x_1, y_1)$ es el producto escalar del vector $\nabla V(x_1, y_1)$ y el vector $\mathbf{T}(t_1)$. Dado que $\dot{V}(x_1, y_1) \leq 0$, se concluye que el coseno del ángulo entre $\nabla V(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(t_1)$ también es menor que, o igual a cero de donde, el propio ángulo se encuentra en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Por tanto, la dirección del movimiento sobre la trayectoria es hacia dentro con respecto a $V(x, y) = c$ o , en el peor de los casos, tangente a esta curva. Las trayectorias que se inician en el interior de una curva cerrada $V(x, y) = c$ (no importa cuán pequeña sea c) no puede escapar, de modo que el origen es un punto estable. Si $\dot{V}(x, y) < 0$, entonces las trayectorias que pasan por los puntos de la curva en realidad apunta hacia adentro. Como consecuencia,

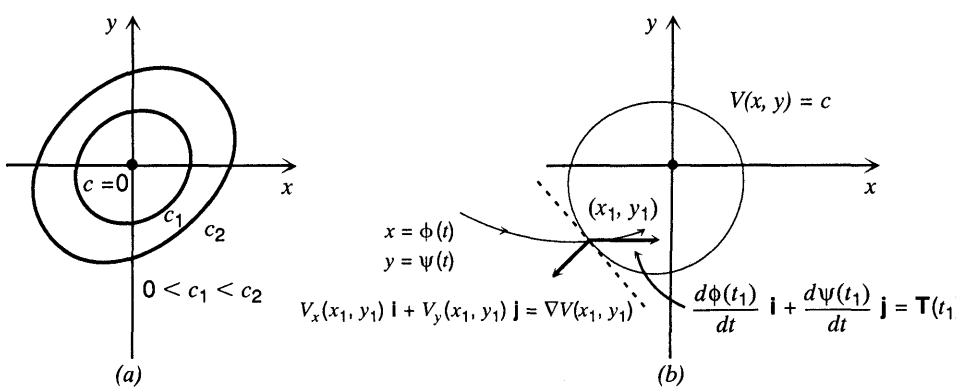


FIGURA 9.6.1 Interpretación geométrica del método de Liapunov.

es posible demostrar que las trayectorias que se inician suficientemente cerca del origen deben tener a éste; de donde, el origen es asintóticamente estable.

Una demostración geométrica del teorema 9.6.2 se deduce mediante argumentos semejantes. Brevemente, suponga que $\dot{V}$ es definida positiva y que, dado cualquier círculo alrededor del origen existe un punto interior (x_1, y_1) en el que $V(x_1, y_1) > 0$. Considérese una trayectoria que se inicie en (x_1, y_1). A lo largo de esta trayectoria, por la ecuación (8) se concluye que V debe crecer, ya que $\dot{V}(x, y) > 0$; además como $V(x_1, y_1) > 0$, la trayectoria no puede tender al origen debido a que $\dot{V}(0, 0) = 0$. Esto demuestra que el origen no puede ser asintóticamente estable. Al aprovechar más el hecho de que $\dot{V}(x, y) > 0$, es posible demostrar que el origen es un punto inestable; sin embargo, aquí no se proseguirá esta argumentación.

Para ilustrar la aplicación del teorema 9.6.1, se considerará la cuestión de la estabilidad del punto crítico (0, 0) de las ecuaciones (2) del péndulo no amortiguado. Aunque el sistema (2) es casi lineal, el punto (0, 0) es un centro del sistema lineal correspondiente, por lo que nada es posible concluir a partir del teorema 9.3.2. Como el sistema mecánico es conservativo, es natural sospechar que la función de energía total V definida por la ecuación (4) es una función de Liapunov. Por ejemplo, si se toma D como el dominio $-\pi/2 < x < \pi/2, -\infty < y < \infty$, entonces V es definida positiva. Como se ha visto, $\dot{V}(x, y) = 0$, de modo que por la segunda parte del teorema 9.6.1 se concluye que el punto crítico (0, 0) de las ecuaciones (2) es un punto crítico estable. El péndulo amortiguado se analiza en el problema 7.

Desde un punto de vista práctico se suele tener más interés en la región de estabilidad asintótica. Uno de los resultados más sencillos que se refieren a esta cuestión se da en el siguiente teorema.

Teorema 9.6.3 Sea el origen un punto crítico aislado del sistema autónomo (6). Supóngase que la función V es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas. Si existe un dominio acotado D_K que contenga al origen en donde $V(x, y) < K$, V es definida positiva y $\dot{V}$ es definida negativa, entonces toda solución de las ecuaciones (6) que se inicie en un punto en D_K tiende al origen cuando t tiende al infinito.

En otras palabras, el teorema 9.6.3 dice que si $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ es la solución de las ecuaciones (6) para datos iniciales que se encuentren en D_K, entonces (x, y) tiende al punto crítico (0, 0) cuando $t \to \infty$. Por tanto, D_K da una región de estabilidad asintótica; por supuesto, es posible que no toda la región sea de estabilidad asintótica. Este teorema se prueba al demostrar que: i) no existen soluciones periódicas del sistema (6) en D_K y ii) que en D_K no existen otros puntos críticos. Entonces, se concluye que las trayectorias que inician en D_K no pueden escapar y, por lo tanto, deben tender al origen cuando t tiende al infinito.

Los teoremas 9.6.1 y 9.6.2 dan las condiciones suficientes para la estabilidad y la inestabilidad, respectivamente; sin embargo, estas condiciones no son necesarias, ni el que no pueda determinarse una función adecuada de Liapunov significa que no exista alguna. Empero, no existen métodos generales para la construcción de funciones de Liapunov; no obstante, se ha investigado bastante sobre la construcción de funciones de Liapunov para clases especiales de ecuaciones. Un resultado sencillo del álgebra elemental, que a menudo resulta útil en la construcción de funciones definidas positivas o definidas negativas, se enuncia sin demostración en el siguiente teorema.

Teorema 9.6.4 La función

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{11}$$

es definida positiva si y sólo si

$$a > 0 \quad \text{y} \quad 4ac - b^2 > 0, \tag{12}$$

y es definida negativa si y sólo si

$$a < 0 \quad \text{y} \quad 4ac - b^2 > 0. \tag{13}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación del teorema 9.6.4.

Ejemplo 2 Demostrar que al punto crítico (0, 0) del sistema autónomo.

$$dx/dt = -x - xy^2, \qquad dy/dt = -y - x^2y \tag{14}$$

es asintóticamente estable.

Se intentará construir una función de Liapunov de la forma (11). Entonces $V_x(x, y) = 2ax + by$, $V_y(x, y) = bx + 2cy$ de modo que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) \\ &= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + yx^3) + 2c(y^2 + x^2y^2)].\end{aligned}$$

Si se elige $b = 0$ y que a y c sean números positivos cualesquiera, entonces $\dot{V}$ es definida negativa y V es definida positiva, en virtud del teorema 9.6.4. De donde, por el teorema 9.6.1, el origen es un punto crítico asintóticamente estable.

Ejemplo 3 Considérese el sistema

$$\begin{aligned}dx/dt &= x(1 - x - y), \\ dy/dt &= y(0.75 - y - 0.5x).\end{aligned} \tag{15}$$

En el ejemplo 1 de la sección 9.4 se encontró que este sistema modela cierto par de especies competidoras y que el punto crítico (0.5, 0.5) es asintóticamente estable. Confirmar esta conclusión al hallar una función de Liapunov adecuada.

Resulta conveniente transformar el punto (0.5, 0.5) en el origen. Con este fin, sean

$$x = 0.5 + u, \qquad y = 0.5 + v. \tag{16}$$

Entonces, si se sustituyen x y y en las ecuaciones (15), se obtiene el nuevo sistema

$$\begin{aligned}du/dt &= -0.5u - 0.5v - u^2 - uv, \\ dv/dt &= -0.25u - 0.5v - 0.5uv - v^2.\end{aligned} \tag{17}$$

Para mantener relativamente sencillos los cálculos, considérese la función $V(u, v) = u^2 + v^2$ como una posible función de Liapunov. Es obvio que esta función es definida positiva, por lo que la única cuestión es si existe una región que contenga al origen en el plano uv, en donde la

derivada $\dot{V}$ con respecto al sistema (17) sea definida negativa. Se calcula $\dot{V}(u, v)$ y se encuentra que

$$\begin{aligned}\dot{V}(u, v) &= V_u \frac{du}{dt} + V_v \frac{dv}{dt} \\ &= 2u(-0.5u - 0.5v - u^2 - uv) + 2v(-0.25u - 0.5v - 0.5uv - v^2),\end{aligned}$$

o bien,

$$\dot{V}(u, v) = -[(u^2 + 1.5uv + v^2) + (2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3)], \tag{18}$$

en donde se han agrupado los términos cuadráticos y cúbicos. Se desea demostrar que la expresión entre corchetes de la ecuación (18) es definida positiva, por lo menos para u y v suficientemente pequeñas. Obsérvese que los términos cuadráticos pueden escribirse como

$$u^2 + 1.5uv + v^2 = 0.25(u^2 + v^2) + 0.75(u + v)^2, \tag{19}$$

de modo que tales términos son definidos positivos. Por otra parte, el signo de los términos cúbicos de la ecuación (18) puede ser cualquiera de los dos. Por tanto, se debe demostrar que, en alguna vecindad de $u = 0$, $v = 0$, los términos cúbicos son menores en magnitud que los términos cuadráticos; es decir,

$$|2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| < 0.25(u^2 + v^2) + 0.75(u + v)^2. \tag{20}$$

Para estimar el primer miembro de la ecuación (20) se introducen las coordenadas polares $u = r \cos \theta$, $v = r \operatorname{sen} \theta$. Entonces,

$$\begin{aligned}|2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| &= r^3|2\cos^3\theta + 2\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}^3\theta| \\ &\leq r^3[2|\cos^3\theta| + 2\cos^2\theta|\operatorname{sen}\theta| + |\cos\theta|\operatorname{sen}^2\theta + 2|\operatorname{sen}^3\theta|] \\ &\leq 7r^3,\end{aligned}$$

en virtud de que $|\operatorname{sen}\theta|, |\cos\theta| \leq 1$. Para satisfacer esta ecuación ahora resulta obvio que basta con satisfacer el requisito más estricto

$$7r^3 < 0.25(u^2 + v^2) = 0.25r^2,$$

lo da $r < 1/28$. Por tanto, al menos en este disco, se satisfacen las hipótesis del teorema 9.6.1, por lo que el origen es un punto crítico asintóticamente estable del sistema (17). Entonces lo mismo es cierto para el punto crítico (0.5, 0.5) del sistema original (15).

Con referencia al teorema 9.6.3, el argumento anterior muestra también que el disco con centro en (0.5, 0.5) y radio 1/28 es una región de estabilidad asintótica para el sistema (15). Ésta es una grave subestimación de la región completa de estabilidad asintótica, como se demuestra en el análisis efectuado en la sección 9.4. Para obtener una mejor estimación de la región real de estabilidad asintótica, con base en el teorema 9.6.3, tendrían que estimarse con más exactitud los términos de la ecuación (20), aplicar una mejor (y quizá más complicada) función de Liapunov o las dos cosas.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4 construya una función de Liapunov adecuada de la forma $ax^2 + cy^2$, en donde deben determinarse a y c. A continuación, demuestre que el punto crítico en el origen es el del tipo indicado.

1. $dx/dt = -x^3 + xy^2$, $dy/dt = -2x^2y - y^3$; asintóticamente estable
2. $dx/dt = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2$, $dy/dt = -y^3$; asintóticamente estable
3. $dx/dt = -x^3 + 2y^3$, $dy/dt = -2xy^2$; estable (por lo menos)
4. $dx/dt = x^3 - y^3$, $dy/dt = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3$; inestable
5. Considere el sistema de ecuaciones

$$dx/dt = y - xf(x, y), \qquad dy/dt = -x - yf(x, y),$$

en donde f es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas. Demuestre que si $f(x, y) > 0$ en alguna vecindad del origen, entonces éste es un punto crítico asintóticamente estable y, si $f(x, y) < 0$, en alguna vecindad del origen, entonces éste es un punto crítico inestable.
Sugerencia: construya una función de Liapunov de la forma $c(x^2 + y^2)$.
6. Una generalización de la ecuación del péndulo no amortiguado es

$$d^2u/dt^2 + g(u) = 0, \tag{i}$$

en donde $g(0) = 0$, $g(u) > 0$ para $0 < u < k$, y $g(u) < 0$ para $-k < u < 0$; es decir, $ug(u) > 0$ para $u \neq 0$, $-k < u < k$. Observe que $g(u) = \text{sen } u$ tiene esta propiedad sobre $(-\pi/2, \pi/2)$.
a) Haga $x = u$, $y = du/dt$, escriba la ecuación (i) como un sistema de dos ecuaciones y demuestre que $x = 0$, $y = 0$ es un punto crítico.
b) Demuestre que

$$V(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)\, ds, \qquad -k < x < k, \tag{ii}$$

es definida positiva y aplique este resultados para demostrar que el punto crítico (0, 0) es estable. Observe que la función de Liapunov V dada por la ecuación (ii) corresponde a la función de energía $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$ para el caso $g(u) = \text{sen } u$.
7. Al introducir variables adimensionables adecuadas, el sistema de ecuaciones no lineales para el péndulo amortiguado [ecuaciones (17) de la sección 9.3] puede escribirse como

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -y - \text{sen } x.$$

a) Demuestre que el origen es un punto crítico.
*b) Demuestre que aunque $V(x, y) = x^2 + y^2$ es definida positiva, $\dot{V}(x, y)$ toma valores positivos como negativos en cualquier dominio que contenga al origen, por lo que V no es una función de Liapunov.
Sugerencia: $x - \text{sen } x > 0$ para $x > 0$ y $x - \text{sen } x < 0$ para $x < 0$. Considere estos casos con y positiva, pero lo suficientemente pequeña que pueda ignorarse y^2 en comparación con y.
c) Aplique la función de energía $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$ mencionada en el problema 6 b) para demostrar que el origen es un punto crítico estable. Sin embargo, observe que aunque haya amortiguamiento y pueda esperarse que el origen sea asintóticamente estable, no es posible llegar a esta conclusión si se utiliza esta función de Liapunov.
*d) Para demostrar la estabilidad asintótica es necesario construir una mejor función de Liapunov que la usada en el inciso c). Demuestre que $V(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2$ es esa función de Liapunov y concluya que el origen es un punto crítico asintóticamente estable.
Sugerencia: A partir de la fórmula de Taylor con residuo se concluye que $\text{sen } x = x - \alpha x^3/3!$, en donde α depende de x pero $0 < \alpha < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$. Entonces, al hacer $x = r \cos \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$, demuestre que $\dot{V}(r \cos \theta, r \text{ sen } \theta) = -r^2[1 + h(r, \theta)]$, en donde $|h(r, \theta)| < 1$ si r es suficientemente pequeña.

8. La ecuación de Liénard (problema 23 de la sección 9.3) es

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c(u)\frac{du}{dt} + g(u) = 0,$$

en donde g satisface las condiciones del problema 6 y $c(u) \geq 0$. Demuestre que el punto $u = 0$, $du/dt = 0$ es un punto crítico estable.

9. a) Un caso especial de la ecuación de Liénard del problema 8 es

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + g(u) = 0,$$

en donde g satisface las condiciones del problema 6. Hágase $x = u$, $y = du/dt$ y demuestre que el origen es un punto crítico del sistema resultante. Esta ecuación puede interpretarse como si diera el movimiento de un sistema resorte-masa con amortiguamiento proporcional a la velocidad y a una fuerza de restitución no lineal. Use la función de Liapunov del problema 6 y demuestre que el origen es un punto crítico estable, pero observe que incluso con amortiguamiento no es posible concluir la estabilidad asintótica al utilizar esta función de Liapunov.

*b) Puede demostrarse la estabilidad asintótica del punto crítico (0, 0) al construir una mejor función de Liapunov que la del inciso d) del problema 7. Sin embargo, el análisis para una función general g es algo complicado, por lo que solamente se mencionará que V tendrá la forma

$$V(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2 + Ayg(x) + \int_0^x g(s)\,ds,$$

en donde A es una constante positiva que debe elegirse de modo que V sea definida positiva y $\dot{V}$ sea definida negativa. Para el problema del péndulo [$g(x) = \operatorname{sen} x$] use V, según la da la ecuación anterior, con $A = \frac{1}{2}$, para demostrar que el origen es asintóticamente estable.

Sugerencia: Use $\operatorname{sen} x = x - \alpha x^3/3!$ y $\cos x = 1 - \beta x^2/2!$, en donde α y β depende de x, pero $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$, para $-\pi/2 < x < \pi/2$; haga $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ y demuestre que $\dot{V}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = -\frac{1}{2}r^2[1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta + h(r, \theta)]$, en donde $|h(r, \theta)| < \frac{1}{2}$ si r es suficientemente pequeña. Para demostrar que V es definida positiva use $\cos x = 1 - x^2/2 + \gamma x^4/4!$, en donde γ depende de x, pero $0 < \gamma < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

En los problemas 10 y 11 se demostrará la parte del teorema 9.3.2: si el punto crítico (0, 0) del sistema casi lineal

$$dx/dt = ax + by + F_1(x, y), \qquad dy/dt = cx + dy + G_1(x, y) \tag{i}$$

es un punto crítico asintóticamente estable del sistema lineal correspondiente

$$dx/dt = ax + by, \qquad dy/dt = cx + dy, \tag{ii}$$

entonces es un punto crítico asintóticamente estable del sistema casi lineal (i). El problema 12 trata del resultado correspondiente para la inestabilidad.

10. Considere el sistema lineal (ii).

a) Dado que (0, 0) es un punto crítico asintóticamente estable, demuestre que $a + d < 0$ y que $ad - bc > 0$. (Ver el problema 21 de la sección 9.1).

b) Construya una función de Liapunov $V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ tal que V sea definida positiva y $\dot{V}$ sea definida negativa. Una forma de asegurar que $\dot{V}$ sea definida negativa es elegir A, B y C de modo que $\dot{V}(x, y) = -x^2 - y^2$. Demuestre que esto da el resultado

$$A = -\frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2\Delta}, \qquad B = \frac{bd + ac}{\Delta}, \qquad C = -\frac{a^2 + b^2 + (ad - bc)}{2\Delta},$$

en donde $\Delta = (a + d)(ad - bc)$.

c) Use el resultado del inciso a) para demostrar que $A > 0$ y, a continuación demuestre (se requieren varios pasos algebraicos) que

$$4AC - B^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ad - bc) + 2(ad - bc)^2}{\Delta^2} > 0.$$

De donde, por el teorema 9.6.4, V es definida positiva.

11. En este problema se demuestra que la función de Liapunov que se construyó en el problema anterior también es una función de Liapunov para el sistema casi lineal (i). Es necesario demostrar que existe alguna región que contiene al origen en la que $\dot{V}$ es definida negativa.

a) Demuestre que

$$\dot{V}(x, y) = -(x^2 + y^2) + (2Ax + By)F_1(x, y) + (Bx + 2Cy)G_1(x, y).$$

b) Recuerde que $F_1(x, y)/r \to 0$ y $G_1(x, y)/r \to 0$ cuando $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to 0$. Esto significa que dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un círculo $r = R$ alrededor del origen tal que para $0 \leq r < R$, $|F_1(x, y)| < \epsilon r$ y $|G_1(x, y)| < \epsilon r$. Si M es el máximo de $|2A|$, $|B|$ y $|2C|$, demuestre al introducir coordenadas polares, que puede elegirse R de modo que $\dot{V}(x, y) < 0$ para $r < R$. *Sugerencia*: elija ϵ lo suficientemente pequeño en términos de M.

12. En este problema se probará una parte del teorema 9.3.2 que se relaciona con la estabilidad.

a) Demuestre que si $p = (a + d) > 0$ y $q = ad - bc > 0$, entonces el punto crítico (0, 0) del sistema lineal (ii) es inestable.

b) Se cumple el mismo resultado para el sistema casi lineal (i). Consulte los problemas 10 y 11 para construir una función V definida positiva tal que $\dot{V}(x, y) = x^2 + y^2$ y, por tanto, sea definida positiva y, en seguida, aplique el teorema 9.6.2.

9.7 Soluciones periódicas y ciclos límite

En esta sección se analiza con más detalle la posible existencia de soluciones periódicas de los sistemas autónomos de segundo orden

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Estas soluciones satisfacen la relación

$$X(t + T) = x(t) \tag{2}$$

para toda t y para alguna constante no negativa T denominada periodo. Las trayectorias correspondientes son *curvas cerradas* en el plano fase. Las soluciones periódicas a menudo tienen una función importante en problemas físicos porque representan fenómenos que

ocurren de manera repetida. En muchas situaciones, una solución periódica representa un "estado final" hacia el que tienden todas las soluciones "vecinas", como los transitorios, debido a que las condiciones iniciales desaparecen gradualmente.

Un caso especial de una solución periódica es una solución constante $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, que corresponde a un punto crítico del sistema autónomo. Evidentemente esta solución es periódica con cualquier periodo. En esta sección, cuando se hable de una solución periódica se entenderá que es una solución periódica no constante. En este caso, el periodo T es positivo y suele elegirse como el menor número positivo para el que la ecuación (2) es válida.

Recuérdese que las soluciones del sistema lineal autónomo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3}$$

son periódicas si y sólo si los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son imaginarios puros. En este caso, el punto crítico en el origen es un centro, como se analizó en la sección 9.1. Conviene resaltar que si los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son imaginarios puros, entonces toda solución del sistema lineal (3) es periódica, mientras que si los eigenvalores no son imaginarios puros, entonces no existen soluciones periódicas (no constantes). Las ecuaciones depredador-presa que se estudiaron en la sección 9.5, aunque no lineales, se comportan de manera semejante: todas las soluciones en el primer cuadrante son periódicas. El siguiente ejemplo ilustra una manera diferente en que pueden ocurrir soluciones periódicas de sistemas autónomos no lineales.

Ejemplo 1 Analizar las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y + x - x(x^2 + y^2) \\ -x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

No es difícil demostrar que (0, 0) es el único punto crítico del sistema (4) y también que el sistema es casi lineal en la vecindad del origen. El sistema lineal correspondiente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

tiene los eigenvalores $1 \pm i$. Por consiguiente, el origen es un punto espiral inestable para el sistema lineal (5) y para el sistema no lineal (4). Por tanto, cualquier solución que se inicie cerca del origen en el plano fase describirá una espiral que se aleja del origen. En virtud de que no hay otros puntos críticos, podría pensarse que todas las soluciones de las ecuaciones (4) corresponden a trayectorias que tienden en espiral hacia el infinito. Sin embargo, a continuación se demostrará que esto es incorrecto debido a que muy lejos del origen las trayectorias se dirigen hacia adentro.

Es conveniente introducir las coordenadas polares r y θ, en donde

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{6}$$

y $r \geq 0$. Si la primera de las ecuaciones (4) se multiplica por x, la segunda por y y se suman los resultados, se obtiene

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2. \tag{7}$$

Dado que $r^2 = x^2 + y^2$ y $r(dr/dt) = x(dx/dt) + y(dy/dt)$, por la ecuación (7) se deduce que

$$r\frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2). \tag{8}$$

Esta ecuación es semejante a las que se estudiaron en la sección 2.6. Los puntos críticos (para $r \geq 0$) son el origen y el punto $r = 1$, que corresponde al círculo unitario en el plano fase. De (8) se concluye que $dr/dt > 0$ si $r < 1$ y que $dr/dt < 1$ si $r > 1$. Por tanto, dentro del círculo unitario las trayectorias se dirigen hacia afuera, mientras que fuera del mismo se dirigen hacia adentro. Aparentemente, el círculo $r = 1$ es una trayectoria límite para este sistema.

Para determinar una ecuación para θ se multiplica la primera de las ecuaciones (4) por y, la segunda por x y se restan los resultados, con lo que se obtiene

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = x^2 + y^2. \tag{9}$$

Una vez que se calcula dx/dt y dy/dt a partir de las (6), se encuentra que el primer miembro de la ecuación (9) es $-r^2(d\theta/dt)$ de modo que ésta se reduce a

$$\frac{d\theta}{dt} = -1. \tag{10}$$

El sistema de ecuaciones (8), (10), para r y θ, es equivalente al sistema original (4). Una solución del sistema (8), (10) es

$$r = 1, \qquad \theta = -t + t_0. \tag{11}$$

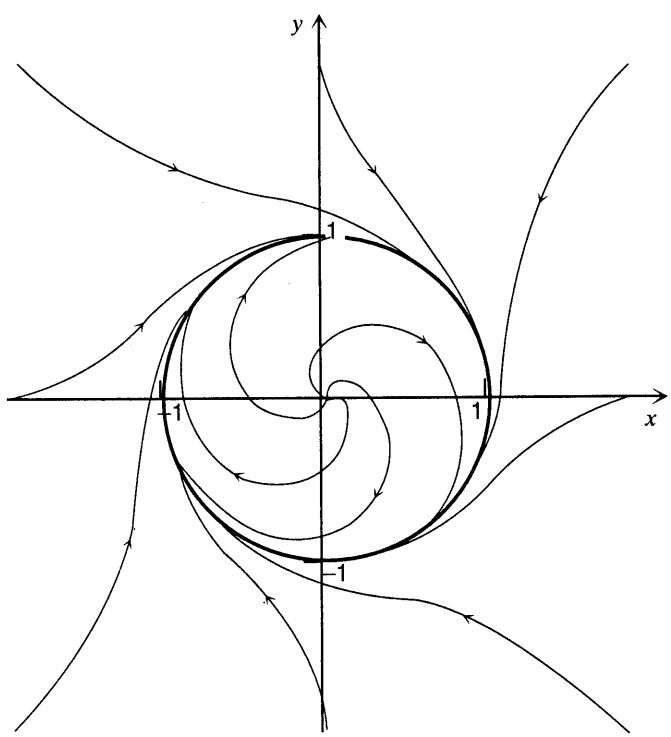


FIGURA 9.7.1 Trayectorias del sistema (4); ciclo límite.

en donde t_0 es una constante arbitraria. Cuando t crece, un punto que satisfaga las ecuaciones (11) se mueve en sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario. Por tanto, el sistema autónomo (4) tiene una solución periódica. Se pueden obtener otras soluciones al resolver la ecuación (8) por separación de variables: si $r \neq 0$ y $r \neq 1$, entonces

$$\frac{dr}{r(1-r^2)} = dt. \tag{12}$$

La ecuación (12) puede resolverse con aplicación de fracciones parciales, para volver a escribir el primer miembro y, a continuación, integrar. Al efectuar estos cálculos se encuentra que la solución de las ecuaciones (10) y (12) es

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0 e^{-2t}}}, \qquad \theta = -t + t_0, \tag{13}$$

en donde c_0 y t_0 son constantes arbitrarias. La solución (13) también contiene la solución (11), que se obtiene al hacer $c_0 = 0$ en la primera de las ecuaciones (13).

La solución que satisface las condiciones iniciales $r = \rho$, $\theta = \alpha$ en $t = 0$ se expresa por

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + [(1/\rho^2) - 1]e^{-2t}}}, \qquad \theta = -(t - \alpha). \tag{14}$$

Si $\rho < 1$, entonces $r \to 1$ desde el interior, cuando $t \to \infty$; si $\rho > 1$, entonces $r \to 1$ desde el exterior, cuando $t \to \infty$. Por tanto, en todos los casos las trayectorias describen espirales hacia el círculo $r = 1$ cuando $t \to \infty$. En la figura 9.7.1 se muestran varias trayectorias.

En este ejemplo el círculo $r = 1$ no sólo corresponde a soluciones periódicas del sistema (4) sino que, además otras trayectorias no cerradas describen espirales hacia aquél cuando $t \to \infty$. En general, una trayectoria cerrada en el plano fase tal que otras trayectorias no cerradas tienden en espiral hacia ella, desde el interior o desde el exterior, cuando $t \to \infty$, se conoce como **ciclo límite**. De este modo, el círculo $r = 1$ es un ciclo límite para el sistema (4). Si todas las trayectorias que se inician cerca de una trayectoria cerrada (tanto por dentro como por fuera) tienden en espiral hacia la trayectoria cerrada cuando $t \to \infty$, entonces el ciclo límite es **estable**. Dado que la trayectoria límite es por si misma una órbita periódica, en vez de un punto de equilibrio, a este tipo de estabilidad suele dársele el nombre de **estabilidad orbital**. Si las trayectorias en uno de los lados se aproximan en espiral hacia la trayectoria cerrada, mientras que las del otro lado se alejan en espiral de ella cuando $t \to \infty$, entonces se dice que el ciclo límite es **semiestable**. Si las trayectorias en los dos lados de la trayectoria cerrada se alejan en espiral cuando $t \to \infty$, entonces la trayectoria cerrada es **inestable**. También es posible tener trayectorias cerradas a las que otras trayectorias no se acerquen ni se alejen; por ejemplo, las soluciones periódicas de las ecuaciones depredador-presa de la sección 9.5; en este caso, la trayectoria cerrada es **neutralmente estable**.

En el ejemplo 1, se estableció la existencia de un ciclo límite estable al resolver explícitamente las ecuaciones. Sin embargo, esto casi nunca es posible, de modo que vale la pena conocer teoremas generales que se refieran a la existencia o no existencia de ciclos límites de sistemas autónomos no lineales. Al analizar estos teoremas, es conveniente volver a escribir el sistema (1) en la forma escalar

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y). \tag{15}$$

Teorema 9.7.1 Supóngase que las funciones F y G tienen primeras derivadas parciales continuas en un dominio D del plano xy. Una trayectoria cerrada del sistema (15) necesariamente debe encerrar por lo menos un punto crítico (de equilibrio). Si sólo encierra a un punto crítico, éste no puede ser un punto silla.

Aunque se omite la demostración de este teorema, es fácil mostrar ejemplos de él. Uno se da mediante el ejemplo 1 y la figura 9.7.1, en el que la trayectoria cerrada encierra al punto crítico (0, 0), un punto espiral. Otro ejemplo es el de las ecuaciones depredador-presa de la sección 9.5; ver la figura 9.5.3. Cada trayectoria cerrada rodea al punto crítico (2, 3); en este caso, el punto crítico es un centro.

El teorema 9.7.1 también es útil en un sentido negativo. Si una región dada no contiene puntos críticos, entonces no puede haber trayectoria cerrada que se encuentre por completo en la región. La misma conclusión es cierta si la región sólo contiene un punto crítico, y éste es un punto silla. Póngase por caso, en el ejemplo 2 de la sección 9.4, uno de especies competidoras el único punto crítico en el interior del primer cuadrante es el punto silla (0.5, 0.5); por lo tanto, este sistema no tiene trayectoria cerrada que se encuentre en el primer cuadrante.

En el siguiente teorema se da un segundo resultado sobre la no existencia de trayectorias cerradas.

Teorema 9.7.2 Supóngase que las funciones F y G tienen primeras derivadas parciales continuas en un dominio D simplemente conexo del plano xy. Si $F_x + G_y$ tiene el mismo signo todo D, entonces no existe trayectoria cerrada del sistema (15) que se encuentre por completo en D.

Un dominio bidimensional simplemente conexo es un dominio sin huecos. El teorema 9.7.2 es una consecuencia directa del teorema de Green en el plano; ver el problema 13. Nótese que si $F_x + G_y$ cambia de signo en el dominio, entonces no es posible sacar conclusiones; puede haber o no trayectorias cerradas en D.

Para ilustrar el teorema 9.7.2, considérese el sistema (4). Un cálculo habitual muestra que

$$F_x(x, y) + G_y(x, y) = 2 - 4(x^2 + y^2) = 2(1 - 2r^2), \tag{16}$$

en donde, como de costumbre, $r^2 = x^2 + y^2$. Por tanto, $F_x + G_y$ es positiva para $0 \leq r < 1/\sqrt{2}$, de modo que, en este disco circular, no existe trayectoria cerrada. Por supuesto, en el ejemplo 1 se demostró que en la región más grande $r < 1$ no existe trayectoria cerrada. Esto ilustra que la información dada por el teorema 9.7.2 puede no ser el mejor resultado posible. Nuevamente, con referencia a la ecuación (16) nótese que $F_x + G_y < 0$ para $r > 1/\sqrt{2}$. Sin embargo, el teorema no es aplicable en este caso por que esta región anular no es simplemente conexa. De hecho, como se muestra en el ejemplo 1, contiene un ciclo límite.

En el siguiente teorema se dan las condiciones que garantizan la existencia de una trayectoria cerrada.

Teorema 9.7.3 (Teorema de Poincaré-Bendixson[6]). Supóngase que las funciones F y G tienen primeras derivadas parciales continuas en un dominio D del plano xy. Sean D_1 un subdominio acotado en D, y R la región que consta de D_1 más su frontera (todos los puntos de R están en D). Supóngase que R no contiene ningún punto crítico del sistema (15). Si existe una constante t_0 tal que $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ es una solución del sistema (15) que existe y permanece en R para toda $t \geq t_0$, entonces $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ es una solución periódica (trayectoria cerrada) o $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ tiende en espiral hacia una trayectoria cerrada cuando $t \to \infty$. En cualquiera de los dos casos, el sistema (15) tiene una solución periódica en R.

Nótese que si R contiene una trayectoria cerrada, entonces necesariamente, por el teorema 9.7.1, esta trayectoria debe encerrar un punto crítico. Sin embargo, este punto crítico no puede estar en R. Por tanto, R no puede ser simplemente conexo; debe tener un hueco.

Como una aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson, considérese una vez más el sistema (4). Como el origen es un punto crítico, debe excluirse. Por ejemplo, es posible considerar la región R definida por $0.5 \leq r \leq 2$. En seguida, es necesario demostrar que existe una solución cuya trayectoria permanece en R para toda t mayor que, o igual a alguna t_0. Esto se deduce de inmediato por la ecuación (8). Para $r = 0.5$, $dr/dt > 0$, de modo que r crece, mientras que para $r = 2$, $dr/dt < 0$, de modo que r decrece. Por tanto, cualquier trayectoria que cruce la frontera de R está entrando en R. Como consecuencia, cualquier solución de las ecuaciones (4) que se inicie en R en $t = t_0$, no puede salir, sino que debe permanecer en R para $t > t_0$. Por supuesto, pudieron utilizarse otros números en lugar de 0.5 y 2; lo que importa es que $r - 1$ esté incluido.

No debe inferirse a partir de este análisis de los teoremas anteriores que es fácil determinar si un sistema autónomo no lineal dado tiene o no soluciones periódicas, con frecuencia no es fácil en lo absoluto. A menudo los teoremas 9.7.1 y 9.7.2 no llevan a conclusión alguna, mientras que para el teorema 9.7.3 muchas veces es difícil determinar una región R y una solución que siempre permanezca dentro de ella.

Se da por terminada esta sección con otro ejemplo de un sistema no lineal que tiene un ciclo límite.

Ejemplo 2 La ecuación de Van der Pool (1899-1959)

$$u'' - \mu(1 - u^2)u' + u = 0, \tag{17}$$

en donde μ es una constante positiva, describe la corriente u en un triodo oscilador. Analizar las soluciones de esta ecuación.

Si $\mu = 0$, la ecuación (17) se reduce a $u'' + u = 0$, cuyas soluciones son ondas senoidales o cosenoidales de periodo 2π. Para $\mu > 0$ también debe considerarse el segundo término del primer miembro de esta ecuación. Este es el término de resistencia, proporcional a u', con un coeficiente $-\mu(1 - u^2)$ que depende de u. Para u grande este término es positivo y actúa, como de costumbre, para reducir la amplitud de la respuesta. Sin embargo, para u pequeña, el término

[6] Ivar Otto Bendixson (1861-1935) fue un matemático sueco. Este teorema apareció en un artículo publicado por él en 1901 en *Acta Mathematica*.

de resistencia es negativo, y por lo tanto, hace crecer la respuesta. Esto sugiere que quizá haya una solución de tamaño intermedio a la que tienden las otras soluciones cuando t crece. Para analizar con más cuidado la ecuación (17), ésta se escribe como un sistema de segundo orden, mediante la introducción de las variables $x = u$, $y = u'$. Entonces se sigue que

$$x' = y, \qquad y' = -x + \mu(1 - x^2)y. \tag{18}$$

El único punto crítico del sistema (18) es el origen. Cerca del origen el sistema lineal correspondiente es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{19}$$

cuyos eigenvalores son $(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2$. De este modo, el origen es un punto espiral inestable, para $0 < \mu > 2$, y un nodo inestable, para $\mu \geq 2$. En todos los casos, una solución que se inicia cerca del origen crece cuanto t aumenta.

Con respecto a las soluciones periódicas, los teoremas 9.7.1 y 9.7.2 sólo proporcionan información parcial. Con base en el teorema 9.7.1 se concluye que, si existen trayectorias cerradas, deben rodear al origen. A continuación, se calcula $F_x(x, y) + G_y(x, y)$, con el resultado

$$F_x(x, y) + G_y(x, y) = \mu(1 - x^2). \tag{20}$$

En seguida, por el teorema 9.7.2 se concluye que en la franja $|x| < 1$ no están contenidas trayectorias cerradas, en caso de haber alguna, en donde $F_x + G_y > 0$.

La aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson a este problema no es tan sencilla como lo fue en el ejemplo anterior. Si se introducen coordenadas polares, se encuentra que la ecuación para la variable radial r es

$$r' = \mu(1 - r^2 \cos^2 \theta) r \operatorname{sen}^2 \theta. \tag{21}$$

Una vez más, considérese una región anular R dada por $r_1 \leq r \leq r_2$, en donde r_1 es pequeño y r_2 es grande. Cuando $r = r_1$, el término lineal del segundo miembro de la ecuación (21) domina y $r' > 0$, excepto sobre el eje x, en donde sen $\theta = 0$ y, en consecuencia, también $r' = 0$. Por tanto las trayectorias entran a R en todos los puntos del círculo $r = r_1$, excepto los que están sobre el eje x, en donde las trayectorias son tangentes al círculo. Cuando $r = r_2$, el término cúbico del segundo miembro de la ecuación (21) es el dominante. De este modo, $r' < 0$, excepto para los puntos sobre el eje x, en donde $r' = 0$, y para los puntos sobre el eje y, en donde el término no cúbico es cero y el término lineal hace $r' > 0$. Por tanto, no importa cuán grande se elija el círculo, habrá puntos sobre él (a saber, los puntos sobre el eje y) por donde las trayectorias salen de R. Por lo tanto, el teorema de Poincaré-Bendixson no es aplicable, a menos que se consideren regiones más complicadas.

Es posible demostrar, por medio de un análisis más intrincado, que la ecuación de Van der Pool en realidad tiene un ciclo límite único. Sin embargo, no se proseguirá con este razonamiento, por el contrario se considerará un enfoque diferente en el que trazan las gráficas de soluciones calculadas numéricamente. Las observaciones experimentales indican que la ecuación de Van der Pool tiene una solución periódica estable cuyos periodo y amplitud dependen del parámetro μ. Puede obtenerse cierta comprensión de este comportamiento periódico al observar las gráficas de las trayectorias en el plano fase y de u contra t.

En la figura 9.7.2 se muestran dos trayectorias de la ecuación de Van der Pool en el plano fase, para $\mu = 0.2$. La trayectoria que se inicia cerca del origen describe una espiral hacia afuera en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, esto es coherente con el comportamiento de la aproximación lineal cerca del origen. La otra trayectoria se inicia en el punto (–3, 2) y descri-

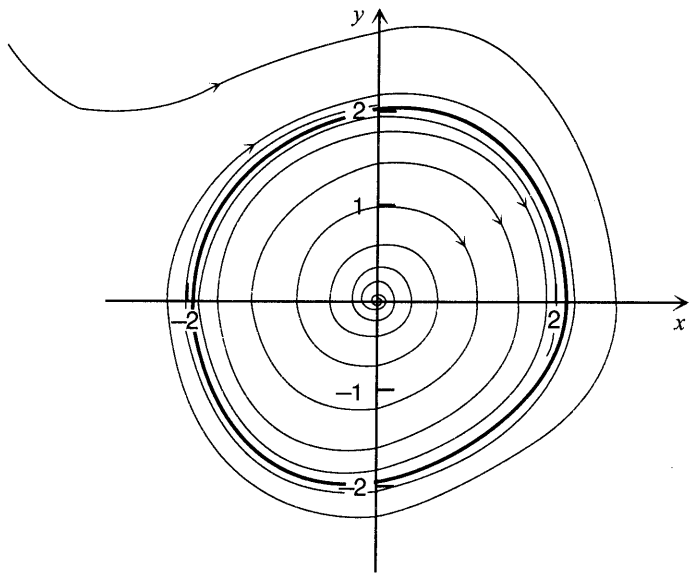


FIGURA 9.7.2 Trayectorias de la ecuación de van der Pool (17) , para $\mu = 0.2$

be una espiral hacia adentro una vez más en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Las dos trayectorias tienden a una curva cerrada que corresponde a una solución periódica estable. En la figura 9.7.3 se muestran las gráficas de u contra t para las soluciones correspondientes a las trayectorias de la figura 9.7.2. La solución que inicialmente es más pequeña crece de manera gradual en amplitud, en tanto que la solución más grande decae del mismo modo. Las dos soluciones tienden a un movimiento periódico estable que corresponde al ciclo límite. En la figura 9.7.3 también se muestra que existe una diferencia de fase entre las dos soluciones, a medida que se aproximan al ciclo límite. Las gráficas de u, contra t tienen una forma casi sinusoidal, coherente con el ciclo límite casi circular de este caso.

En las figuras 9.7.4 y 9.7.5 se muestran gráficas semejantes para el caso en que $\mu = 1$. De nuevo, las trayectorias se mueven en el plano fase en el sentido del movimiento de las maneci-

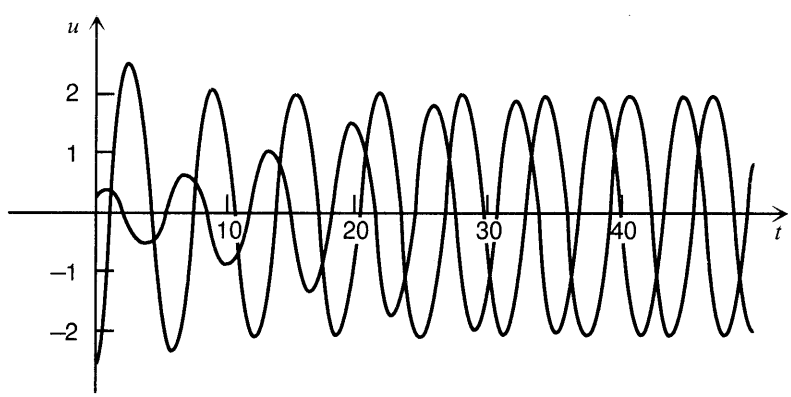


FIGURA 9.7.3 Gráficas de u contra t para las trayectorias de la figura 9.7.2.

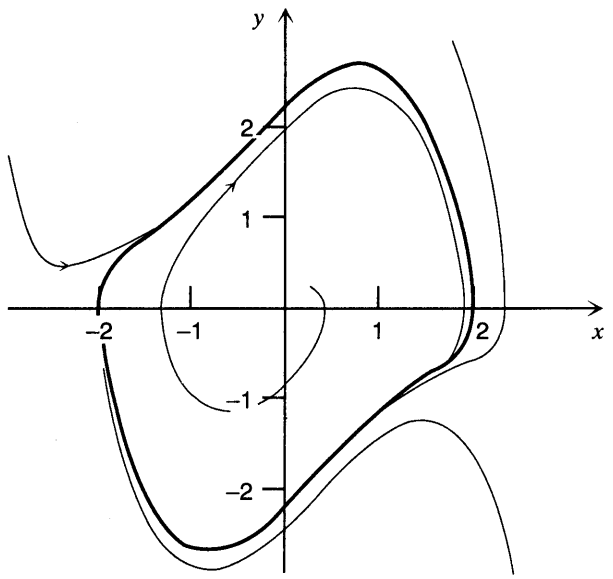


FIGURA 9.7.4 Trayectorias de la ecuación de Van der Pool (17), para $\mu = 1$.

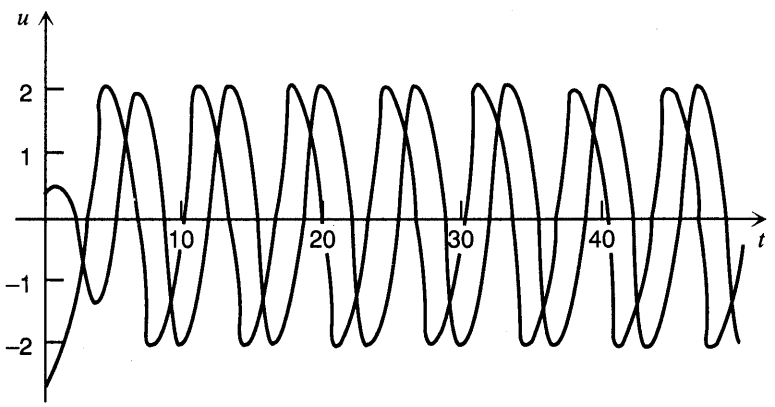


FIGURA 9.7.5 Gráficas de u contra t para las trayectorias de la figura 9.7.4.

llas del reloj, pero el ciclo límite es bastante diferente a un círculo. Las gráficas de u contra t tienden más rápido a la oscilación límite y, una vez más, muestran una diferencia en fase. Las oscilaciones son algo menos simétricas en este caso, ascendiendo de manera algo más pronunciada que como descienden.

En la figura 9.7.6 se muestra el plano fase para $\mu = 5$. El movimiento sigue siendo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y el ciclo límite es todavía más alargado, en especial en la dirección y. En la figura 9.7.7 se tiene una gráfica de u contra t. Aunque la solución se inicia lejos del ciclo límite, casi se alcanza la oscilación límite en una fracción de periodo. Si se parte desde uno de sus valores extremos sobre el eje x en el plano fase, la solución se mueve al principio con lentitud hacia la otra posición extrema, pero una vez que se alcanza cierto punto de

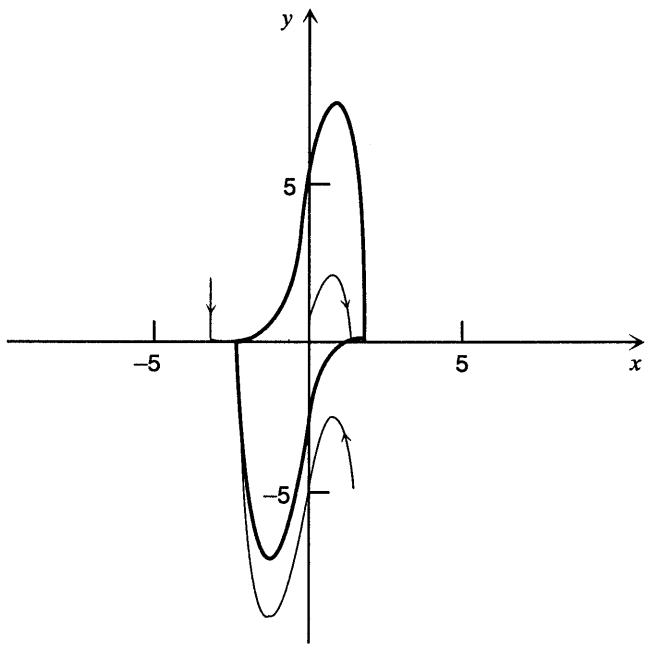


FIGURA 9.7.6 Trayectoria de la ecuación de van der Pool (17) para $\mu = 5$.

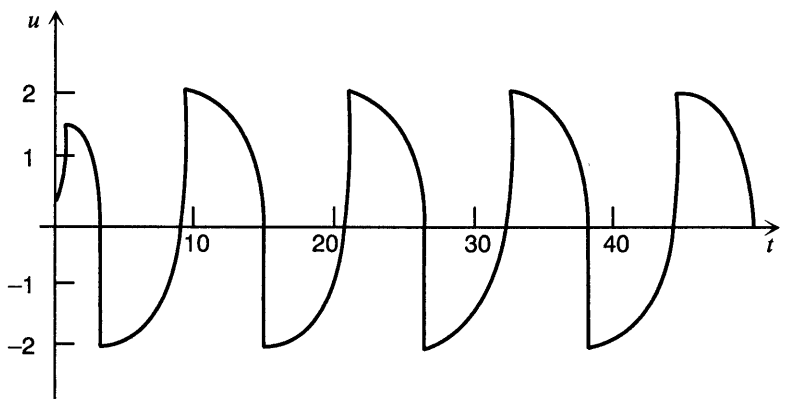


FIGURA 9.7.7 Gráfica de u contra t para la trayectoria en espiral hacia afuera de la figura 9.7.6.

la trayectoria, el resto de la transición se completa muy aprisa. Entonces el proceso se repite en la dirección opuesta. La forma de onda del ciclo límite, como se muestra en la figura 9.7.7, es bastante diferente de una onda sinoidal.

Estas gráficas muestran con claridad que, en ausencia de excitación externa, el oscilador de Van der Pool tiene cierto modo característico de vibración para cada valor de μ. Las gráficas de u contra t muestra que la amplitud de esta oscilación cambia muy poco con μ, pero el periodo

aumenta a medida que μ crece. Al mismo tiempo, la forma de onda cambia de una que es casi sinusoidal hacia otra que es mucho menos suave.

La presencia de un solo movimiento periódico que atrae a todas las soluciones (cercanas), es decir, un ciclo límite estable, es uno de los fenómenos característicos asociados con las ecuaciones diferenciales no lineales.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, un sistema autónomo se expresa en coordenadas polares. Determine todas las soluciones periódicas, todos los ciclos límite y determine sus características de estabilidad.

1. $dr/dt = r^2(1 - r^2), \quad d\theta/dt = 1$
2. $dr/dt = r(1 - r)^2, \quad d\theta/dt = -1$
3. $dr/dt = r(r - 1)(r - 3), \quad d\theta/dt = 1$
4. $dr/dt = r(1 - r)(r - 2), \quad d\theta/dt = -1$
5. $dr/dt = \operatorname{sen} \pi r, \quad d\theta/dt = 1$
6. $dr/dt = r|r - 2|(r - 3), \quad d\theta/dt = -1$

7. Si $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, demuestre que $y(dx/dt) - x(dy/dt) = -r^2(d\theta/dt)$.
8. a) Demuestre que el sistema

$$dx/dt = -y + xf(r)/r, \qquad dy/dt = x + yf(r)/r$$

tiene soluciones periódicas correspondientes a los ceros de $f(r)$. ¿Cuál es la dirección del movimiento sobre las trayectorias cerradas en el plano fase?

b) Sea $f(r) = r(r - 2)^2(r^2 - 4r + 3)$. Determine todas las soluciones periódicas y sus características de estabilidad.

9. Determine las soluciones periódicas, en caso de haber, del sistema

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2), \qquad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2).$$

10. Aplique el teorema 9.7.2 para demostrar que el sistema autónomo lineal

$$dx/dt = ax + by, \qquad dy/dt = cx + dy$$

no tiene una solución periódica (diferente de $x = 0$, $y = 0$) si $a + d \neq 0$.

En los problemas 11 y 12, demuestre que el sistema dado no tiene otras soluciones periódicas que no sean las soluciones constantes.

11. $dx/dt = x + y + x^3 - y^2, \quad dy/dt = -x + 2y + x^2y + y^3/3$
12. $dx/dt = -2x - 3y - xy^2, \quad dy/dt = y + x^3 - x^2y$

13. Demuestre el teorema 9.7.2 al completar el siguiente argumento. Según el teorema de Green en el plano, si C es una curva simple cerrada lo suficientemente suave y si F y G son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\int_C [F(x, y)\, dy - G(x, y)\, dx] = \iint_R [F_x(x, y) + G_y(x, y)]\, dA,$$

en donde C se recorre en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y R es la región encerrada por C. Suponga que $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ es una solución del sistema

(15) que es periódica con periodo T. Sea C la curva cerrada dada por $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, para $0 \leq t \leq T$. Demuestre que, para esta curva, la integral de línea es cero. En seguida demuestre que debe llegarse a la conclusión del teorema 9.7.2.

14. a) Al examinar las gráficas de u contra t de las figuras 9.7.3, 9.7.5 y 9.7.7, calcule el periodo T del oscilador de Van der Pool en estos casos.
b) Si cuenta con equipo de cómputo adecuado, calcule y trace las gráficas de las soluciones de la ecuación de Van der Pool para otros valores del parámetro μ. Calcule también el periodo T en estos casos.
c) Trace las gráficas de los valores estimados de T contra μ. Describa de qué manera T depende de μ.
15. La ecuación

$$u'' - \mu(1 - \tfrac{1}{3}u'^2)u' + u = 0$$

a menudo se conoce como ecuación de Rayleigh.
a) Escriba la ecuación de Rayleigh como un sistema de dos ecuaciones de primer orden.
b) Demuestre que el origen es el único punto crítico de este sistema. Determine su tipo y si es estable o inestable.
c) Sea $\mu = 1$. Elija condiciones iniciales y calcule la solución correspondiente del sistema sobre un intervalo como $0 \leq t \leq 20$ o más largo. Trace la gráfica de u contra t y también la trayectoria en el plano fase. Observe que la trayectoria tiende a una curva cerrada (ciclo límite). Calcule la amplitud A y el periodo T del ciclo límite.
d) Repita el inciso c) para otros valores de μ, como $\mu = 0.2$, 0.5, 2 y 5. En cada caso, calcule la amplitud A y el periodo T.
e) Describa de qué modo cambia el ciclo límite cuando μ crece. Por ejemplo, haga una tabla de valores o una gráfica de A y T como funciones de μ o las dos cosas.

9.8 Caos y atractores extraños: ecuaciones de Lorenz

En principio, los métodos descritos en este capítulo para los sistemas autónomos de segundo orden también pueden aplicarse a sistemas de orden superior. En la práctica existen varias dificultades que surgen al tratar de hacerlo. Un problema es que simplemente hay un mayor número de casos posibles que pueden ocurrir, y el número aumenta con el orden del sistema (y la dimensión del plano fase). Otro es la dificultad de trazar las gráficas de las trayectorias con exactitud en un plano fase de más de dos dimensiones; incluso en tres dimensiones puede no ser fácil construir una gráfica clara y comprensible de las trayectorias y esto se hace más difícil a medida que aumenta el número de variables. Por último, y esto sólo se aclaró hasta años recientes, existen fenómenos diferentes y muy complejos que pueden ocurrir, y que ocurren con frecuencia, en sistemas de órdenes tercero y superiores que no se presentan en los sistemas de segundo orden. La meta de esta sección es suministrar una breve introducción a algunos de estos fenómenos, al analizar un sistema autónomo particular de tercer orden que se ha estudiado con intensidad en los últimos veinte o veinticinco años. En algunos aspectos, la presentación que se hace es semejante al tratamiento de la ecuación logística en diferencias de la sección 2.12.

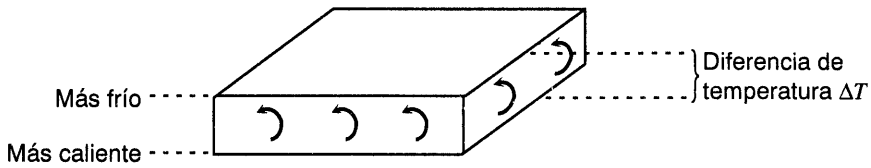


FIGURA 9.8.1 Capa de fluido calentada desde abajo.

Un problema importante en meteorología y en otras aplicaciones de la dinámica de fluidos se refiere al movimiento de una capa de fluido, como la atmósfera de la Tierra, que está más caliente en la parte inferior que en la superior; ver la figura 9.8.1 Si la diferencia vertical ΔT en las temperaturas es pequeña, existe una variación lineal de la temperatura con la altitud, pero ningún movimiento importante de la capa de fluido. Sin embargo, si ΔT es suficientemente grande, el aire más caliente sube, desplazando aire más frío que está arriba, y se produce un movimiento de convección estable. Si la diferencia en las temperaturas aumenta más entonces, finalmente, el flujo estable de convección se rompe y sobreviene un movimiento más complejo y turbulento.

Cuando estudiaba este fenómeno, Edward N. Lorenz[7] llegó (mediante un proceso demasiado complicado para ser descrito aquí) al sistema autónomo no lineal de tercer orden

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(-x + y), \\ dy/dt &= rx - y - xz, \\ dz/dt &= -bz + xy. \end{aligned} \tag{1}$$

Las ecuaciones (1) ahora suelen mencionarse como ecuaciones de Lorenz.[8] Obsérvese que las segunda y tercera ecuaciones comprenden no linealidades cuadráticas. Sin embargo, excepto por el hecho de ser un sistema de tercer orden, superficialmente las ecuaciones de Lorenz no se ven más complicadas que las de las especies competidoras o de depredador-presa que se analizaron en las secciones 9.4 y 9.5. La variable x de las ecuaciones (1) está relacionada con la intensidad del movimiento del fluido, mientras que las variables y y z están relacionadas con las variaciones en la temperatura en las direcciones horizontal y vertical. Las ecuaciones de Lorenz también comprenden tres parámetros, σ, r y b, todos los cuales son reales y positivos. Los parámetros σ y b dependen de las propiedades del material y geométricas de la capa de fluido. Valores razonables de parámetros para la atmósfera terrestre son $\sigma = 10$ y $b = 8/3$; en mucho de lo que sigue en esta sección se asignarán estos datos. Por otra parte, el parámetro r es proporcional a la diferencia en temperaturas ΔT, y la finalidad es investigar de qué manera cambia la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones (1) con r.

[7] Edward N. Lorenz (1917-), meteorólogo estadounidense, obtuvo su Ph. D. en el Institute of Technology, en 1948 y ha estado vinculado con esa institución a lo largo de toda su carrera científica. Las ecuaciones de Lorenz fueron estudiadas en primer lugar por él en un famoso artículo publicado en 1936 sobre la estabilidad de los flujos de fluidos en la atmósfera.

[8] En el libro de Sparrow citado en la bibliografía aparece un tratamiento muy completo de las ecuaciones de Lorenz.

El primer paso al analizar las ecuaciones de Lorenz es localizar los puntos críticos al resolver el sistema algebraico

$$\begin{aligned} \sigma x - \sigma y &= 0, \\ rx - y - xz &= 0, \\ -bz + xy &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Por la primera ecuación, se tiene $y = x$. A continuación, si se elimina y de las ecuaciones segunda y tercera, se obtiene

$$x(r - 1 - z) = 0, \tag{3a}$$

$$-bz + x^2 = 0. \tag{3b}$$

Una manera de satisfacer la ecuación (3a) es elegir $x = 0$. Entonces se deduce que $y = 0$ y, por la ecuación (3b), $z = 0$. De modo alternativo, es posible satisfacer (3a), si se elige $z = r - 1$. Entonces (3b) requiere que $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$ y, en consecuencia, también $y = \pm\sqrt{b(r-1)}$. Obsérvese que estas expresiones para x y y son reales sólo cuando $r \geq 1$. Por tanto, (0, 0, 0), que se denotará por P_1, es un punto crítico para todos los valores de r y es el único punto crítico para $r < 1$. Sin embargo, cuando $r > 1$, también se tienen otros dos puntos críticos; a saber, $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ y $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Estos dos últimos puntos se denotarán por P_2 y P_3, respectivamente. Nótese que los tres puntos críticos coinciden cuando $r = 1$. A medida que r crece pasando por el valor uno, el punto crítico P_1 en el origen *se bifurca* y aparecen los puntos críticos P_2 y P_3.

A continuación se determinará el comportamiento local de las soluciones en la vecindad de cada punto crítico. Aunque bastante del siguiente análisis puede efectuarse para valores arbitrarios de σ y b, el trabajo se simplifica al usar los valores $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. Cerca del origen (el punto crítico P_1), el sistema lineal de aproximación es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Los eigenvalores se determinan a partir de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -10 - \lambda & 10 & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 - \lambda \end{vmatrix} = (8/3 + \lambda)[\lambda^2 + 11\lambda - 10(r - 1)] = 0. \tag{5}$$

Por consiguiente,

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2}. \tag{6}$$

Nótese que los tres eigenvalores son negativos para $r < 1$; por ejemplo, cuando $r = 1/2$ los eigenvalores son $\lambda_1 = -8/3$, $\lambda_2 = -10.52494$, $\lambda_3 = -0.47506$. De donde, el origen es asintóticamente estable para este intervalo r, tanto para la aproximación lineal (4) como

para el sistema original (1). Sin embargo, λ_3 cambia de signo cuando $r = 1$ y es positivo para $r > 1$. El valor $r = 1$ corresponde al inicio del flujo de convección en el problema físico antes descrito. El origen es inestable para $r > 1$; todas las soluciones que se inician cerca del origen tienden a crecer, excepto aquellas que se encuentran precisamente en el plano determinado por los eigenvectores asociados con λ_1 y λ_2 (o sea, para el sistema lineal (1), en cierta superficie tangente a este plano en el origen).

A continuación, considérese la vecindad del punto crítico $P_2(\sqrt{8(r-1/3}, \sqrt{8(r-1)/3}, r-1)$ para $r > 1$. Si u, v y w son las perturbaciones a partir del punto crítico en las direcciones x, y y z, respectivamente, entonces el sistema lineal de aproximación es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{8(r-1)/3} \\ \sqrt{8(r-1)/3} & \sqrt{8(r-1)/3} & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Los eigenvalores de la matriz de coeficientes de la ecuación (7) quedan determinados a partir de la ecuación

$$3\lambda^3 + 41\lambda^2 + 8(r + 10)\lambda + 160(r - 1) = 0, \tag{8}$$

que se obtiene mediante pasos algebraicos directos que se omiten aquí. Las soluciones de (8) dependen de r de las siguiente manera:

Para $1 < r < r_1 \cong 1.3456$ existen tres eigenvalores reales negativos.
Para $r_1 < r < r_2 \cong 24.737$ existe un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos con parte real negativa.
Para $r_2 < r$ existe un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos con parte real positiva.

Los mismos resultados se obtienen para el punto crítico P_3. Por tanto, se tienen varias situaciones diferentes.

Para $0 < r < 1$, el único crítico es P_1 y es asintóticamente estable. Todas las soluciones tienden a este punto (el origen) cuando $t \to \infty$.

Para $1 < r < r_1$, los puntos críticos P_2 y P_3 son asintóticamente estables y P_1 es inestable. Todas las soluciones cercanas tienden exponencialmente hacia uno o el otro de los puntos P_2 y P_3.

Para $r_1 < r < r_2$, los puntos críticos P_2 y P_3 son asintóticamente estables y P_1 es inestable. Todas las soluciones cercanas tienden hacia uno o el otro de los puntos P_2 y P_3; la mayoría de ellas describen una espiral hacia adentro, hacia el punto crítico.

Para $r_2 < r$, los tres puntos críticos son inestables. La mayoría de las soluciones cerca de P_2 o de P_3 describen una espiral que se aleja del punto crítico.

Sin embargo, de ningún modo éste es el final de la historia. Considérense soluciones para r algo mayores que r_2. En este caso, P_1 tiene un eigenvalor positivo y cada uno de P_2 y P_3 tiene un par de eigenvalores complejos con parte real positiva. Una trayectoria puede aproximarse a cualquiera de los puntos críticos sólo sobre ciertos caminos muy restringidos. La menor desviación con respecto a estos caminos provoca que la trayectoria se aleje del punto crítico. Ya que ninguno de los puntos crítico es estable, podría esperarse que la mayor parte de las trayectorias tiendan al infinito para t grande. Sin embargo, es posible demostrar que todas las soluciones permanecen acotadas cuando $t \to \infty$; ver el problema 5. De hecho,

es posible demostrar que, al final, todas las soluciones tienden a cierto conjunto límite de puntos cuyo volumen es cero. De hecho, esto es cierto no sólo para $r > r_2$, sino para todos los valores positivos de r.

En la figura 9.8.2 se muestra una gráfica de valores calculados de x contra t para una solución típica con $r > r_2$. Nótese que la solución oscila de un lado a otro, entre valores positivos y negativos, de una manera errática. De hecho, la gráfica de x contra t semeja una vibración aleatoria, aunque las ecuaciones de Lorenz son por completo deterministas y la solución queda enteramente determinada por las condiciones iniciales. A pesar de ello, la solución también exhibe cierta *regularidad* en cuanto a que la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones son en esencia constantes en el tiempo.

Las soluciones de las ecuaciones de Lorenz también son en extremo sensibles a las perturbaciones en las condiciones iniciales. En la figura 9.8.3 se muestran las gráficas de valo-

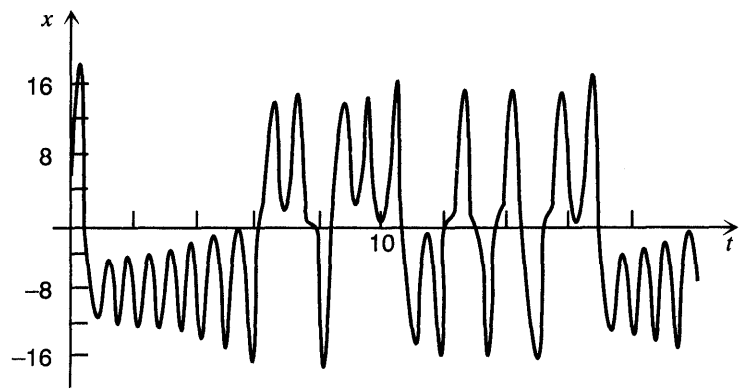


FIGURA 9.8.2 Gráfica de x contra t para las ecuaciones de Lorenz (1), con $r = 28$; el punto inicial es (5, 5, 5).

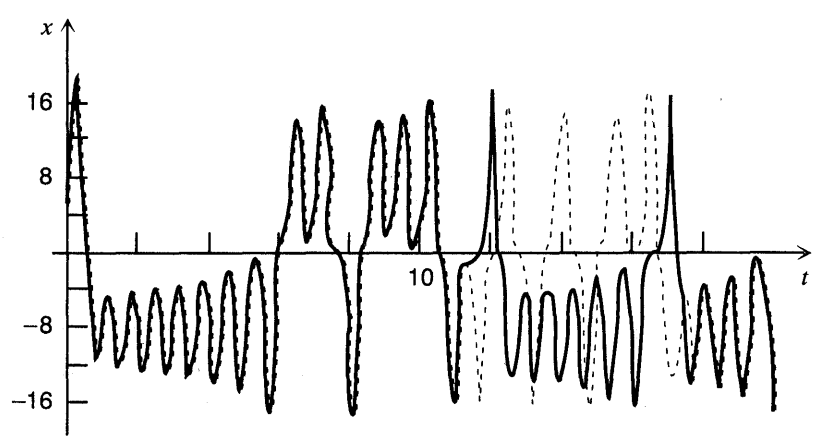


FIGURA 9.8.3 Gráficas de x contra t para dos soluciones inicialmente cercanas de las ecuaciones de Lorenz, con $r = 28$; el punto inicial es (5, 5, 5) para la curva en línea discontinua y (5.01, 5, 5) para la curva de trazo continuo.

res calculados de x contra t para las dos soluciones cuyos puntos iniciales son (5, 5, 5) y (5.01, 5, 5). La gráfica en línea discontinua es la misma que la de la figura 9.8.2, mientras que la gráfica de trazo continuo se inicia en un punto próximo. Las dos soluciones permanecen próximas entre sí hasta que t es casi diez, después de lo cual son bastante diferentes y, de hecho, parecen no guardar relación entre sí. Fue esta propiedad lo que atrajo en particular la atención de Lorenz en su estudio original de estas ecuaciones y le hizo concluir que probablemente no son posibles las predicciones climatológicas a largo plazo.

El conjunto que atrae en este caso, aunque de volumen cero, tiene una estructura un tanto complicada y se conoce como **atractor extraño**. El término **caótico** ya es de uso general para describir soluciones como las que se muestran en las figuras 9.8.2 y 9.8.3.

Para determinar de qué modo y cuándo se crea el atractor extraño, es revelador investigar las soluciones para valores más pequeños de r. Para $r = 21$, en la figura 9.8.4 se muestran las soluciones que parten de tres puntos iniciales distintos. Para el punto inicial (3, 8, 0), la solución comienza a converger hacia el punto P_3 casi de inmediato; ver la figura 9.8.4*a*. Para el segundo punto inicial (5, 5, 5), existe un intervalo muy corto de comportamiento transitorio, después del que la solución converge hacia P_2; ver la figura 9.8.4*b*. Sin embargo, como se muestra en la figura 9.8.4*c*, para el tercer punto inicial (5, 5, 10) existe un intervalo mucho más largo de comportamiento caótico transitorio antes de que la solución converja finalmente a P_2. A medida que r crece, la duración del comportamiento caótico transitorio también crece. Cuando $r = r_3 \cong 24.06$, los transitorios caóticos parecen continuar de modo indefinido y el atractor extraño empieza a aparecer.

También es posible mostrar las trayectorias de las ecuaciones de Lorenz en el plano fase tridimensional o por lo menos, proyecciones de ellas en varios planos. En las figuras 9.8.5 y 9.8.6 se muestran proyecciones en los planos xy y xz, respectivamente, de la trayectoria que parten de (5, 5, 5). Obsérvese que las gráficas de estas figuras parecen cortarse varias veces, pero esto no puede ser cierto para las trayectorias reales en el espacio tridimensional, por el teorema general de unicidad. Los cruces aparentes se deben por completo al carácter bidimensional de las figuras.

La sensibilidad de las soluciones a las perturbaciones de los datos iniciales también tiene consecuencias para los cálculos numéricos, como los mencionados aquí. Tamaños diferentes de paso, algoritmos numéricos diferentes o, incluso, la ejecución del mismo algoritmo en máquinas diferentes introducen pequeñas diferencias en la solución calculada, lo que termina por producir graves desviaciones. Por ejemplo, la sucesión exacta de ciclos positivos y negativos en la solución calculada depende mucho del algoritmo numérico preciso y su puesta en práctica, así como de las condiciones iniciales. Sin embargo, la apariencia general de la solución y la estructura del conjunto atractor son independientes de todos estos factores.

Las soluciones de las ecuaciones de Lorenz para otros intervalos de los parámetros exhiben otros tipos interesantes de comportamiento. Por ejemplo, para ciertos valores de r mayores que r_2, estallidos intermitentes de comportamiento caótico separan largos intervalos de oscilación periódica aparentemente estable. Para otros intervalos de r, las soluciones muestran la propiedad de duplicación del periodo que se vio en la sección 2.12 para la ecuación logística en diferencias. Algunas de estas características se abordan en los problemas.

Desde alrededor de 1975 las ecuaciones de Lorenz y otros sistemas autónomos de orden superior se han estudiado con intensidad, y esta es una de las áreas más activas de la investigación matemática actual. El comportamiento caótico de las soluciones parece ser mucho

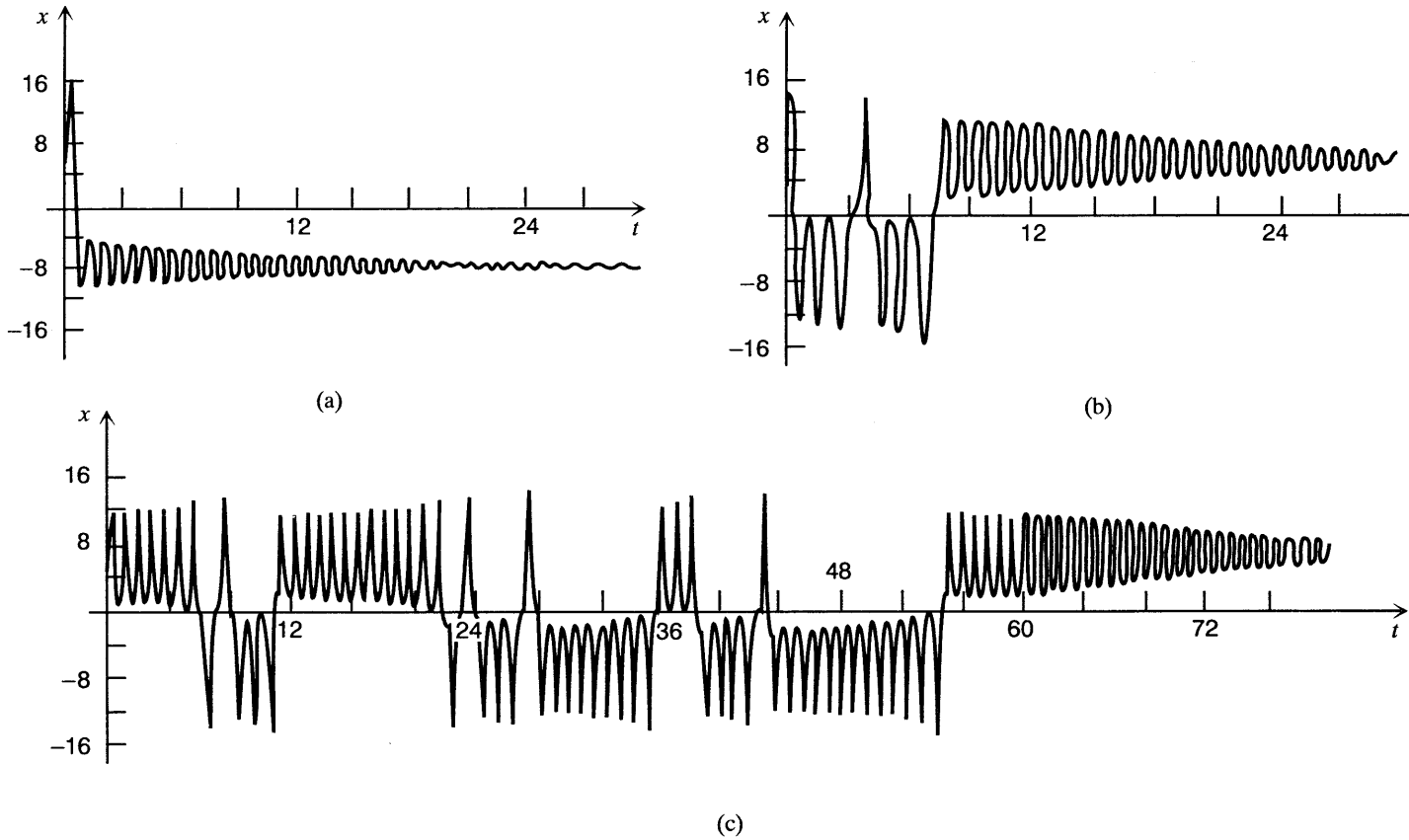


FIGURA 9.8.4 Gráficas de x contra t para tres soluciones de las ecuaciones de Lorenz, con $r = 21$. a) El punto inicial es (3, 8. 0). b) El punto inicial es (5, 5, 5). c) El punto inicial es (5, 5, 10).

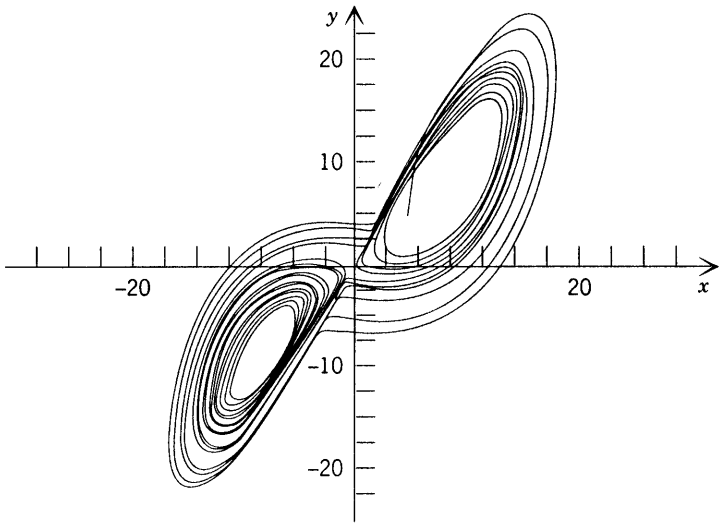


FIGURA 9.8.5 Proyección de una trayectoria de las ecuaciones de Lorenz (con $r = 28$) en el plano xy.

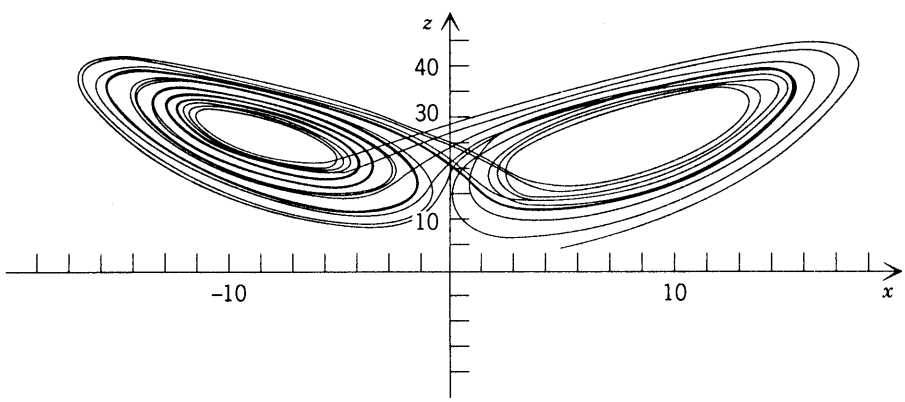


FIGURA 9.8.6 Proyección de una trayectoria de las ecuaciones de Lorenz (con $r = 28$) en el plano xz.

más común de lo que se creía al principio y aún quedan muchas preguntas sin respuesta. Algunas de ellas son de naturaleza matemática, mientras que otras se relacionan con las aplicaciones o las interpretaciones físicas de las soluciones.

Problemas

En los problemas 1 a 3 se pide completar algunos de los detalles del análisis de las ecuaciones de Lorenz presentado en el texto.

1. a) Demuestre que los eigenvalores del sistema lineal (4), válidos cerca del origen, están dados por la ecuación (6).
   b) Determine los eigenvectores correspondientes.
   c) Determine los eigenvalores y eigenvectores del sistema (4) en el caso en que $r = 28$.
2. a) Demuestre que la aproximación lineal válida cerca del punto crítico P_2 está dada por la ecuación (7).
   b) Demuestre que los eigenvalores del sistema (7) satisfacen la ecuación (8).
   c) Para $r = 28$, resuelva la ecuación (8) y determine en consecuencia los eigenvalores del sistema (7).
3. a) Al resolver numéricamente la ecuación (8), demuestre que la parte real de las raíces complejas cambia de signo cuando $r \cong 24.737$.
   b) Demuestre que un polinomio cúbico $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ tiene un cero real y dos ceros imaginarios puros sólo si $AB = C$.
   c) Aplique el resultado del inciso (b) a la ecuación (8) para demostrar que la parte real de las raíces complejas cambia de signo cuando $r = 470/19$.
4. Aplique la función de Liapunov $V(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ para demostrar que el origen es un punto crítico asintóticamente estable globalmente para las ecuaciones de Lorenz (1), si $r < 1$.
5. Considere el elipsoide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = c > 0.$$

   a) Calcule dV/dt a lo largo de trayectorias de las ecuaciones de Lorenz (1).
   b) Determine una condición suficiente sobre c de modo que toda trayectoria que cruce $V(x, y, z) = c$ esté dirigida hacia adentro.
   c) Evalúe la condición hallada en el inciso b) para el caso $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

En cada uno de los problemas 6 a 10, use el equipo de cómputo apropiado para llevar a cabo las investigaciones indicadas de las ecuaciones de Lorenz.

6. Para $r = 28$, trace la gráfica de x contra t para los casos que se muestran en las figuras 9.8.2 y 9.8.3. ¿Concuerdan sus gráficas con las de las figuras mencionadas? Recuerde el análisis del cálculo numérico en el texto.
7. Para $r = 28$ trace las gráficas de las proyecciones en los planos xy y xz, respectivamente, de la trayectoria que se inicia en el punto (5, 5, 5). ¿Concuerdan las gráficas con las de las figuras 9.8.5 y 9.8.6?
8. a) Para $r = 21$, trace la gráfica de x contra t para las soluciones que parten de los puntos iniciales (3, 8, 0), (5, 5, 5) y (5, 5, 10). Use un intervalo t de por lo menos $0 \leq t \leq 30$. Compare las gráficas que se obtengan con las de la figura 9.8.4.
   b) Repita el cálculo del inciso a) para $r = 22$, $r = 23$ y $r = 24$. Aumente el intervalo t según se necesite para poder determinar cuándo cada solución empieza a converger hacia uno de los puntos críticos. Registre la duración aproximada del caótico transitorio en cada caso. Describa de qué modo esta cantidad depende del valor de r.
   c) Repita los cálculos de los incisos a) y b) para valores de r ligeramente mayores que 24. Intente calcular el valor de r para el que la duración del transitorio caótico tiende al infinito.
9. Para ciertos intervalos o ventanas r las ecuaciones de Lorenz muestran una propiedad de duplicación del periodo semejante a la de la ecuación logística en diferencias analizadas en la sección 2.12. Este fenómeno puede descubrirse por medio de cálculos cuidadosos.

a) Una ventana de duplicación del periodo contiene el valor $r = 100$. Haga $r = 100$ y trace la gráfica de la trayectoria que parte de (5, 5, 5) o de algún otro punto inicial que elija. ¿La solución parece ser periódica? ¿Cuál es el periodo?

b) Repita el cálculo del inciso a) para valores de r ligeramente mayores. Cuando $r \cong 99.98$ es posible observar que el periodo de la solución se duplica. Intente observar este resultado al efectuar cálculos con valores cercanos de r.

c) A medida que r decrece aun más, el periodo de la solución se duplica repetidas veces. La siguiente duplicación del periodo ocurre alrededor de $r = 99.629$. Intente observar este hecho al trazar gráficas de trayectorias para valores cercanos de r.

10. Considere ahora valores de r ligeramente mayores que los del problema 9.

a) Trace trayectorias de las ecuaciones de Lorenz para valores de r entre 100 y 100.78. Debe observar una solución periódica estable para este intervalo de valores de r.

b) Trace trayectorias para valores de r entre 100.78 y 100.8. Determine lo mejor que pueda de qué modo y cuándo se rompe la trayectoria periódica.

BIBLIOGRAFÍA

Varios libros sobre ecuaciones diferenciales no lineales presentan muchas aplicaciones, además de la teoría. Algunos de ellos son:

LaSalle, J. y Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications* New York: Academic Press).

Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations* (Princeton: Van Nostrand).

Stoker, J. J., *Nonlinear Vibrations* (New York: Wiley-Interscience).

Algunos de los libros de orientación más teórica son:

Birkhoff, G., y Rota, G. C., *Ordinary Differential Equations* (4a. ed.) (New York: Wiley).

Brauer, F., y Nohel, J., *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Benjamin).

Cesari, L., *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations* (2a. ed.)(Berlin/New York; Springer-Verlag).

Guckenheimer, J. C., y Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York/Berlin: Springer-Verlag).

Hirsch, W. H. y Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* (New York: Academica Press).

Struble, R. A., *Nonlinear Differential Equations* (New York; McGraw-Hill).

De estos libros, los más elementales son el de Struble y el de Brauer y Nohel.

Una referencia común en ecología es:

Odum, E. P., *Fundamentals of Ecology* (3a ed.)(Philadelphia: Saunders).

Dos libros que tratan de ecología y dinámica de las poblaciones en un nivel más matemático son:

May, R. M., *Stability and Complexity in Model Ecosystems* (Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1973).

Pielou, E. C., *Mathematical Ecology* (New York; Wiley).

El artículo original de las ecuaciones de Lorenz es

Lorenz, E. N., "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of the Atmospheric Sciences* 20 (1963), pp. 130-141.

Un tratamiento muy detallado de las ecuaciones de Lorenz es:

Sparrow, C., *The Lorenz Equations: Chaos, and Strange Attractors* (New York/Berlin: Springer-Verlag).

Una referencia más amplia y general es:

Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (New York/Berlin: Springer-Verlag).

Capítulo 10 Ecuaciones diferenciales parciales y series de Fourier

En muchos problemas físicos importantes se tienen dos o más variables independientes, por lo que los modelos matemáticos correspondientes incluyen ecuaciones diferenciales parciales, en vez de ordinarias. En este capítulo se trata un método importante para resolver ecuaciones diferenciales parciales, conocido como de separación de variables. Su característica esencial es la sustitución de la ecuación diferencial parcial por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. La solución requerida de la ecuación diferencial parcial se expresa entonces como una suma, casi siempre una serie infinita, formada a partir de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En muchos casos, al final es necesario trabajar con una serie de senos o cosenos o los dos, de modo que parte del capítulo se dedica a un análisis de esas series, llamadas series de Fourier. El uso de la separación de variables se ilustra con diversos problemas que surgen de la conducción del calor, la propagación de ondas y la teoría del potencial.

10.1 Separación de variables; conducción del calor

Las ecuaciones diferenciales parciales básicas de la conducción del calor, la propagación de ondas y la teoría del potencial que se analizarán en este capítulo están asociadas con tres tipos distintos de fenómenos físicos: procesos de difusión, procesos oscilatorios y procesos independientes del tiempo o estables; como consecuencia, tienen una importancia fundamental en muchas ramas de la física y también desde el punto de vista matemático. Las ecuaciones diferenciales parciales cuya teoría está mejor desarrollada y cuyas aplicaciones son más significativas y variadas son las ecuaciones lineales de segundo orden. Todas ellas se pueden clasificar en una de tres categorías: la ecuación de conducción del calor, la ecuación de onda y la ecuación de potencial, respectivamente, son prototipos de cada una de estas categorías. Por tanto, un estudio de estas tres ecuaciones proporciona mucha información acerca de ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden más generales.

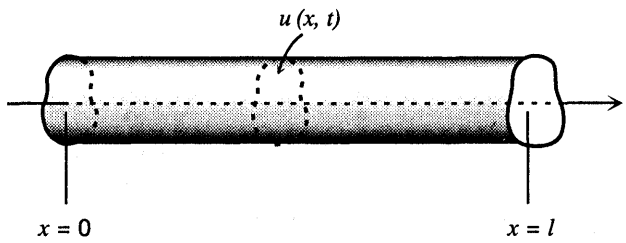


FIGURA 10.1.1 Barra sólida conductora de calor.

Durante los dos últimos siglos se han desarrollado varios métodos para resolver las ecuaciones diferenciales parciales. El método de separación de variables es el método sistemático más antiguo, y fue utilizado pro D'Alembert, Daniel Bernoulli y Euler hacia 1750 en sus investigaciones sobre ondas y vibraciones. Desde entonces, se le ha refinado y generalizado de modo considerable, y sigue siendo un método de gran importancia y uso frecuente en la actualidad. Para mostrar cómo funciona el método de separación de variables, se considerará primero un problema básico de conducción de calor de un cuerpo sólido. El estudio matemático de la conducción del calor se originó[1] aproximadamente en 1800 y sigue llamando la atención de los científicos modernos. Por ejemplo, el análisis de la disipación y la transferencia del calor lejos de sus fuentes en maquinaria que opera a gran velocidad suele ser un problema tecnológico importante.

Considérese ahora un problema de conducción de calor para una barra recta de sección transversal uniforme y material homogéneo. Se elige como eje x el largo del eje de la barra y sean $x = 0$ y $x = l$ los extremos de la barra (ver la figura 10.1.1). Supóngase además que los lados de la barra están perfectamente aislados, de modo que no pasa calor a través de ellos. Considérese también que las dimensiones de la sección transversal son tan pequeñas que la temperatura u puede considerarse constante en cualquier sección transversal dada. Entonces u es una función sólo de la coordenada axial x y del tiempo t.

La variación de la temperatura en la barra está regida por una ecuación diferencial parcial cuya deducción se presenta en el apéndice A al final del capítulo. Esta ecuación se conoce como **ecuación de conducción del calor** y tiene la forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \tag{1}$$

en donde α^2 es una constante denominada **difusibilidad térmica**. El parámetro α^2 depende sólo del material del que está hecho la barra y se define por

$$\alpha^2 = \kappa/\rho s, \tag{2}$$

[1] La primera investigación importante de la conducción del calor fue efectuada por Joseph Fourier (1768-1830) en su tiempo disponible mientras se desempeñaba como prefecto del Departamento de Isère (Grenoble) de 1801 a 1815. Presentó artículos fundamentales sobre el tema a la Academia de Ciencias de París en 1807 y 1811. Sin embargo, estos documentos fueron criticados por los árbitros (principalmente Lagrange) debido a falta de rigor, por lo que no fueron publicados. Fourier continuó desarrollando sus ideas y a la larga escribió una de las obras clásicas de las matemáticas aplicadas, *Théorie analytique de la chaleur*, publicada en 1822.

TABLA 10.1.1 Valores de la difusibilidad térmica para algunos materiales comunes

Material	$\alpha^2(\text{cm}^2/\text{s})$
Plata	1.71
Cobre	1.14
Aluminio	0.86
Hierro fundido	0.12
Granito	0.011
Ladrillo	0.0038
Agua	0.00144

en donde κ es la conductividad térmica, ρ es la densidad y s es el calor específico del material de la barra. Las unidades de α^2 son (longitud)^2/tiempo. En la tabla 10.1.1 se dan algunos valores típicos de α^2.

Además, se supondrá que se da la distribución inicial de la temperatura en la barra; por tanto

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

en donde f es una función dada. Por último, supóngase que los extremos de la barra se mantienen a temperaturas fijas; la temperatura T_1 en $x = 0$ y la temperatura T_2 en $x = l$. Sin embargo, resulta que basta con considerar el caso en el que $T_1 = T_2 = 0$. En la sección 10.5 se mostrará cómo reducir el problema más general a este caso especial. Por tanto, en esta sección se supondrá que u siempre es cero cuando $x = 0$ o $x = l$;

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{4}$$

El problema fundamental de la conducción del calor es hallar $u(x, t)$ que satisfaga la ecuación diferencial (1), la condición inicial (3) y las condiciones en la frontera (4).

El problema descrito por las ecuaciones (1), (3) y (4) es un problema con valor inicial en la variable de tiempo t; se da una condición inicial y la ecuación diferencial rige lo que sucede después. Sin embargo, con respecto a la variable espacial x, el problema es de un tipo diferente, conocido como problema con valores en la frontera. Se desea la solución de la ecuación diferencial en cierto intervalo y se imponen condiciones (llamadas condiciones en la frontera) en los extremos de éste. De modo alternativo, es posible considerar el problema como un problema con valores en la frontera en el plano xt (ver la figura 10.1.2). Se busca la solución $u(x, t)$ de la ecuación (1) en la franja seminfinita $0 < x < l$, $t > 0$, sujeta al requisito de que $u(x, t)$ debe tomar un valor prescrito en cada punto de la frontera de esta franja.

El problema de conducción del calor (1), (3), (4) es *lineal* por que u sólo aparece elevada a la primera potencia. La ecuación diferencial y las condiciones en la frontera también son *homogéneas*. Esto sugiere que se podría enfocar el problema al buscar soluciones de la ecuación diferencial y de las condiciones en la frontera y sobreponerlas luego para satisfacer la condición inicial. Para encontrar las soluciones que se necesitan, se buscan soluciones de la ecuación diferencial (1) que tengan la forma de un producto de una función sólo de x y una función sólo de t; por tanto, se supone que

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{5}$$

Si se sustituye u de la ecuación (5) en la ecuación diferencial (1) se tiene

$$\alpha^2 X''T = XT', \tag{6}$$

en donde los apóstrofos se refieren a la derivación ordinaria con respecto a la variable independiente, sea x o t. La ecuación (6) es equivalente a

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}, \tag{7}$$

en la que se han separado las variables; es decir, el primer miembro sólo depende de x y el segundo, sólo de t. Para que la ecuación (7) sea válida para $0 < x < l$, $t > 0$, es necesario que sus dos miembros sean iguales a la misma constante. De lo contrario, al mantener fija una de las variables independientes (por ejemplo x) y hacer variar la otra, uno de los miembros (en este caso el primero) permanecería sin cambio, mientras que el otro habría variado, con lo que se viola la igualdad. Si a esta constante de separación se le llama $-\sigma$, entonces la ecuación (7) queda

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\sigma. \tag{8}$$

De donde, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes para $X(x)$ y $T(t)$:

$$X'' + \sigma X = 0, \tag{9}$$

$$T' + \alpha^2 \sigma T = 0. \tag{10}$$

La constante de separación se denota $-\sigma$ (en vez de σ) porque resulta que debe ser negativa y es conveniente hacer explícito al signo menos.

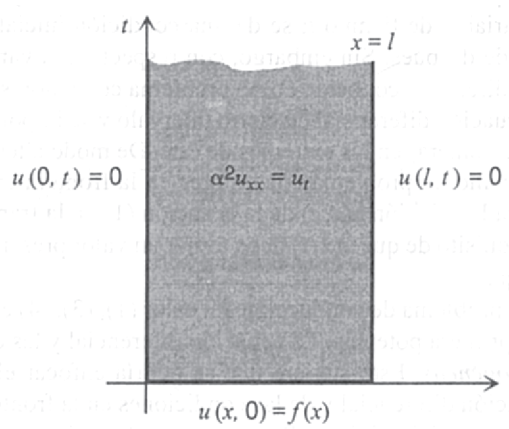


FIGURA 10.1.2 Problemas con valores en la frontera para la ecuación de conducción del calor.

De este modo, la ecuación diferencial parcial (1) se reemplazó por dos ecuaciones diferenciales ordinarias; cada una de las cuales puede resolverse con facilidad para *cualquier* valor de σ. El producto de dos soluciones de las ecuaciones (9) y (10), respectivamente, proporciona una solución de la ecuación diferencial parcial (1). Sin embargo, sólo interesa en aquellas soluciones de (1) que también satisfagan las condiciones en la frontera (4). Como se muestra a continuación, esto restringe severamente los valores posibles de σ.

Si se sustituye $u(x, t)$ de la ecuación (5) en la condición en la frontera cuando $x = 0$, se obtiene

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0. \tag{11}$$

Si la ecuación (11) se satisface al elegir que $T(t)$ sea cero para toda t, entonces $u(x, t)$ es cero para toda x y t. Esto es inaceptable, ya que en este caso $u(x, t)$ no satisfaría la condición inicial (3), a menos que la distribución inicial de temperaturas $f(x)$ sea cero para toda x. Por consiguiente, se debe satisfacer la (11) al requerir que

$$X(0) = 0. \tag{12}$$

De manera semejante, la condición en la frontera en $x = l$ requiere que

$$X(l) = 0. \tag{13}$$

Ahora se va a considerar a la ecuación (9) sujeta a las condiciones en la frontera (12) y (13). Esto se conoce como problema con valores en la frontera en dos puntos: se busca la solución de (9) en el intervalo $0 < x < l$ y se prescribe una condición en la frontera en cada extremo del intervalo. Este problema con valores en la frontera, para todo valor de σ, tiene la solución $X(x) = 0$ para toda x. Si esta solución (conocida como solución trivial) se sustituye en la ecuación (5), resulta que $u(x, t) = 0$ para toda x y t, lo cual es inaceptable, como ya se hizo notar. Por lo tanto, sólo se tiene interés en otras soluciones, no triviales, de las ecuaciones (9), (12) y (13). Para que existan soluciones no triviales es posible demostrar que σ debe ser real; ver el problema 13, así como el análisis de una clase más general de problemas en la sección 11.3. Por tanto, es necesario distinguir tres casos, dependiendo de si $\sigma = 0$, $\sigma < 0$ o $\sigma > 0$.

Si $\sigma = 0$, entonces la solución general de la ecuación (9) es

$$X(x) = k_1 x + k_2. \tag{14}$$

Para satisfacer la condición en la frontera (12) es necesario elegir $k_2 = 0$. Entonces para satisfacer la segunda condición en la frontera (13), es necesario tener $k_1 = 0$. De donde, $X(x) = 0$ para toda x y existen soluciones no triviales cuando $\sigma = 0$.

Si $\sigma < 0$, es conveniente reemplazar σ por $-\lambda^2$, en donde $\lambda > 0$ es un nuevo parámetro; esta sustitución evita la ocurrencia de numerosos signos de radical en el razonamiento siguiente. Entonces, la ecuación (9) se queda

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \tag{15}$$

y su solución general es

$$X(x) = k_1 \cosh \lambda x + k_2 \operatorname{senh} \lambda x. \tag{16}$$

La elección de cosh λx y senh λx como conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (15), en vez de $\exp(\lambda x)$ y $\exp(-\lambda x)$, es también por conveniencia. Si se aplica la condición en la frontera (12) a la solución (16), se obtiene

$$X(0) = k_1 \cosh 0 + k_2 \operatorname{senh} 0 = k_1 = 0. \tag{17}$$

Por tanto, se deduce que $X(x) = k_2 \operatorname{senh} \lambda x$. La segunda condición en la frontera (13) requiere entonces que

$$X(l) = k_2 \operatorname{senh} \lambda l = 0. \tag{18}$$

En virtud de que λ y l son positivas, también senh $\lambda l > 0$ y la única manera de satisfacer la ecuación (18) es elegir $k_2 = 0$. De donde $X(x) = 0$ para toda x, de modo que cuando $\sigma < 0$ no existen soluciones no triviales de las ecuaciones (9), (12) y (13).

Por último si $\sigma > 0$, entonces se sustituye σ por λ^2, en donde $\lambda > 0$, y la ecuación (9) queda

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{19}$$

La solución general de la ecuación (19) es

$$X(x) = k_1 \cos \lambda x + k_2 \operatorname{sen} \lambda x. \tag{20}$$

La primera condición en la frontera (12) requiere que

$$X(0) = k_1 \cos 0 + k_2 \operatorname{sen} 0 = k_1 = 0, \tag{21}$$

de modo que $X(x) = k_2 \operatorname{sen} \lambda x$. Entonces, la segunda condición en la frontera da

$$k_2 \operatorname{sen} \lambda l = 0. \tag{22}$$

Una manera de satisfacer la ecuación (22) es elegir $k_2 = 0$, pero esto da la solución trivial $X(x) = 0$ para toda x. Una mejor elección es requerir que sen $\lambda l = 0$, lo que significa que $\lambda l = n\pi$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. De donde, $\lambda = n\pi/l$ y

$$\sigma = -n^2\pi^2/l^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{23}$$

Los valores de σ dados por la ecuación (23), para los cuales existen soluciones no triviales, se llaman **eigenvalores** del problema con valores en la frontera (9), (12) y (13). Las soluciones no triviales correspondientes $X(x)$, que son proporcionales a sen $(n\pi x/l)$, son las **eigenfunciones**.

Si se sustituye σ de la ecuación (10), se tiene

$$T' + (n^2\pi^2\alpha^2/l^2)T = 0. \tag{24}$$

Por tanto, $T(t)$ es proporcional a $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2/l^2)$. De donde, si se multiplican entre sí las soluciones de las ecuaciones (9) y (10) y se desprecian las constantes arbitrarias de proporcionalidad, se concluye que las funciones

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \operatorname{sen}(n\pi x/l), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

satisfacen la ecuación diferencial parcial (1) y las condiciones en la frontera (4) para cada valor entero positivo de n. Algunas veces a las funciones u_n se les llama soluciones fundamentales del problema de conducción del calor (1), (3) y (4).

Falta sólo satisfacer la condición inicial (3),

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{26}$$

Es necesario hacer hincapié en que la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (4) son lineales y homogéneas y que son satisfechas por $u_n(x, t)$ para $n = 1, 2, \ldots$. Por el principio de superposición, se sabe que cualquier combinación lineal de los $u_n(x, t)$ también satisface la ecuación diferencial y las condiciones en la frontera. Por consiguiente, se supone que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{m} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{m} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{27}$$

en donde los coeficientes c_n todavía no se determinan y en donde m es algún entero positivo. Dado que $u(x, t)$, según se expresa en la ecuación (27), satisface la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (4), para cualquier elección de c_n, se desea investigar si se puede elegir las c_n de modo que también satisfagan la condición inicial (3). En primer lugar, considérense dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1 Hallar la solución del problema de conducción del calor (1), (3) y (4) si

$$f(x) = 3 \operatorname{sen}(4\pi x/l). \tag{28}$$

En este caso basta usar sólo una de las soluciones fundamentales (25); a saber, la correspondiente a $n = 4$. Se supondrá que

$$u(x, t) = c_4 e^{-16\pi^2\alpha^2 t/l^2} \operatorname{sen}(4\pi x/l), \tag{29}$$

que satisface la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (4), para cualquier valor de c_4. Al hacer $t = 0$, se obtiene

$$u(x, 0) = c_4 \operatorname{sen}(4\pi x/l);$$

de donde, es necesario elegir $c_4 = 3$, para satisfacer la condición inicial. Si se sustituye este valor de c_4 en la ecuación (29) da la solución del problema completo con valores en la frontera.

Ejemplo 2 Encontrar la solución del problema de conducción del calor (1), (3) y (4) si

$$f(x) = b_1 \operatorname{sen}(\pi x/l) + \cdots + b_m \operatorname{sen}(m\pi x/l), \tag{30}$$

en donde $b_1, \ldots, b_m$ son constantes dadas.

Si se supone que $u(x, t)$ se expresa por la ecuación (27), entonces se satisfacen la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (4) para cualquier elección de $c_1, \ldots, c_m$. En $t = 0$, se tiene

$$u(x, 0) = c_1 \operatorname{sen}(\pi x/l) + \cdots + c_m \operatorname{sen}(m\pi x/l)$$
$$= b_1 \operatorname{sen}(\pi x/l) + \cdots + b_m \operatorname{sen}(m\pi x/l).$$

Por tanto, se satisface la condición inicial si se elige $c_1 = b_1, \ldots, c_m = b_m$. La solución del problema completo es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{m} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \tag{31}$$

Vuélvase ahora al problema general de las ecuaciones (1), (3) y (4), con f una función arbitraria. A menos que $f(x)$ tome la forma dada por la ecuación (30), no es posible satisfacer la condición inicial (3) por medio de una suma finita de la forma (27). Esto sugiere la extensión formal del principio de superposición para incluir *series infinitas*; es decir, se supone que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \tag{32}$$

Se ha visto que los términos individuales de la ecuación (32) satisfacen la ecuación diferencial parcial (1) y las condiciones en la frontera (4), y que cualquier suma finita de esos términos también lo hace. Se supondrá que la serie infinita de la ecuación (32) converge y que también satisface las ecuaciones (1) y (4). Para satisfacer la condición inicial (3) es necesario tener

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x). \tag{33}$$

En otras palabras, se necesita elegir los coeficientes c_n de modo que la serie de funciones senoidales de la ecuación (33) converja a la distribución inicial de temperaturas $f(x)$. Supóngase por el momento que es posible expresar $f(x)$ como una serie infinita de términos senoidales

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{34}$$

y que se sabe cómo calcular los coeficientes b_n de esta serie infinita. Entonces, como en el ejemplo 2, se puede satisfacer la ecuación (3) al elegir $c_n = b_n$ para cada n. Con los coeficientes c_n así seleccionados, la ecuación (32) da la solución del problema con valores en la frontera (1), (3) y (4).

Por tanto, para resolver por el método de separación de variables el problema dado de conducción del calor, para una distribución inicial bastante arbitraria de temperaturas, es necesario expresar la distribución inicial de temperaturas $f(x)$ como una serie de la forma (34). Esto plantea las preguntas siguientes:

1. ¿Cómo es posible identificar funciones que puedan escribirse en la forma (34)?
2. Si f es esa función, ¿cómo es posible determinar los coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$?

En las tres secciones siguientes se mostrará de qué manera se puede representar una gran clase de funciones por medio de series semejantes a la ecuación (34); además, se demostrará que los coeficientes de estas series se pueden determinar de manera relativamente sencilla.

Problemas

1. Enuncie exactamente el problema con valores en la frontera que determina la temperatura en una barra de cobre de 1 m de longitud si, originalmente, toda la barra se encuentra a 20°C y uno de sus extremos se calienta de modo repentino hasta 60°C y se mantiene a esa temperatura, mientras que el otro extremo se conserva a 20°C.
2. Enuncie con exactitud el problema con valores en la frontera que determina la temperatura en una barra de plata de 2 m de longitud, si los extremos se mantienen a las temperaturas de 30°C y 50°C, respectivamente. Suponga que la temperatura inicial en la barra la da una función cuadrática de la distancia a lo largo de la misma, coherente con las condiciones en la frontera antes dadas y con la condición de que la temperatura en su centro es de 60°C.
3. Suponga que $u_n(x, t)$ se expresa por la ecuación (25). Demuestre que $c_1u_1(x, t) + \cdots + c_mu_m(x, t)$, en donde $c_1, \ldots, c_m$ son constantes, satisface la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (4).
4. Encuentre la solución del problema de conducción del calor

$$100u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen} 2\pi x - 2 \operatorname{sen} 5\pi x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

5. Encuentre la solución del problema de conducción del calor

$$u_{xx} = 4u_t, \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \qquad u(2, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 2\operatorname{sen}(\pi x/2) - \operatorname{sen} \pi x + 4 \operatorname{sen} 2\pi x, \qquad 0 \le x \le 2.$$

6. Aplique la ecuación (8) para determinar las unidades físicas de la constante de separación σ.

En cada uno de los problemas 7 a 12, determine si es posible aplicar el método de separación de variables para reemplazar la ecuación diferencial parcial dada por un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. En caso afirmativo, encuentre las ecuaciones.

7. $xu_{xx} + u_t = 0$
8. $tu_{xx} + xu_t = 0$
9. $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$
10. $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$
11. $u_{xx} + (x + y)u_{yy} = 0$
12. $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$

13. En este problema se describe una demostración de que los eigenvalores del problema con valores en la frontera (9), (12) y (13) son reales.
    a) Escriba la solución de la ecuación (9) como $X(x) = k_1 \exp(i\lambda x) + k_2 \exp(-i\lambda x)$, en donde $\sigma = \lambda^2$, e imponga las condiciones en la frontera (12) y (13). Demuestre que existen soluciones no triviales si y sólo si

$$\exp(-i\lambda l) - \exp(i\lambda l) = 0. \tag{i}$$

b) Haga $\lambda = \mu + iv$ y aplique la relación de Euler $\exp(i\mu l) = \cos(\mu l) + i\,\text{sen}(\mu l)$ para determinar las partes real e imaginaria de la ecuación (i).
c) Considere las ecuaciones halladas en b) para demostrar que $v = 0$; de donde, λ es real y también lo es σ. Demuestre también que $\mu = n\pi/l$.

14. Al resolver ecuaciones diferenciales, los cálculos casi siempre pueden simplificarse mediante el uso de *variables adimensionales*. Demuestre que si se introduce la variable adimensional ξ definida por $\xi = x/l$, entonces la ecuación de conducción del calor queda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{l^2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad t > 0.$$

Dado que l^2/α^2 tiene unidades de tiempo, es conveniente usar esta cantidad para definir una variable adimensional del tiempo $\tau = (\alpha^2/l^2)t$. A continuación, demuestre que la ecuación de conducción del calor se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0.$$

15. Considere la ecuación

$$au_{xx} - bu_t + cu = 0 \tag{i}$$

en donde a, b y c son constantes.
a) Llega $u(x, t) = e^{\delta t} w(x, t)$, en donde δ es una constante y halle la ecuación diferencial parcial correspondiente para w.
b) Si $b \neq 0$, demuestre que puede elegirse δ de modo que la ecuación diferencial parcial hallada en el inciso a) no tenga término en w. De este modo, por medio de un cambio de variable dependiente, es posible reducir la ecuación (i) a la ecuación de conducción del calor.

*16. La ecuación de conducción del calor en dos dimensiones espaciales es

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$

Si se supone que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, encuentre ecuaciones diferenciales ordinarias que sean satisfechas por $X(x)$, $Y(y)$ y $T(t)$.

*17. La ecuación de conducción del calor en dos dimensiones espaciales puede expresarse en términos de coordenadas polares como

$$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta}] = u_t.$$

Si se supone que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encuentre ecuaciones diferenciales ordinarias que sean satisfechas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ y $T(t)$.

10.2 Series de Fourier

En la última sección se mostró cómo resolver el problema fundamental con condiciones en la frontera de conducción del calor en el supuesto de que es posible expresar una función

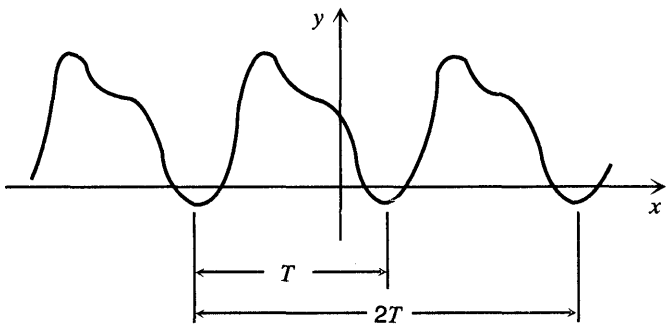


FIGURA 10.2.1 Función periódica.

dada definida en $0 \leq x \leq l$, como una serie de senos $\sum b_m \operatorname{sen}(m\pi x/l)$. A continuación se comienza a considerar una serie algo más general de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \right). \tag{1}$$

En el conjunto de puntos donde converge la serie (1), define una función f, cuyo valor en cada punto es la suma de la serie para ese valor de x. En este caso, se dice que la serie (1) es la **serie de Fourier**[2] para f. Los objetivos inmediatos son determinar qué funciones pueden representarse como una suma de una serie de Fourier y encontrar algunos medios para calcular los coeficientes de la serie. De paso, conviene hacer notar que el primer término de la serie (1) se escribe como $a_0/2$, en vez de como a_0, para simplificar una fórmula de los coeficientes que se deducirá más adelante. Además de su asociación con el método de separación de variables, las series de Fourier también son útiles en otras maneras, como en el análisis de sistemas mecánicos o eléctricos sobre los que actúan fuerzas externas periódicas.

Periodicidad de las funciones seno y coseno. Para analizar las series de Fourier es necesario desarrollar ciertas propiedades de las funciones trigonométricas sen $(m\pi x/l)$ y cos $(m\pi x/l)$, en donde m es un entero positivo. La primera es su carácter periódico. Se dice que una función es **periódica** con periodo $T > 0$ si el dominio de f contiene a $x + T$ siempre que contenga a x y si

$$f(x + T) = f(x) \tag{2}$$

[2] Las series de Fourier recibieron su nombre en honor de Joseph Fourier, quien las aplicó sistemáticamente por primera vez, aunque sin una investigación completamente rigurosa, en 1807 y en 1811 en sus artículos sobre conducción del calor. Según Riemann, cuando Fourier presentó su primer documento a la Academia de París en 1807, expresando que una función por completo arbitraria podía expresarse como una serie de la forma (1), el matemático Lagrange se sorprendió tanto que negó la posibilidad en los términos más contundentes. Aunque resultó que la afirmación de Fourier de completa generalidad era demasiado fuerte, sus resultados inspiraron un abundante caudal de investigación importante que ha continuado hasta la actualidad. Véase la obra de Grattan-Guinness o la de Carslaw [Introducción Histórica] para una historia detallada de las series de Fourier.

para todo valor de x. En la figura 10.2.1 se muestra un ejemplo de una función periódica. De la definición se sigue de inmediato que si T es un periodo de f, entonces $2T$ también es un periodo, como de hecho lo es cualquier múltiplo entero de T.

El valor más pequeño de T para el cual se cumple la ecuación (2) se llama **periodo fundamental** de f. En este sentido se debe observar que una constante puede concebirse como una función periódica de periodo arbitrario, pero no con periodo fundamental. Para cualquier función periódica no constante, el periodo fundamental se define de manera única y todos los demás periodos son múltiplos de éste.

Si f y g son dos funciones periódicas cualesquiera con periodo común T, entonces su producto fg y cualquier combinación lineal $c_1 f + c_2 g$ también son periódicas con periodo T. Para demostrar la última proposición, sea $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$; entonces, para cualquier x,

$$F(x + T) = c_1 f(x + T) + c_2 g(x + T) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = F(x). \tag{3}$$

Es más, se puede demostrar que la suma de cualquier número finito, o incluso la suma de una serie infinita converge, de funciones de periodo T también es periódica con periodo T.

En particular, las funciones $\operatorname{sen}(m\pi x/l)$ y $\cos(m\pi x/l)$, $m = 1,2,3, \ldots$, son periódicas con periodo fundamental $T = 2l/m$. Para ver esto, recuérdese que sen x y cos x tienen periodo fundamental 2π y que sen αx y cos αx tienen periodo fundamental $2\pi/\alpha$. Si se elige $\lambda = m\pi/l$, entonces el periodo T de sen $(m\pi x/l)$ y $\cos(m\pi x/l)$ se expresa por $T = 2\pi l/m\pi = 2l/m$.

Nótese también que, como todo múltiplo entero positivo de un periodo también es un periodo, cada una de las funciones $\operatorname{sen}(m\pi x/l)$ y $\cos(m\pi x/l)$ tiene el periodo común $2l$.

Ortogonalidad de las funciones seno y coseno. Para describir una segunda propiedad esencial de las funciones $\operatorname{sen}(m\pi x/l)$ y $\cos(m\pi x/l)$ se generalizará el concepto de ortogonalidad de vectores (ver la sección 7.2). El **producto interno** estándar (u, v) de dos funciones u y v de valores reales sobre el intervalo $\alpha \le x \le \beta$ se define por

$$(u, v) = \int_\alpha^\beta u(x)v(x)\, dx. \tag{4}$$

Se dice que las funciones u y v son **ortogonales** sobre $\alpha \le x \le \beta$ si su producto interno es cero; es decir, si

$$\int_\alpha^\beta u(x)v(x)\, dx = 0. \tag{5}$$

Se dice que un conjunto de funciones es **mutuamente ortogonal** si cada pareja distinta de funciones en el conjunto es ortogonal.

Las funciones $\operatorname{sen}(m\pi x/l)$ y $\cos(m\pi x/l)$, $m = 1,2, \ldots$, forman un conjunto de funciones mutuamente ortogonales sobre el intervalo $-l \le x \le l$. De hecho, satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ l, & m = n; \end{cases} \tag{6}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, dx = 0, \qquad \text{todo } m, n; \tag{7}$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ l, & m = n. \end{cases} \tag{8}$$

Se pueden obtener estos resultados por integración directa. Por ejemplo, para deducir la ecuación (8), nótese que

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{l}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}[(m-n)\pi x/l]}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}[(m+n)\pi x/l]}{m+n}\right\}\Bigg|_{-l}^{l} \\ &= 0, \end{aligned}$$

en tanto que $m+n$ y $m-n$ no sean cero. En virtud de que m y n son positivos, $m+n \neq 0$. Por otra parte, si $m-n=0$, entonces $m=n$ y la integral debe evaluarse de otra manera. En este caso,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx &= \int_{-l}^{l}\left(\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[1 - \cos\frac{2m\pi x}{l}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\operatorname{sen}(2m\pi x/l)}{2m\pi/l}\right\}\Bigg|_{-l}^{l} \\ &= l. \end{aligned}$$

Esto establece la ecuación (8); las ecuaciones (6) y (7) pueden comprobarse mediante cálculos semejantes.

Fórmulas de Euler-Fourier. Supóngase ahora que una serie de la forma (1) converge y sea su suma $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\right). \tag{9}$$

Los coeficientes a_m y b_m pueden relacionarse con bastante sencillez con $f(x)$ como consecuencia de las condiciones de ortogonalidad (6), (7) y (8). Primero multiplíquese la ecuación (9) por $\cos(n\pi x/l)$, en donde n es un entero positivo *fijo* ($n > 0$) e intégrese con respecto a x desde $-l$ hasta l. En el supuesto de que la integración puede efectuarse legítimamente término a término,[3] se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx &+ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \end{aligned} \tag{10}$$

[3] Ésta no es una suposición trivial, ya que no todas las series convergentes con términos variables pueden integrarse de este modo. Sin embargo, para el caso especial de las series de Fourier, siempre se puede justificar la integración término a término.

Si se tiene presente que n es fijo mientras m varía en los enteros positivos, por las relaciones de ortogonalidad (6) y (7) se concluye que el único término que no se anula en el segundo miembro de la ecuación (10) es aquél para el que $m = n$ en la primera suma. De donde,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = la_n, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Para determinar a_0 se puede integrar la ecuación (9) desde $-l$ hasta l y se obtiene

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx$$
$$= la_0, \tag{12}$$

dado que todas las integrales en que aparecen funciones trigonométricas se anulan. Por tanto,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Al escribir como $a_0/2$ el término constante de la ecuación (9), es posible calcular todos los a_n a partir de la (13). En caso contrario, se tendría que usar una fórmula separada para a_0.

Es posible obtener una expresión semejante para los b_n si se multiplica la ecuación (9) por $\operatorname{sen}(n\pi x/l)$, se integra término a término desde $-l$ hasta l y se usan las relaciones de ortogonalidad (7) y (8); por tanto,

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Las ecuaciones (13) y (14) se conocen como fórmulas de Euler-Fourier para los coeficientes de una serie de Fourier. En consecuencia, si la serie (9) converge hacia $f(x)$ y si la serie puede integrarse término a término, entonces los coeficientes *deben quedar dados* por las ecuaciones (13) y (14).

Nótese que las ecuaciones (13) y (14) son fórmulas explícitas para los a_n y b_n en términos de f y que la determinación de cualquier coeficiente específico es independiente de todos los demás coeficientes. Por supuesto, la dificultad para evaluar las integrales de las ecuaciones (13) y (14) depende bastante de la función particular f de que se trate.

Nótese también que las fórmulas (13) y (14) sólo dependen de los valores de $f(x)$ en el intervalo $-l \le x \le l$. En virtud de que cada uno de los términos de la serie de Fourier (9) es periódico, con periodo $2l$, la serie converge para toda x siempre que converja en $-l \le x \le l$ y su suma también es una función periódica con periodo $2l$. De donde, $f(x)$ queda determinada para toda x por sus valores en el intervalo $-l \le x \le l$.

Es posible demostrar (ver el problema 11) que si g es periódica con periodo T, entonces toda integral de g sobre un intervalo de longitud T tiene el mismo valor. Si se aplica este resultado a las fórmulas de Euler–Fourier (13) y (14), se concluye que el intervalo de integración, $-l \le x \le l$, puede sustituirse, en caso de ser más conveniente, por cualquier otro intervalo de longitud $2l$.

Ejemplo 1 Supóngase que existe una serie de Fourier que converge a la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -l \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < l; \end{cases} \tag{15}$$

$$f(x + 2l) = f(x).$$

Determinar todos los coeficientes de esta serie de Fourier.

Esta función representa una onda triangular (ver la figura 10.2.2) y es periódica con periodo $2l$. Por tanto, la serie de Fourier es de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \right), \tag{16}$$

en donde los coeficientes se calculan a partir de las ecuaciones (13) y (14). Si sustituye $f(x)$ de (13), con $m = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{0} (-x)\, dx + \frac{1}{l} \int_{0}^{l} x\, dx \\ &= \frac{1}{l} \frac{l^2}{2} + \frac{1}{l} \frac{l^2}{2} = l. \end{aligned} \tag{17}$$

Para $m > 0$, la (13) da

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{0} (-x) \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx + \frac{1}{l} \int_{0}^{l} x \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx.$$

Estas integrales pueden evaluarse mediante la integración por partes, con el resultado de que

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{l} \left[-\frac{l}{m\pi} x \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} - \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{l} \right] \Bigg|_{-l}^{0} + \frac{1}{l} \left[\frac{l}{m\pi} x \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} + \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{l} \right] \Bigg|_{0}^{l} \\ &= \frac{1}{l} \left[-\left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 + \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi + \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi - \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \right] \\ &= \frac{2l}{(m\pi)^2} (\cos m\pi - 1), \qquad m = 1, 2, \ldots \\ &= \begin{cases} -4l/(m\pi)^2, & m \text{ impar}, \\ 0, & m \text{ par}. \end{cases} \end{aligned} \tag{18}$$

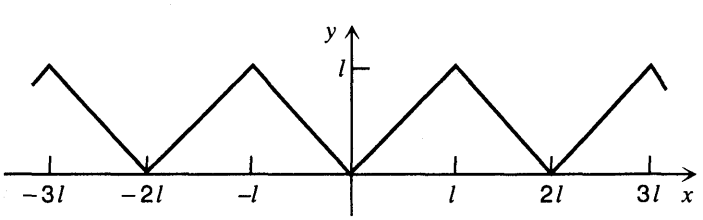


FIGURA 10.2.2 Onda triangular.

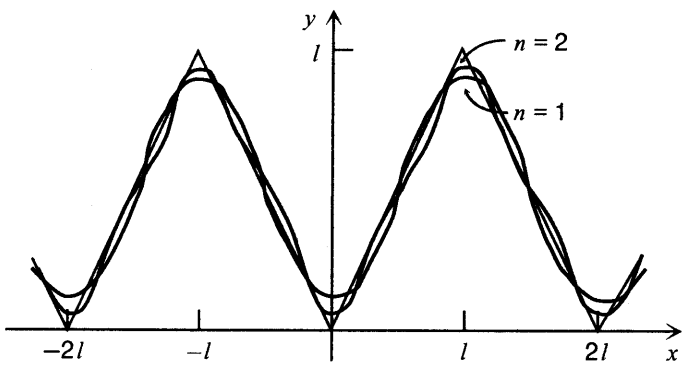


FIGURA 10.2.3 Sumas parciales de la serie de Fourier, ecuación (20), para la onda triangular.

Finalmente, por la ecuación (14) se concluye de manera semejante que

$$b_m = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Al sustituir los coeficientes de las ecuaciones (17), (18) y (19) en la serie (16), se obtiene la serie de Fourier para f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} + \cdots\right) \\ &= \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\cos(m\pi x/l)}{m^2} \\ &= \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/l}{(2n-1)^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

En la figura 10.2.3 se muestran las sumas parciales de la serie (20) correspondientes a $n = 1$ y $n = 2$. La serie converge bastante rápido, dado que los coeficientes disminuyen proporcionales a $(2n-1)^{-2}$, lo cual confirma la figura.

Ejemplo 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases} \tag{21}$$

y supóngase que $f(x + 6) = f(x)$; ver la figura 10.2.4. Encontrar los coeficientes de la serie de Fourier para f.

Como f tiene periodo 6, en este problema se concluye que $l = 3$. Por consiguiente, la serie de Fourier para f tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{3} + b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{3}\right), \tag{22}$$

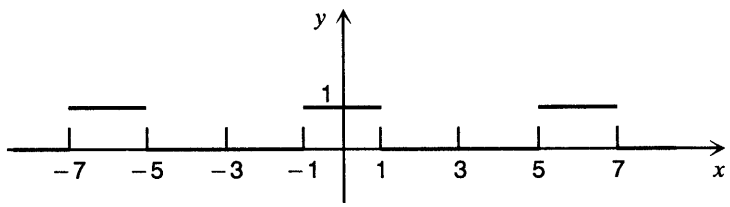


FIGURA 10.2.4 Gráfica de $f(x)$ del ejemplo 2.

en donde los coeficientes a_n y b_n se expresan por las ecuaciones (13) y (14) con $l = 3$. Se tiene

$$a_0 = \tfrac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \tfrac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \tfrac{2}{3}. \tag{23}$$

De manera semejante,

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

y

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Por tanto, la serie de Fourier para f es

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos(\pi x/3) + \frac{\cos(2\pi x/3)}{2} - \frac{\cos(4\pi x/3)}{4} - \frac{\cos(5\pi x/3)}{5} + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

En este texto, las series de Fourier aparecen principalmente como un medio para resolver ciertos problemas de las ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, estas series tienen una aplicación mucho más amplia en la ciencia y la ingeniería y, en general, son herramientas valiosas en la investigación de fenómenos periódicos. A menudo, el problema toma la forma de resolver una señal de entrada en sus componentes armónicas, lo que equivale a construir su representación en serie de Fourier. En algunos intervalos de frecuencia, los términos por separado corresponden a colores distintos o tonos audibles diferentes. La magnitud del coeficiente determina la amplitud de cada componente. Este proceso se menciona como análisis espectral.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 10, determine si la función dada es periódica. En caso afirmativo, encuentre su periodo fundamental.

1. $\operatorname{sen} \pi x/l$
2. $\cos 2\pi x$
3. $\operatorname{senh} 2x$
4. $\tan \pi x$
5. x^2
6. $\operatorname{sen} 5x$
7. $\operatorname{sen} mx$
8. e^x

9. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

10. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

11. Suponga que g es una función periódica integrable con periodo T.
    a) Si $0 \le a \le T$, demuestre que
    $$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$
    Sugerencia: demuestre primero que $\int_0^a g(x)\,dx = \int_T^{a+T} g(x)\,dx$. Considere el cambio de variable $s = x - T$ en la segunda integral.
    b) Demuestre que para cualquier valor de a, no necesariamente en $0 \le a \le T$,
    $$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$
    c) Demuestre que para valores cualesquiera de a y b,
    $$\int_a^{a+T} g(x)\,dx = \int_b^{b+T} g(x)\,dx.$$

12. Si f es diferenciable y es periódica con periodo T, demuestre que f' también es periódica con periodo T. Determine si
    $$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
    siempre es periódica.

13. Compruebe las ecuaciones (6) y (7) del texto por integración directa.

En cada uno de los problemas 14 a 23, halle la serie de Fourier correspondiente a la función dada.

14. $f(x) = -x, \quad -l \le x < l; \quad f(x+2l) = f(x)$

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -l \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < l; \end{cases} \quad f(x+2l) = f(x)$

16. $f(x) = \begin{cases} -l - x, & -l \le x < 0, \\ l - x, & 0 \le x < l; \end{cases} \quad f(x+2l) = f(x)$

17. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1; \quad f(x+2) = f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1; \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$

19. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2; \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$

20. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi; \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$

21. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1; \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$

22. $f(x) = \begin{cases} x + l, & -l \le x \le 0, \\ l, & 0 < x < l; \end{cases}$ $\quad f(x + 2l) = f(x)$

23. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 2; \end{cases}$ $\quad f(x + 4) = f(x)$

24. $f(x) = -x$ para $-l < x < l$ y $f(x + 2l) = f(x)$, encuentre una fórmula para $f(x)$ en el intervalo $l < x < 2l$, en el intervalo $-3l < x < -2l$.

25. Si $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$

y $f(x + 2) = f(x)$, encuentre una fórmula para $f(x)$ en el intervalo $1 < x < 2$; y en el intervalo $8 < x < 9$.

26. Si $f(x) = l - x$ para $0 < x < 2l$ y $f(x + 2l) = f(x)$, halle una fórmula para $f(x)$ en el intervalo $-l < x < 0$.

27. Si $f(x) = \begin{cases} 1, & -l \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < l, \end{cases}$

y $f(x + 2l) = f(x)$, halle los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente a f al integrar sobre el intervalo $0 \le x \le 2l$. Compare el resultado con el del problema 15.

28. Si $f(x) = x$ para $-1 \le x < 1$ y $f(x + 2) = f(x)$, halle los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente a f al integrar sobre el intervalo $0 \le x \le 2$. Compare el resultado con el del problema 17.

*29. En este problema se indican ciertas semejanzas entre los vectores geométricos tridimensionales y las series de Fourier.

a) Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ un conjunto de vectores mutuamente ortogonales en tres dimensiones y $\mathbf{u}$ cualquier vector tridimensional. Demuestre que

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \tag{i}$$

en donde

$$a_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{ii}$$

Demuestre que a_i puede interpretarse como la proyección de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}_i$, dividida entre la longitud de $\mathbf{v}_i$.

b) Defina el producto interno (u, v) por

$$(u, v) = \int_{-l}^{l} u(x)v(x)\,dx. \tag{iii}$$

Haga también

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \cos(n\pi x/l), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ \psi_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x/l), \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{iv}$$

Demuestre que la ecuación (10) puede escribirse en la forma

$$(f, \phi_n) = \frac{a_0}{2}(\phi_0, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\phi_m, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\psi_m, \phi_n). \tag{v}$$

c) Use la ecuación (v) y las relaciones de ortogonalidad para demostrar que

$$a_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad b_n = \frac{(f, \psi_n)}{(\psi_n, \psi_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{vi}$$

Observe la semejanza entre las ecuaciones (vi) y la (ii). Las funciones ϕ_n y ψ_n intervienen en las funciones como los vectores ortogonales $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ en el espacio tridimensional. Los coeficientes de a_n y b_n pueden interpretarse como proyecciones de la función f sobre las funciones base ϕ_n y ψ_n.

Observe también que cualquier vector en tres dimensiones puede expresarse como una combinación lineal de tres vectores mutuamente ortogonales. De manera semejante, cualquier función suficientemente suave definida sobre $-l \leq x \leq l$ puede expresarse como una combinación lineal de las funciones mutuamente ortogonales $\cos(n\pi x/l)$ y $\operatorname{sen}(n\pi x/l)$, es decir como una serie de Fourier. En general, para este fin se requieren una infinidad de cosenos y senos. Quizá esto no sea sorprendente en vista de la gran variedad de funciones definidas sobre $-l \leq x \leq l$. Lo que sí puede sorprender (y así fue para Langrange y otros) es que solamente se necesiten senos y cosenos.

10.3 Teorema de Fourier

En la última sección se demostró que si la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \right) \tag{1}$$

converge y, en consecuencia, define una función f, entonces f es periódica con periodo $2l$ y los coeficientes a_m y b_m están relacionados con $f(x)$ por medio de las fórmulas de Euler-Fourier:

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l}\, dx, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

En esta sección se adoptará un punto de vista algo diferente. Supóngase que se da una función f. Si esta función es periódica con periodo $2l$ integrable sobre el intervalo $[-l, l]$, entonces, a partir de las ecuaciones (2) y (3), es posible calcular un conjunto de coeficientes a_m y b_m y se puede construir formalmente una serie de la forma (1). La cuestión es si esta serie converge para cada valor de x y, en caso de hacerlo, si su suma es $f(x)$. Se han descubierto ejemplos que muestran que la serie de Fourier correspondiente a una función f puede no converger a $f(x)$, o incluso puede diverger. Las funciones cuya serie de Fourier no converge al valor de la función en puntos aislados son fáciles de construir y posteriormente se presentarán ejemplos en esta sección. Las funciones cuya serie de Fourier diverge en uno o más puntos son más "patológicas" y no se consideran en este libro.

A fin de garantizar la convergencia de una serie de Fourier a la función, con base en cual se calcularon sus coeficientes, es esencial para imponer condiciones adicionales sobre la función. Desde un punto de vista práctico, estas condiciones deben ser suficientemente amplias para cubrir todas las situaciones de interés y, no obstante, suficientemente sencillas para comprobarse con facilidad para funciones particulares. Con los años, se han ideado varios conjuntos de condiciones para lograr este fin.

Antes de enunciar un teorema de convergencia para las series de Fourier, se definirá un término que aparece en el teorema. Se dice que una función es sencillamente **continua** sobre un intervalo $a \leq x \leq b$, si se puede partir el intervalo mediante un número finito de puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de modo que

1. f sea continua en cada subintervalo abierto $x_{1-1} < x < x_1$.
2. f tienda a un límite finito a medida que, desde dentro de cada subintervalo se tiende hacia sus puntos extremos.

En la figura 10.3.1 se muestra la gráfica de una función sencillamente continua.

Se usa la notación $f(c+)$ para denotar el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ por la derecha; es decir,

$$f(c+) = \lim_{x \to c+} f(x).$$

De manera semejante, $f(c-) = \lim_{x \to c-} f(x)$ denota el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda.

Nótese que no es esencial que incluso la función esté definida en los puntos de partición x_1. Por ejemplo, en el siguiente teorema se supone que f' es seccionalmente continua; pero es evidente que f' no existe en aquellos puntos en los que la propia f es discontinua. Tampoco es esencial que el intervalo sea cerrado; también puede ser abierto o abierto en un extremo y cerrado en el otro.

Teorema 10.3.1

Supóngase que f y f' son sencillamente continuas sobre el intervalo $-l \leq x < l$. Además, supóngase que f está definida fuera del intervalo $-l \leq x < l$, de modo que es periódica con periodo $2l$. Entonces f tiene una serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \right), \tag{4}$$

cuyos coeficientes se expresan por las ecuaciones (2) y (3). La serie de Fourier converge a $f(x)$ en todos los puntos en los que f es continua y a $[f(x+) + f(x-)]/2$ en todos los puntos en los que f es discontinua.

Nótese que $[f(x+) + f(x-)]/2$ es el valor medio de los límites por la derecha y por la izquierda en el punto x. En cualquier punto en que f es continua, $f(x+) = f(x-) = f(x)$. Por tanto, es correcto afirmar que la serie de Fourier converge a $[f(x+) = f(x-)]/2$ en todos los puntos. Siempre que se dice que una serie de Fourier converge a una función f, siempre se quiere decir que converge en este sentido.

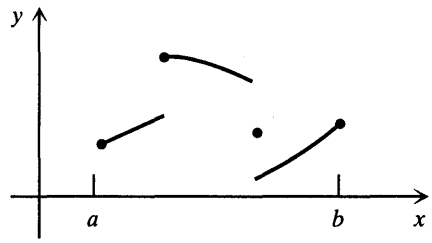


FIGURA 10.3.1 Función seccionalmente continua.

Es necesario destacar que las condiciones dadas en este teorema sólo son suficientes para la convergencia de una serie de Fourier; de ninguna manera son necesarias, como tampoco lo son las condiciones suficientes más generales que se han descubierto. A pesar de ello, la demostración del teorema es bastante difícil y no se da aquí.[4]

Para comprender mejor el contenido del teorema es útil considerar algunas clases de funciones que no satisfacen las condiciones supuestas. Las funciones que no están incluidas en el teorema son primordialmente aquéllas con infinitas discontinuidades en el intervalo $[-l, l]$, como $1/x^2$ cuando $x \to 0$, o $\ln |x - l|$ cuando $x \to l$. También se excluyen las funciones que tienen una infinidad de discontinuidades por salto en este intervalo; sin embargo, esas funciones rara vez se encuentran.

Es notable que una serie de Fourier pueda converger a una suma que no es diferenciable, o incluso continua, a pesar del hecho de que cada término de la serie (4) sea continuo e incluso diferenciable una infinidad de veces. El ejemplo que sigue es una ilustración de esto; así como el ejemplo 2 de la sección 10.2.

Ejemplo 1 Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x < 0, \\ l, & 0 < x < l, \end{cases} \tag{5}$$

Supóngase que f está definida fuera de este intervalo de modo que $f(x + 2l) = f(x)$ para toda x. Por el momento se dejará abierta la definición de f en los puntos $x = 0, \pm l$, excepto que sus valores deben ser finitos. Encontrar la serie de Fourier para esta función y determinar en dónde converge.

La ecuación $y = f(x)$ tiene la gráfica que se muestra en la figura 10.3.2, extendida hasta el infinito en las dos direcciones. Puede concebirse como si representara una onda cuadrada. El intervalo $[-l, l]$ se puede partir para dar los dos subintervalos abiertos $(-l, 0)$ y $(0, l)$. En $(0, l)$, $f(x) = l$ y $f'(x) = 0$. Resulta evidente que tanto f como f' son continuas y que además tienen límites cuando $x \to 0$ por la derecha y cuando $x \to l$ por la izquierda. La situación en $(-l, 0)$ es semejante. Como consecuencia, tanto f como f' son sencillamente continuas sobre $[-l, l)$, de modo que f satisface las condiciones del teorema 10.3.1. Si se calculan los coeficientes a_m y b_m a partir de las ecuaciones (2) y (3), queda asegurada la convergencia de la serie de Fourier resultante a $f(x)$, en todos los puntos en los que f es continua. Nótese que los valores de a_m y b_m

[4] En casi todos los libros sobre cálculo avanzado es posible encontrar demostraciones de la convergencia de una serie de Fourier. Ver, por ejemplo, Kaplan (capítulo 7) o Buck (capítulo 6).

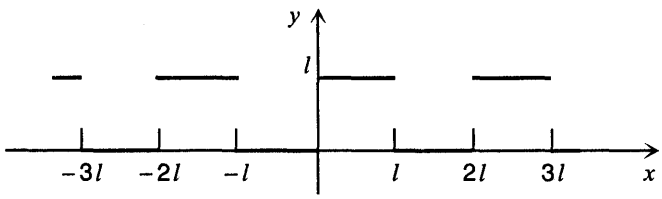


FIGURA 10.3.2 Onda cuadrada.

son los mismos sin importar la definición de f en sus puntos de discontinuidad. Esto es cierto debido a que el valor de una integral no es afectado al cambiar el valor del integrando en un número finito de puntos. Por la ecuación (2),

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_0^l dx = l;$$

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \int_0^l \cos\frac{m\pi x}{l}\,dx$$
$$= 0, \qquad m \neq 0.$$

De manera semejante, por la ecuación (3).

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx = \int_0^l \text{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{l}{m\pi}(1 - \cos m\pi)$$
$$= \begin{cases} 0, & m \text{ par.} \\ \dfrac{2l}{m\pi}, & m \text{ impar;} \end{cases}$$

De donde,

$$f(x) = \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi}\left(\text{sen}\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\,\text{sen}\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\,\text{sen}\frac{5\pi x}{l} + \cdots\right)$$
$$= \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\text{sen}(m\pi x/l)}{m}$$
$$= \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(2n-1)\pi x/l}{2n-1}. \tag{6}$$

En los puntos $x = 0, \pm nl$, en los que la función f del ejemplo no es continua, todos los términos de la serie después del primero se anulan y la suma es $l/2$. Este es el valor medio de los límites por la derecha y por la izquierda, como debe ser. Por tanto, también se podría definir f en estos puntos como que tienen el valor $l/2$. Si se elige definirla de otra manera, la serie todavía da el valor $l/2$ en estos puntos, ya que ninguno de los cálculos precedentes se altera en algún detalle; simplemente no converge a la función en esos puntos, a menos que f se defina como que tienen este valor. Esto ilustra la posibilidad de que la serie de Fourier correspondiente a una función

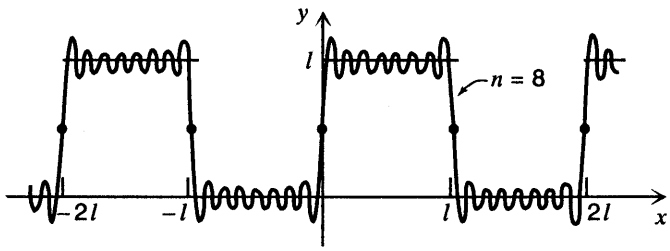


FIGURA 10.3.3 Una suma parcial de la serie de Fourier, ecuación (6), para la onda cuadrada.

puede no converger a ésta en los puntos de discontinuidad, a menos que la función se defina adecuadamente en esos puntos.

En la figura 10.3.3 se indica la manera en la que las sumas parciales

$$S_n(x) = \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

de la serie de Fourier (6) convergen a $f(x)$, en donde también se trazó la gráfica de $S_8(x)$. En la figura se muestra que en los puntos en que f es continua, las sumas parciales en realidad tienden a $f(x)$ cuando n crece. Sin embargo, en la vecindad de los puntos de discontinuidad, como $x = 0$ y $x = l$, las sumas parciales no convergen con suavidad al valor medio. En vez de ello, tienden a exceder la marca en cada extremo del salto, como si no pudieran ajustarse bien a la vuelta brusca requerida en este punto. Este comportamiento es típico de las series de Fourier en los puntos de discontinuidad y se conoce como fenómeno de Gibbs.[5]

En la figura 10.3.3 también se ilustra que la serie de este ejemplo converge con mayor lentitud que la del ejemplo 1 de la sección 10.2. Esto se debe al hecho de que los coeficientes de la serie (6) sólo son proporcionales a $1/(2n-1)$.

Problemas

Halle la serie de Fourier para cada una de las funciones de los problemas 1 a 8. Suponga que las funciones se extienden periódicamente afuera del intervalo original. Trace la gráfica de la función a la que converge cada serie, para varios periodos.

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \qquad -\pi \le x \le \pi$

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < s < 1 \\ 0, & s \le x < 2 - s \\ 1, & 2 - s \le x < 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} l + x, & -l \le x < 0 \\ l - x, & 0 \le x < l \end{cases}$

6. $f(x) = 1 - x^2, \qquad -1 \le x \le 1$

[5] El fenómeno de Gibbs debe su nombre a John Willard Gibbs (1839-1903), quien es más famoso por su trabajo en análisis vectorial y mecánica estadística. Gibbs fue profesor de física matemática en Yale y uno de los primeros científicos estadounidenses en alcanzar fama internacional. El fenómeno de Gibbs se analiza con más detalle en la obra de Guillemin (capítulo 7) y en la de Carlslaw (capítulo 9).

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

Términos periódicos de fuerza. En este capítulo el interés principal se centra en el empleo de las series de Fourier para resolver problemas con valores en la frontera, para ciertas ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, las series de Fourier también son útiles en muchas otras situaciones en las que ocurren fenómenos periódicos. En los problemas 9 a 12 se indica cómo se puede usar para resolver problemas con valor inicial con términos periódicos de fuerza.

9. Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

en donde n es un entero positivo y $\omega^2 \neq n^2$. ¿Qué sucede si $\omega^2 = n^2$?

10. Encuentre la solución formal del problema con valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

en donde $\omega > 0$ no es igual a un entero positivo. ¿De qué manera se altera la solución si $\omega = m$, en donde m es un entero positivo?

11. Encuentre la solución formal del problema con valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

en donde f es periódica con periodo 2π y

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi; \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

12. Encuentre la solución formal del problema con valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

en donde f es periódica con periodo 2 y

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t < 1; \\ -1 + t, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

13. Si se supone que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{i}$$

Demuestre formalmente que

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Esta relación entre una función f y sus coeficientes de Fourier se conoce como ecuación de Perseval (1755-1836). Esta ecuación es muy importante en la teoría de las series de Fourier y se analiza más en la sección 11.7.

Sugerencia: multiplique la ecuación (i) por $f(x)$, integre desde $-l$ hasta l y aplique las fórmulas de Euler-Fourier.

*14. a) Si f y f' son seccionalmente continuas sobre $-l \leq x < l$ y si f es periódica con periodo $2l$, demuestre que na_n y nb_n son acotados cuando $n \to \infty$.

Sugerencia: use la integración por partes.

b) Si f es continua sobre $-l \leq x \leq l$ y es periódica con periodo $2l$, y si f' y f'' son seccionalmente continuas sobre $-l \leq x \leq l$, demuestre que n^2a_n y n^2b_n son acotados cuando $n \to \infty$. Aplique este hecho para demostrar que la serie de Fourier para f converge en cada uno de los puntos de $-l \leq x \leq l$. ¿Por qué f debe ser continua sobre el intervalo *cerrado*?

Sugerencia: aplique nuevamente la integración por partes.

Aceleración de la convergencia. En el siguiente problema se muestra cómo algunas veces es posible mejorar la rapidez de la convergencia de una serie de Fourier o de otra serie infinita.

15. Suponga que se desea calcular valores de la función g, en donde

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{1+(2n-1)^2} \operatorname{sen}(2n-1)\pi x. \tag{i}$$

Es posible demostrar que esta serie converge, aunque con cierta lentitud. Sin embargo, observe que para n grande, los términos de la serie (i) son aproximadamente iguales a $[\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1)$ y que los últimos términos son semejantes a los del ejemplo del texto, ecuación (6).

a) Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1) = (\pi/2)[f(x) - \tfrac{1}{2}], \tag{ii}$$

en donde f es la onda cuadrada del ejemplo, con $l = 1$.

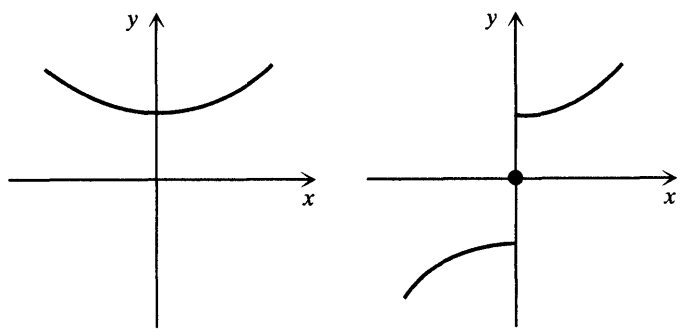
b) Reste la ecuación (ii) de la (i) y demuestre que

$$g(x) = \frac{\pi}{2}[f(x) - \tfrac{1}{2}] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{(2n-1)[1+(2n-1)^2]}. \tag{iii}$$

La serie (iii) converge mucho más rápido que la (i) y, por lo tanto, es una mejor manera de calcular valores de $g(x)$.

10.4 Funciones pares e impares

Antes de considerar más ejemplos de las series de Fourier es útil distinguir dos clases de funciones para las cuales es posible simplificar las fórmulas de Euler-Fourier. Estas son las funciones pares e impares, que se caracterizan geométricamente por la propiedad de simetría con respecto al eje y y el origen, respectivamente (ver la figura 10.4.1).



(a) (b)

FIGURA 10.4.1 Funciones a) par y b) impar.

Analíticamente, f es una **función par** si su dominio contiene el punto $-x$ siempre que contiene al punto x y si

$$f(-x) = f(x) \tag{1}$$

para cada x en el dominio de f. De manera semejante, f es una **función impar** si su dominio contiene a $-x$ siempre que contiene a x y si

$$f(-x) = -f(x) \tag{2}$$

para cada x en el dominio de f. Ejemplos de funciones pares son $1, x^2$, cos nx, $|x|$ y x^{2n}. Las funciones x, x^3, sen nx y x^{2n+1} son ejemplos de funciones impares. Nótese que según la ecuación (2), $f(0)$ debe ser cero si f es una función impar cuyo dominio contiene al origen. La mayor parte de las funciones no son pares ni impares; por ejemplo e^x, Sólo una función, f idénticamente cero, es a la vez par e impar.

Algunas de las propiedades elementales de las funciones pares e impares son las siguientes:

1. La suma (diferencia) y el producto (coeficiente) de dos funciones pares son pares.
2. La suma (diferencia) de dos funciones impares es impar; el producto (cociente) de dos funciones impares es par.
3. La suma (diferencia) de una función impar y una función par no es par ni impar; el producto (cociente) de dos funciones de estos tipos es impar.[6]

Las demostraciones de todas estas observaciones son sencillas y se deducen directamente de las definiciones. Por ejemplo, si tanto f_1 como f_2 son impares y si $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, entonces

$$\begin{aligned} g(-x) &= f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) \\ &= -[f_1(x) + f_2(x)] = -g(x), \end{aligned} \tag{3}$$

[6] En caso de que cualquiera de las funciones se anule idénticamente, puede ser necesario modificar estas proposiciones.

por lo que $f_1 + f_2$ también es una función impar. De manera análoga si $h(x) = f_1(x)f_2(x)$, entonces

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] = f_1(x)f_2(x) = h(x), \tag{4}$$

de modo que $f_1 f_2$ es par.

También son importantes las dos siguientes propiedades de las integrales de las funciones pares e impares:

4. Si f es una función par, entonces

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx. \tag{5}$$

5. Si f es una función impar, entonces

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0. \tag{6}$$

Estas propiedades son intuitivamente claras a partir de la interpretación de una integral en términos del área bajo una curva y también se deducen de inmediato a partir de las definiciones. Por ejemplo, si f es par, entonces

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Si se hace $x = -s$ en el primer término del segundo miembro y se aplica la ecuación (1) da

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = -\int_{l}^{0} f(s)\,ds + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

La demostración de la propiedad correspondiente para las funciones es semejante.

Las funciones pares e impares tienen una importancia especial en las aplicaciones de las series de Fourier, ya que sus series de Fourier tienen formas especiales, lo que ocurre con frecuencia en los problemas físicos.

Serie de cosenos. Supóngase que f y f' son seccionalmente continuas sobre $-l \leq x < l$ y que f es una función periódica par con periodo $2l$. Entonces, por las propiedades 1 y 3, se deduce que $f(x)\cos(n\pi x/l)$ es par y que $f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/l)$ es impar. Entonces, como consecuencia de las ecuaciones (5) y (6), los coeficientes de Fourier de f se expresan por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad && n = 0, 1, 2, \ldots; \\ b_n &= 0, && n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{7}$$

Por tanto, f tiene la serie de Fourier de f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

En otras palabras, la serie de Fourier de cualquier función par consta solamente de las funciones trigonométricas pares $\cos(n\pi x/l)$ y el término constante; es natural dar a esta

serie el nombre de **serie de cosenos de Fourier**. Desde un punto de vista de cálculo obsérvese que, a partir de la fórmula integral (7), sólo es necesario calcular los coeficientes a_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Cada uno de los b_n, para $n = 0,1,2, \ldots$, es automáticamente cero para cualquier función par, de modo que no es necesario calcularlos por integración.

Serie de senos. Supóngase que f y f' son seccionalmente continuas sobre $-l \leq x \leq l$, y que f es una función periódica impar de periodo $2l$. Entonces, por las propiedades 2 y 3 se concluye que $f(x)\cos(n\pi x/l)$ es impar y que $f(x)\,\text{sen}(n\pi x/l)$ es par. En este caso, los coeficientes de Fourier de f son

$$\begin{aligned} a_n &= 0, & n &= 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, & n &= 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

y la serie de Fourier para f es de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Por tanto, la serie de Fourier para cualquier función impar consta solamente de las funciones trigonométricas impares $\text{sen}(n\pi x/l)$; a esta serie se le llama **serie de senos de Fourier**. Una vez más, obsérvese que sólo es necesario calcular por integración la mitad de los coeficientes, ya que cada a_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, es cero para cualquier función impar.

Ejemplo 1

Sean $f(x) = x$, $-l < x < l$ y $f(-l) = f(l) = 0$. Supóngase que f está definida en todas partes, de modo que es periódica con periodo $2l$ (ver la figura 10.4.2). La función así definida se conoce como onda diente de sierra. Encontrar la serie de Fourier para esta función.

En virtud de que f es una función impar, según la ecuación (8) sus coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l x\,\text{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ &= \frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\left\{\text{sen}\frac{n\pi x}{l} - \frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right\}\Bigg|_0^l \\ &= \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

De donde, la serie de Fourier para f, la onda diente de sierra, es

$$f(x) = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}\frac{n\pi x}{l}. \tag{9}$$

Obsérvese que la función periódica f es discontinua en los puntos $\pm l, \pm 3l, \ldots$, como se muestra en la figura 10.4.2. En estos puntos, la serie(9) converge al valor medio de los límites por la izquierda y por la derecha; a saber, cero. La suma parcial de la serie (9), para $n = 9$ se muestra en

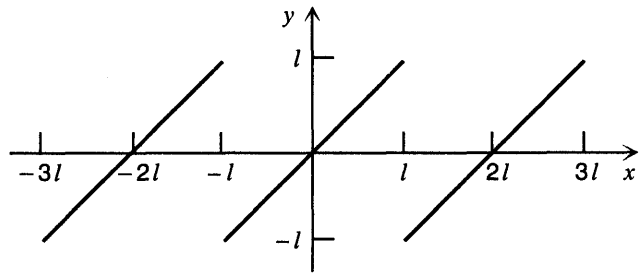


FIGURA 10.4.2 Onda diente de sierra.

la figura 10.4.3. El fenómeno de Gibbs (mencionado en la sección 10.3) ocurre nuevamente cerca de los puntos de discontinuidad.

Nótese que en este ejemplo $f(-l) = f(l) = 0$, así como $f(0) = 0$. Esto se requiere si la función f ha de ser tanto impar como periódica, con periodo $2l$. Cuando se habla de construir una serie de senos para una función definida sobre $0 \leq x \leq l$, se entiende que, en caso de ser necesario, se debe redefinir primero la función como cero en $x = 0$ y $x = l$.

Vale la pena observar que la función de onda triangular (ejemplo 1 de la sección 10.2) y la función de onda diente de sierra que acaba de considerarse son idénticas sobre el intervalo $0 \leq x < l$. Por consiguiente, su serie de Fourier converge a la misma función, $f(x) = x$, sobre este intervalo. Por tanto, si se requiere representar la función $f(x) = x$ sobre $0 \leq x < l$ por una serie de Fourier, es posible lograrlo *mediante una serie de cosenos, o bien, mediante una serie del senos*. En el primer caso, f se extiende como una función *par* hacia el intervalo $-l < x < 0$ y en las demás partes periódicamente (la onda triangular). En el segundo caso, f se extiende hacia $-l < x < 0$ como una función *impar*, y periódicamente en todas partes (la onda diente de sierra). Si f se extiende de cualquier otro modo la serie de Fourier resultante todavía converge a x en $0 \leq x < l$, pero comprenderá tanto términos seno como coseno.

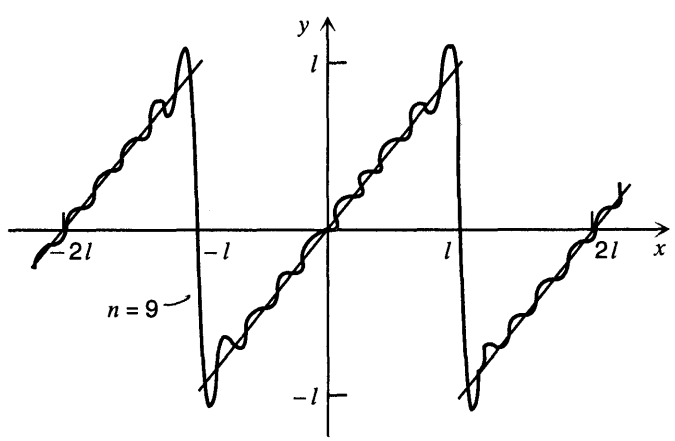


FIGURA 10.4.3 Una suma parcial de la serie de Fourier, ecuación (9), para la onda diente de sierra.

Al resolver problemas en ecuaciones diferenciales, a menudo es útil desarrollar en serie de Fourier una función f originalmente definida sólo en el intervalo $[0.\ l]$. Como ya se indicó para la función $f(x) = x$, existen varias posibilidades. Explícitamente, es posible:

1. Definir una función g de periodo $2l$ de modo que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le l, \\ f(-x), & -l < x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

   De este modo, la función g es la extensión periódica par de f. Su serie de Fourier, que es una serie de cosenos, representa a f sobre $[0.\ l]$.
2. Definir una función h de periodo $2l$ de modo que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l, \\ 0, & x = 0, l, \\ -f(-x), & -l < x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

   De este modo, la función h es la extensión periódica impar de f. Su serie de Fourier, que es una serie de senos, representa a f sobre $(0, l)$.
3. Definir una función k de periodo $2l$ de modo que

$$k(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{12}$$

   y hacer que $k(x)$ esté definida para $(-l, 0)$ de cualquier manera coherente con las condiciones del teorema 10.3.1. Algunas veces es conveniente definir $k(x)$ como cero para $-l < x < 0$. La serie de Fourier para k, que comprende tanto términos seno como coseno, también representa a f sobre $[0, l]$ sin importar la manera en la que se defina $k(x)$ en $(-l, 0)$. Por tanto, existen una infinidad de esas series, todas las cuales convergen a $f(x)$ en el intervalo original.

Por lo común, la forma del desarrollo a utilizar estará dictada (o por lo menos sugerida) por la finalidad para la que se necesita. Sin embargo, si se cuenta con una elección para aplicar del tipo de las series de Fourier, la selección algunas veces puede basarse en la rapidez de convergencia. Por ejemplo, la serie de cosenos para la onda triangular (ecuación (20) de la sección 10.2) converge con mayor rapidez que la serie de senos para la onda diente de sierra (ecuación (9) de la sección 10.4), aunque las dos convergen a la misma función para $0 \le x < l$. Esto se debe al echo de que la onda triangular es una función más suave que la de diente de sierra y, por lo tanto, es más fácil de aproximar. En general, mientras más derivadas continuas tenga una función sobre todo el intervalo $-\infty < x < \infty$, más rápido convergerá su serie de Fourier. Ver el problema 14 de la sección 10.3.

Ejemplo 2 Supóngase que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases} \tag{13}$$

Como ya se indicó, es posible representar f por una serie de cosenos o una serie de senos. Trazar la gráfica de la suma de cada una de estas series para $-6 \le x \le 6$.

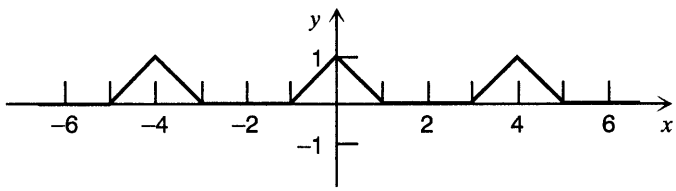


FIGURA 10.4.4 Extensión periódica par de $f(x)$ dada por la ecuación (13).

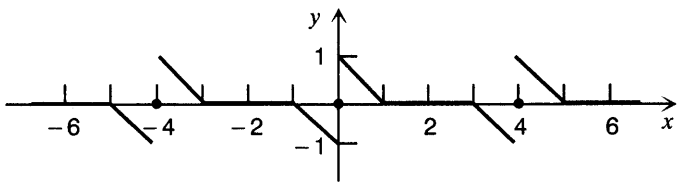


FIGURA 10.4.5 Extensión periódica impar de $f(x)$ dada por la ecuación (13).

En este ejemplo $l = 2$, por lo que la serie de cosenos para f converge a la extensión periódica par de f de periodo 4, cuya gráfica se muestra en la figura 10.4.4.

De manera semejante, la serie de senos para f converge a la extensión periódica impar de f de periodo 4. La gráfica de esta función se da en la figura 10.4.5.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 12, determine si la función dada es par, impar o de ninguno de los dos tipos.

1. x^3
2. $x^3 - 2x$
3. $x^3 - 2x + 1$
4. $\tan 2x$
5. $\sec x$
6. $|x|^3$
7. e^{-x}
8. $\ln|\operatorname{sen} x|$
9. $\ln|\cos x|$
10. $(2x - x^3)^4$
11. La función del problema 9, sección 10.2.
12. La función del problema 10, sección 10.2.

En cada uno de los problemas 13 a 18 aplique las propiedades de las funciones pares e impares para evaluar la integral dada.

13. $\int_{-1}^{1} x\,dx$
14. $\int_{-1}^{1} x^4\,dx$
15. $\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx$
16. $\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$
17. $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \operatorname{sen} nx\,dx$
18. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,dx$

19. Demuestre que cualquier función puede expresarse como la suma de otras dos funciones, una que es par y la otra impar. Es decir, para cualquier función f, cuyo dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x, demuestre que existen una función par g y una función impar h tales que $f(x) = g(x) + h(x)$.
Sugerencia: Si se supone que $f(x) = g(x) + h(x)$, ¿cuál es $f(-x)$?

20. Encuentre los coeficientes de las series de cosenos y de senos descritas en el ejemplo 2.

En cada uno de los problemas 21 a 30 determine la serie de Fourier requerida para la función que se da; trace la gráfica de la función a la que la serie converge sobre tres periodos.

21. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2; \end{cases}$ serie de cosenos, periodo 4.

Compare con el ejemplo 1 y los problemas 4 y 7 de la sección 10.3.

22. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2; \end{cases}$ serie de senos, periodo 4.

23. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le \pi;$ serie de cosenos, periodo 2π.

24. $f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi;$ serie de senos, periodo 2π.

25. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi, \\ 2, & 2\pi < x < 3\pi. \end{cases}$ serie de senos, periodo 6π.

26. $f(x) = x, \quad 0 \le x < 1;$ serie de periodo 1.

27. $f(x) = l - x, \quad 0 \le x \le l;$ serie de cosenos, periodo $2l$.
Compare con el ejemplo 1 de la sección 10.2.

28. $f(x) = l - x, \quad 0 < x < l;$ serie de senos, periodo $2l$.

29. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi; \end{cases}$ serie de cosenos, periodo 4π.

30. $f(x) = -x, \quad -\pi < x < 0;$ serie de senos, periodo 2π.

31. Demuestre que si f es una función impar, entonces

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0.$$

32. Demuestre las propiedades 2 y 3 de las funciones pares e impares, según se enunciaran en el texto.

33. Demuestre que la derivada de una función para es impar y que la derivada de una función impar es par.

34. Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Demuestre que si f es par, entonces F es impar, y que si f es impar, entonces F es par.

35. Con base en la serie de Fourier para la onda cuadrada del ejemplo 1 de la sección 10.3, demuestre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Esta relación entre π y los enteros positivos impares fue descubierta por Leibniz en 1673. Calcule un valor aproximado de π al utilizar los cuatro primeros términos de esta serie.

36. a) A partir de la serie de Fourier para la onda triangular (ejemplo 1 de la sección 10.2), demuestre que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

b) Calcule un valor aproximado de π al utilizar los cuatro primeros términos de la serie del inciso a).

37. Suponga que f tiene una serie de senos de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/l)$$

para $0 \leq x \leq l$.

a) Demuestre formalmente que

$$\frac{2}{l}\int_0^l [f(x)]^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Compare este resultado con el del problema 13 de la sección 10.3. ¿Cuál es el resultado correspondiente si f tiene una serie de cosenos?

b) Aplique el resultado del inciso a) a la serie de la onda diente de sierra dada en la ecuación (9) y, de este modo, demuestre que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Series especiales de Fourier. Sea f una función originalmente definida sobre $0 \leq x \leq l$. En esta sección se ha demostrado que es posible representar a f por una serie de senos o una de cosenos, al construir extensiones periódicas impar o par de f, respectivamente. Los problemas 38 a 40 se refieren a otras series especializadas de Fourier que convergen a la función f dada sobre $(0, l)$.

38. Suponga que f se extiende hacia $(l, 2l]$ de manera arbitraria. A continuación extienda la función resultante hacia $(-2l, 0)$ como una función impar y en todas partes como una función periódica con periodo $4l$ (ver la figura 10.4.6). Demuestre que esta función tiene una serie de senos de Fourier en términos de las funciones $\operatorname{sen}(n\pi x/2l)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/2l),$$

en donde

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/2l)\, dx.$$

Esta serie converge a la función original sobre $(0, l)$.

39. Suponga que f se extiende primero hacia $(l, 2l]$, de modo que sea simétrica con respecto a $x = l$; es decir, de modo que satisfaga $f(2l - x) = f(x)$ para $0 \leq x \leq l$. Suponga que la función resultante se extendiende hacia $(-2l, 0)$ como función impar y en todas partes (ver la figura 10.4.7) como una función periódica con periodo $4l$. Demuestre que esta función tiene una serie de Fourier en términos de las funciones $\operatorname{sen}(\pi x/2l)$, $\operatorname{sen}(3\pi x/2l)$, $\operatorname{sen}(5\pi x/2l), \ldots$; es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\,\pi x}{2l},$$

en donde

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\, dx.$$

Esta serie converge a la función original sobre $(0, l]$.

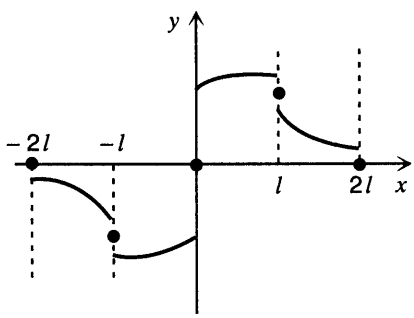


FIGURA 10.4.6 Gráfica de la función del problema 38.

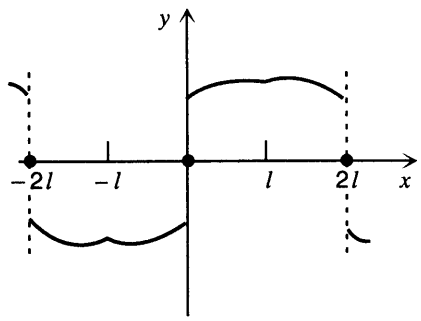


FIGURA 10.4.7 Gráfica de la función del problema 39.

40. ¿Cómo se debe extender f, originalmente definida sobre $[0, l]$, de modo que se obtenga una serie de Fourier que comprenda las funciones $\cos(\pi x/2l)$, $\cos(3\pi x/2l)$, $\cos(5\pi x/2l)$, ...? Consulte los problemas 38 y 39. Si $f(x) = x$ para $0 \le x \le l$, trace la gráfica de la función hacia la cual converge la serie de Fourier para $-4l \le x \le 4l$.

10.5 Solución de otros problemas de conducción del calor

En la sección 10.1 se consideró el problema que consta de la ecuación de conducción del calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \tag{1}$$

las condiciones en la frontera

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Se encontró que la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

en donde los coeficientes b_n son los mismos que los de la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \tag{5}$$

La serie de la ecuación (5) es precisamente la serie de senos de Fourier para f; según lo visto en la sección 10.4, sus coeficientes están dados por

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6}$$

De donde, la solución del problema de conducción del calor, ecuaciones (1) a (3), se expresa por la serie de la ecuación (4), con los coeficientes calculados a partir de (6).

Ejemplo

Encontrar la temperatura $u(x, t)$ en cualquier instante en una varilla metálica de una unidad de longitud, aislada en los lados, la que inicialmente tiene una temperatura uniforme de 10°C en toda su extensión y cuyos extremos se mantienen a 0°C para toda $t > 0$.

La temperatura en la varilla satisface el problema de conducción del calor (1), (2), (3), con $l = 1$ y $f(x) = 10$ para $0 < x < l$. De este modo, por la ecuación (4), la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}\,\text{sen}\,n\pi x \tag{7}$$

en donde, por la (6),

$$\begin{aligned} b_n &= 20\int_0^1 \text{sen}\,n\pi x\,dx \\ &= \frac{20}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} 40/n\pi, & n \text{ impar;} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

Por último, si se sustituyen los b_n de la ecuación (7), se obtiene

$$u(x, t) = \frac{40}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}\,\text{sen}\,n\pi x. \tag{9}$$

La expresión (9) para la temperatura es moderadamente complicada, pero el comportamiento de la solución puede observase con facilidad a partir de las gráficas de las figuras 10.5.1 y 10.5.2, en donde, por conveniencia, se ha elegido $\alpha^2 = 1$. En la figura 10.5.1 se muestra la distribución de temperaturas en la barra en diferentes instantes. Obsérvese que la temperatura

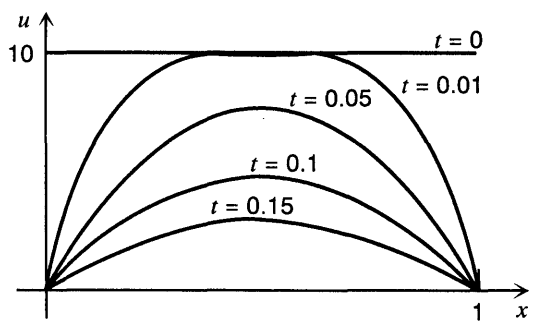


FIGURA 10.5.1 Distribuciones de temperaturas en varios instantes para el problema de conducción del calor del ejemplo 1.

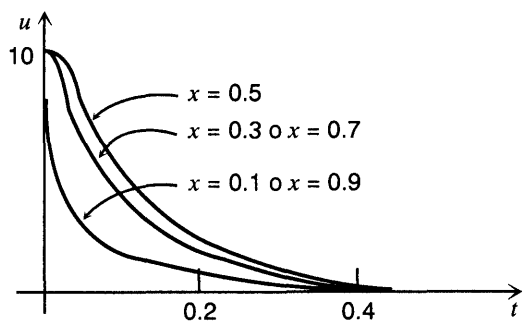


FIGURA 10.5.2 Dependencia de la temperatura con respecto al tiempo en varias ubicaciones para el problema de conducción del calor del ejemplo 1.

disminuye de manera paulatina a medida que se pierde el calor de la varilla por los extremos. La forma en la que la temperatura decae en un punto dado de la barra se indica en la figura 10.5.2, en donde se ha trazado la gráfica de la temperatura contra el tiempo, para unos cuantos puntos seleccionados de la varilla.

El factor exponencial negativo en cada término de la solución en series (9) hace que la serie converja con bastante rapidez, excepto para valores muy pequeños de t o de α^2. Por ejemplo, ninguna de las gráficas de la figura 10.5.1 requiere la utilización de más de cuatro términos de la serie (9). Si se calculan términos adicionales, las gráficas resultantes son indistinguibles.

Conviene hacer notar que, en esta etapa, la solución (4) debe considerarse como una solución *formal*: es decir, se obtuvo sin justificación rigurosa de los procesos de tomar el límite que intervinieron. Esta justificación rebasa lo que cubre este libro. Sin embargo, una vez que se obtiene la serie (4), es posible demostrar que, en $0 < x < l$, $t > 0$, converge a una función continua, que se pueden calcular las derivadas u_{xx} y u_t al derivar la serie (4) término a término y que, de hecho, se satisface, la ecuación del calor (1). El argumento se apoya en gran parte en el hecho de que cada término de la serie (4) contiene un factor exponencial negativo y esto da por resultado una convergencia relativamente rápida de la serie. Un argumento adicional establece que la función u expresada por la ecuación (4) también satisface las condiciones en la frontera y las iniciales; con esto se completa la justificación de la solución formal.

Es interesante hacer notar que aunque f debe satisfacer las condiciones del teorema de Fourier de la convergencia (sección 10.3), puede tener puntos discontinuidad. En este caso, la distribución inicial de temperaturas $u(x, 0) = f(x)$ es discontinua en uno o más puntos. A pesar de ello, la solución $u(x, t)$ es continua para valores arbitrariamente pequeños de $t > 0$. Esto ilustra el hecho de que la conducción del calor es un proceso difusivo que de modo instantáneo suaviza culesquiera discontinuidades que pudieran estar presentes en la distribución inicial de temperaturas. Finalmente, dado que f es acotada, por la ecuación (6) se concluye que los coeficientes b_n también son acotados. Como consecuencia, la presencia del factor exponencial negativo en cada término de la serie (4) garantiza que

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = 0 \tag{10}$$

para toda x, sin importar la condición inicial. Esto concuerda con el resultado esperado a partir de la intuición física.

A continuación se considerarán otros dos problemas de conducción unidimensional del calor, que es posible manejar con el método desarrollado en la sección 10.1.

Condiciones no homogéneas en la frontera. Supóngase ahora que uno de los extremos de la barra se mantiene a una temperatura constante T_1 y que el otro se mantiene a una temperatura constante T_2; entonces, las condiciones en la frontera son

$$u(0, t) = T_1, \qquad u(l, t) = T_2, \qquad t > 0. \tag{11}$$

La ecuación diferencial (1) y la condición inicial (3) permanecen sin cambio.

Este problema es algo más difícil, en virtud de las condiciones no homogéneas en la frontera, que el de la sección 10.1. Sin embargo, si se hacen modificaciones adecuadas, el problema se puede resolver directamente por el método de separación de variables. En particular, la solución correspondiente al valor cero de la constante de separación (ecua-

ción (14) de la sección 10.1) debe retenerse y usarse para satisfacer las condiciones en la frontera (11). Es posible llegar al mismo resultado de manera ligeramente diferente si se *reduce el problema actual a uno que tenga condiciones homogéneas en la frontera*, el cual puede resolverse como en la sección 10.1. La técnica para hacerlo se sugiere en el siguiente argumento físico.

Después de mucho tiempo, es decir, cuando $t \to \infty$, se anticipa que se llegará a una distribución de temperaturas de estado estable $v(x)$, que es independiente del tiempo t y de las condiciones iniciales. Como $v(x)$ debe satisfacer la ecuación de conducción del calor (1), se tiene

$$v''(x) = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{12}$$

Además, $v(x)$ debe satisfacer las condiciones en la frontera

$$v(0) = T_1, \qquad v(l) = T_2, \tag{13}$$

que son aplicables incluso cuando $t \to \infty$. La solución de la ecuación (12) que satisface a las ecuaciones (13) es

$$v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1. \tag{14}$$

De donde, la distribución de temperaturas de estado estable es una función lineal de x.

Si se regresa al problema original, ecuaciones (1), (3) y (11), se intentará expresar $u(x, t)$ como la suma de la distribución de temperaturas de estado estable $v(x)$ y otra distribución (transitoria) de temperaturas $w(x, t)$; de este modo, se escribe

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t). \tag{15}$$

Dado que $v(x)$ se expresa por la ecuación (14), se resolverá el problema siempre que sea posible determinar $w(x, t)$. El problema con valores en la frontera para $w(x, t)$ se encuentra al sustituir la expresión de la ecuación (15) para $u(x, t)$ en las ecuaciones (1), (3) y (11).

Por la ecuación (1) se tiene

$$\alpha^2(v + w)_{xx} = (v + w)_t;$$

se deduce que

$$\alpha^2 w_{xx} = w_t, \tag{16}$$

en virtud de que $v_{xx} = 0$ y $v_t = 0$. De manera semejante, por las ecuaciones (15), (11) y (13),

$$\begin{aligned} w(0, t) &= u(0, t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0, \\ w(l, t) &= u(l, t) - v(l) = T_2 - T_2 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Finalmente por las ecuaciones (15) y (3),

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = f(x) - v(x), \tag{18}$$

en donde $v(x)$ se expresa por la ecuación (14). Por tanto, la parte transitoria de la solución del problema original se encuentra al resolver el problema que consta de las ecuaciones

(16), (17) y (18). Este último problema es precisamente el que se resolvió en la sección 10.1, siempre que $f(x) - v(x)$ se considere ahora como la distribución inicial de temperaturas. De donde,

$$u(x, t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \tag{19}$$

en donde

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{l} - T_1\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{20}$$

Este es otro caso en que un problema más difícil se resuelve al reducirlo a un problema más sencillo que ya se ha resuelto. La técnica de reducir un problema con condiciones no homogéneas en la frontera a uno con condiciones homogéneas en la frontera al restar la solución de estado estable, tiene una amplia aplicación.

Barra con extremos aislados. Se presenta un problema ligeramente diferente si los extremos de la barra están aislados de modo que no pase calor a través de ellos. Según la ley de Newton del enfriamiento, como se analiza en el apéndice A, la razón de flujo de calor a través de una sección transversal es proporcional a la razón de cambio de la temperatura en la dirección x. Por tanto, en el caso de que no haya flujo de calor, las condiciones en la frontera son

$$u_x(0, t) = 0, \qquad u_x(l, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{21}$$

El problema planteado por las ecuaciones (1), (3) y (21) también se puede resolver por el método de separación de variables. Si se hace

$$u(x, t) = X(x)T(t), \tag{22}$$

y se sustituye u en la ecuación (1), se concluye, como en la sección 10.1, que

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\sigma, \tag{23}$$

en donde σ es una constante. Por tanto, una vez más se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \sigma X = 0, \tag{24}$$

$$T' + \alpha^2\sigma T = 0. \tag{25}$$

Para cualquier valor de σ, un producto de soluciones de las ecuaciones (24) y (25) es una solución de la ecuación diferencial parcial (1). Sin embargo, sólo se tiene interés en aquellas soluciones que también satisfacen las condiciones en la frontera (21).

Si se sustituye la condición en la frontera en $x = 0$ por $u(x, t)$ dada en la (21), se obtiene $X'(0)T(t) = 0$. No es posible permitir que $T(t)$ sea cero para toda t, ya que entonces también $u(x, t)$ sería cero para toda t. Por ende, debe tenerse

$$X'(0) = 0. \tag{26}$$

Si se procede de la misma manera con la condición en la frontera en $x = l$, se encuentra que

$$X'(l) = 0. \tag{27}$$

Por tanto, se desea resolver la ecuación (24) sujeta a las condiciones en la frontera (26) y (27). Es posible demostrar que sólo pueden existir soluciones no triviales de este problema si σ es real. En el problema 7 se indica una manera de demostrar esto; de modo alternativo, es posible apelar a una teoría más general que se analiza posteriormente en la sección 11.3. Se supondrá que σ es real y, de modo sucesivo, se considerarán los tres casos $\sigma < 0$, $\sigma = 0$ y $\sigma > 0$.

Si $\sigma < 0$, es conveniente hacer $\sigma = -\lambda^2$, en donde λ es real y positivo. Entonces la ecuación (24) queda $X'' - \lambda^2 X = 0$ y su solución general es

$$X(x) = k_1 \operatorname{senh} \lambda x + k_2 \cosh \lambda x. \tag{28}$$

En este caso, las condiciones en la frontera sólo se pueden satisfacer al elegir $k_1 = k_2 = 0$. Dado que esto es inaceptable, se concluye que σ no puede ser negativa; en otras palabras, el problema (24), (26), (27) no tiene eigenvalores negativos.

Si $\sigma = 0$, entonces la ecuación (24) es $X'' = 0$ y, por lo tanto,

$$X(x) = k_1 x + k_2. \tag{29}$$

Las condiciones en la frontera (26) y (27) requieren que $k_1 = 0$, pero no determinan k_2. Por tanto, $\sigma = 0$ es un eigenvalor, correspondiente a la eigenfunción $X(x) = 1$. Para $\sigma = 0$, por la ecuación (25) se concluye que $T(t)$ también es una constante, que puede combinarse con k_2. De donde, para $\sigma = 0$ se obtiene la solución constante $u(x, t) = k_2$.

Finalmente, si $\sigma > 0$, sea $\sigma = \lambda^2$, en donde λ es real y positiva. Entonces la ecuación (24) queda $X'' + \lambda^2 X = 0$ y, como consecuencia,

$$X(x) = k_1 \operatorname{sen} \lambda x + k_2 \cos \lambda x. \tag{30}$$

La condición en la frontera (26) requiere que $k_1 = 0$, y la condición en la frontera (27) requiere que $\lambda = n\pi/l$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, aunque deja a k_2 arbitraria. Por tanto, el problema (24), (26), (27) tiene una sucesión infinita de eigenvalores positivos $\sigma = n^2\pi^2/l^2$ con las eigenfunciones correspondientes $X(x) = \cos(n\pi x/l)$. Para estos valores de σ, las soluciones $T(t)$ de la ecuación (25) son proporcionales a $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2)$.

Si se combinan todos estos resultados, se tienen las siguientes soluciones fundamentales para el problema (1), (3) y (21):

$$u_0(x, t) = 1,$$

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \cos \frac{n\pi x}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

en donde se han eliminado las constantes arbitrarias de proporcionalidad. Cada una de estas funciones satisface la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (21). Debido a que tanto la ecuación diferencial como las condiciones en la frontera son lineales y homogéneas, cualquier combinación lineal finita de las soluciones fundamentales las satisfacen. Se supondrá que esto es cierto para combinaciones lineales infinitas convergentes de solu-

ciones fundamentales. Por tanto, para satisfacer la condición inicial (3), se supone que $u(x, t)$ tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$$

$$= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \cos \frac{n\pi x}{l}. \tag{32}$$

Los coeficientes c_n se determinan mediante el requisito de que

$$u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{l} = f(x). \tag{33}$$

De este modo, los coeficientes desconocidos de la ecuación (32) deben ser los coeficientes de la serie de cosenos de Fourier de periodo $2l$ para f. De donde,

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Con esta elección de los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$, la serie (32) suministra la solución del problema de conducción del calor para una barra con extremos aislados, ecuaciones (1), (3) y (21).

Vale la pena observar que también se puede concebir la solución (32) como la suma de una distribución de temperaturas de estado estable (dada por la constante $c_0/2$), que es independiente del tiempo t, y una distribución transitoria (dada por el resto de la serie infinita) que se anula en el límite, cuando t tiende al infinito. Que el estado estable sea una constante es coherente con la expectativa de que el proceso de conducción del calor gradualmente suavizará la distribución de temperaturas en la barra, en tanto se impida el escape de calor hacia el exterior. La interpretación física del término

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \, dx \tag{35}$$

es que se trata del valor medio de la distribución original de temperaturas.

Ejemplo 2 Encontrar la temperatura $u(x, t)$ en cualquier instante en una varilla metálica de longitud unitaria que está aislada en los extremos, así como en los lados, y cuya distribución inicial de temperaturas es $u(x, 0) = x$ para $0 < x < 1$.

La temperatura de esta varilla satisface el problema de conducción del calor (1), (3), (21), con $l = 1$. Por tanto, por la ecuación (32), la solución es

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \cos n\pi x, \tag{36}$$

en donde los coeficientes se determinan a partir de la ecuación (34). Se tiene

$$c_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1 \tag{37}$$

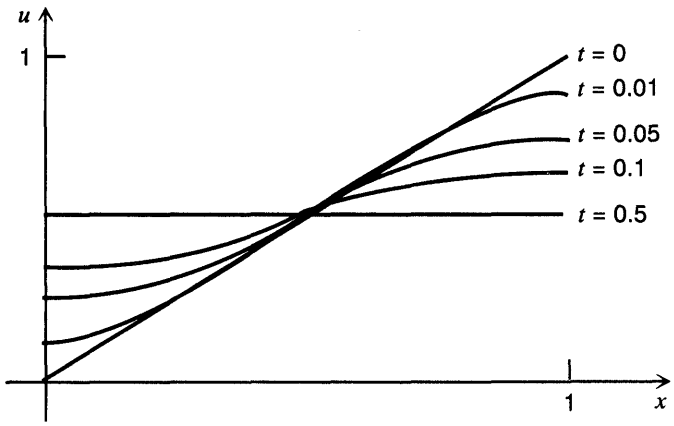


FIGURA 10.5.3 Distribuciones de temperaturas en varios instantes, para el problema de conducción del calor del ejemplo 2.

y, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} c_n &= 2\int_0^1 x \cos n\pi x \, dx \\ &= 2(\cos n\pi - 1)/(n\pi)^2 \\ &= \begin{cases} -4/(n\pi)^2, & n \text{ impar;} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned} \tag{38}$$

Por tanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \cos n\pi x \tag{39}$$

es la solución del problema dado.

Para $\alpha^2 = 1$, en la figura 10.5.3 se muestran gráficas de la distribución de temperaturas en la barra, en varios instantes. Obsérvese que se ha alcanzado esencialmente la distribución constante de estado estable cuando $t = 0.5$. Una vez más, la convergencia de la serie es rápida, por lo que bastan pocos términos para generar las gráficas de la figura 10.5.3.

Problemas más generales. También se puede aplicar el método de separación de variables para resolver problemas de conducción del calor con condiciones en la frontera diferentes a las que se dan mediante las ecuaciones (11) y (21). Por ejemplo, el extremo izquierdo de la varilla podría mantenerse a una temperatura fija T, mientras que el otro está aislado. En este caso las condiciones en la frontera son

$$u(0, t) = T, \qquad u_x(l, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{40}$$

El primer paso para resolver este problema es reducir las condiciones dadas en la frontera homogéneas, al restar la solución de estado estable. En esencia, el problema resultante se resuelve con el mismo procedimiento que el de los problemas antes considerados. Sin em-

bargo, la extensión de la función inicial f hacia afuera del intervalo $[0, l]$ es algo diferente de la de cualquiera de los casos considerados hasta ahora (ver los problemas 9 a 12).

Cuando la razón del flujo de calor a través del extremo de la barra es proporcional a la temperatura, se presenta un tipo más general de condición en la frontera. En el apéndice A se demuestra que las condiciones en la frontera en este caso son de la forma

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \qquad u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{41}$$

en donde h_1 y h_2 son constantes no negativas. Si se aplica el método de separación de variables al problema que consta de las ecuaciones (1), (3) y (41), se encuentra que $X(x)$ debe ser una solución de

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad X'(0) - h_1 X(0) = 0, \qquad X'(l) + h_2 X(l) = 0, \tag{42}$$

en donde σ es la constante de separación. Una vez más, es posible demostrar que sólo pueden existir soluciones no triviales para ciertos valores reales no negativos de σ, los eigenvalores, pero estos valores no se definen por una fórmula sencilla (ver el problema 14). También es posible demostrar que las soluciones correspondientes de las ecuaciones (42), las eigenfunciones, satisfacen una relación de ortogonalidad y que se pueden satisfacer la condición inicial (3) al superponer dichas soluciones. Sin embargo, en el análisis de este capítulo no se incluye la serie resultante. Existe una teoría más general que abarca esos problemas y que se describe en el capítulo 11.

Problemas

1. Considere la conducción del calor en una varilla de cobre de 100 cm de longitud cuyos extremos se mantienen a 0°C, para toda $t > 0$. Halle una expresión para la temperatura $u(x, t)$, si la distribución inicial de temperaturas en la varilla se expresa por

   (a) $u(x, 0) = 50, \qquad 0 \le x \le 100$

   (b) $u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 50 \\ 100 - x, & 50 \le x \le 100 \end{cases}$

   (c) $u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 25 \\ 50, & 25 \le x \le 75 \\ 0, & 75 < x \le 100 \end{cases}$

2. Sea una varilla metálica de 20 cm de longitud que se calienta a una temperatura uniforme de 100°C. Suponga que en $t = 0$ los extremos de la varilla se sumergen en un baño de hielo a 0°C y que, a partir de ese momento, se mantiene a esta temperatura, pero que no se permite fuga de calor a través de la superficie lateral. Encuentre una expresión para la temperatura en cualquier punto de la varilla, en cualquier inatante posterior. Use dos términos en el desarrollo en serie de la temperatura, para determinar aproximadamente la temperatura en el centro de la varilla en el instante $t = 30$ s, si la varilla es de a) plata, b) aluminio y c) hierro fundido.
3. Para la situación del problema 2, encuentre el tiempo que transcurrirá antes de que el centro de la varilla se enfríe hasta una temperatura de 25°C, si la varilla es de a) plata, b) aluminio y c) hierro fundido. Use sólo un término en el desarrollo en serie de $u(x, t)$.
4. Considere el problema de conducción del calor del ejemplo 1.

a) Si se usa un sólo término de la solución en serie y se hace $\alpha^2 = 1$, determine el término τ en el que la temperatura en el centro de la varilla se reduce hasta el 1% de su valor original.

b) Repita el inciso a) si se usan dos términos de la solución en serie.

c) Suponga que la varilla del ejemplo 1 tiene una longitud l y que la difusibilidad térmica es α^2. ¿Cómo cambia el resultado del inciso a) en este caso?

5. Sea una varilla de aluminio de longitud l que inicialmente está a la temperatura uniforme de 25°C. Suponga que, en el instante $t = 0$, el extremo $x = 0$ se enfría hasta 0°C, mientras que el extremo $x = l$ se calienta hasta 60°C y que, a partir de entonces, los dos se mantienen a esas temperaturas.

   a) Encuentre la distribución de temperaturas en la varilla en cualquier instante t.

   En los demás incisos de este problema, suponga que $l = 20$ cm.

   b) Use solamente el primer término de la serie para la temperatura $u(x, t)$ con el fin de hallar la temperatura aproximada en $x = 5$ cm, cuando $t = 30$ s, y cuando $t = 60$ s.

   c) Use los dos primeros términos de la serie para $u(x, t)$ a fin de encontrar un valor aproximado de $u(5,30)$. ¿Cuál es la diferencia porcentual entre las aproximaciones con uno y dos términos? ¿El tercer término de la serie tiene algún efecto apreciable para este valor de t?

   d) Use el primer término de la serie para $u(x, t)$ para estimar el intervalo de tiempo que debe transcurrir antes de que la temperatura en $x = 5$ cm llegue a ser menos de 1% de su valor de estado estable.

   *e) Observe que $u(5,30)$ del inciso c) es menor que la temperatura de estado estable (15°C) en $x = 5$ cm, aun cuando la temperatura (25°C) en $x = 5$ sea mayor que el valor de estado estable. ¿Puede explicar[7] por qué sucede esto?

6. a) Suponga que los extremos de una varilla de cobre de 100 cm de longitud se mantienen a 0°C. Suponga que el centro de la varilla se calienta hasta 100°C por medio de una fuente externa de calor y que esta situación se mantiene hasta alcanzar un estado estable. Encuentre esta distribución de temperaturas de estado estable.

   b) En un instante $t = 0$ (después de que se alcanzó el estado estable del inciso a)), suponga que se retira la fuente de calor. En el mismo instante, considere que el extremo $x = 0$ se pone en contacto térmico con un depósito a 20°C, mientras que el otro extremo permanece a 0°C. Encuentre la temperatura como una función de la posición y el tiempo.

7. Considere una varilla uniforme de longitud l con una temperatura inicial dada por $\text{sen}(\pi x/l)$, $0 \leq x \leq l$. Suponga que los dos extremos de la varilla están aislados. Encuentre un desarrollo formal en serie para la temperatura $u(x, t)$. ¿Cuál es la temperatura de estado estable cuando $t \to \infty$?

8. Considere el problema

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X'(l) = 0. \tag{i}$$

   Sea $\sigma = \lambda^2$, en donde $\lambda = \mu + i\nu$ con u y v reales. Demuestre que si $v \neq 0$, la única solución de las ecuaciones (i) es la trivial $X(x) \equiv 0$.

   Sugerencia: use un razonamiento semejante al del problema 13 de la sección 10.1.

Los problemas 9 a 12 tratan del problema de conducción del calor en una varilla que está aislada en uno de sus extremos y que se mantiene a una temperatura constante en el otro.

[7] En el artículo de Knop, L., y Robbins, D., "Intermediate Time Behavior of a Heat Equation Problem," *Mathematics Magazine* 57 (1984), pp. 217-219, aparece un análisis completo de este problema.

9. Encuentre la temperatura de estado estable en una varilla que está aislada en el extremo $x = 0$ y que su extremo $x = l$ se mantiene a la temperatura constante de 0°C.
10. Encuentre la temperatura de estado estable en una barra que está aislada en el extremo $x = 0$ y que se mantiene a la temperatura constante T en el extremo $x = l$.
11. Considere una varilla uniforme de longitud l que tiene una distribución inicial de temperaturas dada por $f(x)$, $0 \le x \le l$. Suponga que la temperatura en el extremo $x = 0$ se mantiene a 0°C, mientras que el extremo $x = l$ está aislado de modo que no pasa calor a través de él.

    a) Demuestre que las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial parcial y las condiciones en la frontera son

$$u_n(x, t) = e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4l^2} \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/2l], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

    b) Encuentre un desarrollo formal en serie para la temperatura $u(x, t)$,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t),$$

    que también satisfaga la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$.

    Sugerencia: aunque las soluciones fundamentales sólo comprenden los senos impares, sigue siendo posible representar f mediante una serie de Fourier en la que solamente aparezcan estas funciones. Ver el problema 39 de la sección 10.4.
12. Considere la varilla del problema 11, pero suponga que la temperatura en el extremo $x = 0$ se mantiene en un valor constante T. Encuentre un desarrollo formal en serie para la temperatura $u(x, t)$ en cualquier punto de la varilla, en cualquier instante.
13. Encuentre la temperatura de estado estable en una varilla que satisface la condición en la frontera $u_x(0, t) - u(0, t) = 0$ en el extremo $x = 0$ y se mantiene a la temperatura constante T en el extremo $x = l$.
14. El extremo derecho de una varilla de longitud a con conductividad térmica κ_1 y área de la sección transversal A_1 se une al extremo izquierdo de una varilla de conductividad térmica κ_2 y área de la sección transversal A_2. La longitud total de la varilla compuesta es l. Suponga que el extremo $x = 0$ se mantiene a la temperatura cero, mientras que el extremo $x = l$ se mantiene a la temperatura T. Encuentre la temperatura de estado estable en la varilla compuesta, si se supone que la temperatura y la razón del flujo de calor son continuas en $x = a$.

    Sugerencia: ver la ecuación (2) del apéndice A.
15. Considere el problema

$$\begin{gathered} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \qquad u_x(l, t) + \gamma u(l, t) = 0, \qquad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l. \end{gathered} \tag{i}$$

    a) Haga $u(x, t) = X(x)T(t)$ y demuestre que

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X'(l) + \gamma X(l) = 0, \tag{ii}$$

    y

$$T' + \sigma\alpha^2 T = 0,$$

en donde σ es la constante de separación.

b) Suponga que σ es real y demuestre que el problema (ii) no tiene soluciones no triviales si $\sigma \leq 0$.

c) Si $\sigma > 0$, sea $\sigma = \lambda^2$, con $\lambda > 0$. Demuestre que el problema (ii) tiene soluciones no triviales sólo si λ es una solución de la ecuación

$$\lambda \cos \lambda l + \gamma \operatorname{sen} \lambda l = 0. \tag{iii}$$

*d) Trace las gráficas de $y = \tan \lambda l$ y $y = -\lambda l/\gamma l$, para $\lambda > 0$, en el mismo sistema de ejes y demuestre que la ecuación (iii) es satisfecha por una infinidad de valores positivos de λ; denote éstos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, en orden creciente.

*e) Determine el conjunto fundamental de soluciones de $u_n(x, t)$ correspondiente a los valores λ_n hallados en el inciso d).

10.6 Ecuación de onda: vibraciones de una cuerda elástica

Una segunda ecuación diferencial parcial que se presenta a menudo en matemática aplicadas es la ecuación de onda.[8] Alguna forma de esta ecuación, o una generalización de ella, surge casi inevitablemente en cualquier análisis matemático de los fenómenos que comprenden la propagación de ondas en un medio continuo. Por ejemplo, los estudios de las ondas acústicas, ondas en el agua y ondas electromagnéticas todos se basan en esta ecuación. Quizá la situación más fácil de visualizar ocurre en la investigación de las vibraciones mecánicas. Supóngase que una cuerda elástica de longitud l se tensa con firmeza entre dos soportes al mismo nivel horizontal, de modo que el eje x quede a lo largo de la cuerda (ver la figura 10.6.1). Se puede imaginar que la cuerda elástica es una cuerda de violín, un tirante o quizá un cable de energía eléctrica. Supóngase que la cuerda se pone en movimiento (al jalarla por ejemplo) de modo que vibre en un plano vertical y denótese por $u(x, t)$ el desplazamiento vertical experimentado por la cuerda en el punto x, en el instante t. Si se desprecian los efectos de amortiguamiento, como la resistencia del aire, y si la amplitud del movimiento no es demasiado grande, entonces $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \tag{1}$$

en el dominio $0 < x < l$, $t > 0$. La ecuación (1) se conoce como **ecuación de onda** y se deduce en el apéndice B al final del capítulo. El coeficiente constante a^2 que aparece en (1) se da por

$$a^2 = T/\rho, \tag{2}$$

[8] La solución de la ecuación de onda fue uno de los problemas matemáticos importantes de mediados del siglo XVIII. La ecuación de onda fue deducida y estudiada por primera vez por D'Alembert en 1746. También llamó la atención de Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) y Lagrange (1759). La ecuación de onda fue resuelta de varias maneras y los méritos de estas soluciones así como las relaciones entre ellas, fueron discutidas, algunas veces acaloradamente, en una serie de documentos a lo largo de más de 25 años. Los puntos en disputa se refirieron a la naturaleza de una función y a las clases de funciones que es posible representar por series trigonométricas. Estas cuestiones no fueron resueltas hasta el siglo XIX.

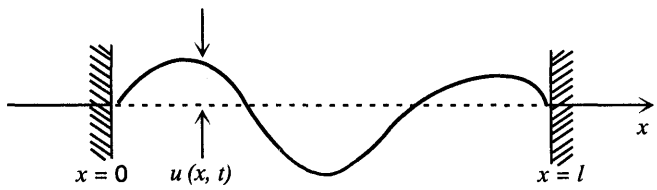


FIGURA 10.6.1 Cuerda vibrante.

en donde T es la tensión (fuerza) en la cuerda y ρ es la masa por unidad de longitud del material de la misma. Por tanto, las unidades de a son longitud/tiempo; es decir, de velocidad. En el problema 9 se demuestra que a es la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de la cuerda.

Para describir por completo el movimiento de la cuerda, también es necesario especificar condiciones iniciales y en la frontera adecuadas para el desplazamiento $u(x, t)$. Se supone que los extremos permanecen fijos y, por lo tanto, las condiciones en la frontera son

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

En virtud de que la ecuación diferencial (1) es de segundo orden con respecto a t, es plausible que sea necesario prescribir dos condiciones iniciales; éstas son la posición inicial de la cuerda

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{4}$$

y su velocidad inicial

$$u_t(x, 0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{5}$$

en donde f y g son funciones dadas. Para que las ecuaciones (3), (4) y (5) sean coherentes también es necesario que

$$f(0) = f(l) = 0, \qquad g(0) = g(l) = 0. \tag{6}$$

Entonces el problema matemático es determinar la solución de la ecuación de onda (1) que también satisfaga las condiciones en la frontera (3) y las condiciones iniciales (4) y (5). Como el problema de conducción del calor de las secciones 10.1 y 10.5, este problema es uno con valor inicial en la variable de tiempo t y uno con valores en la frontera en la variable espacial x. Alternativamente, puede considerarse como un problema con valores en la frontera en la franja seminfinita $0 < x < l$, $t > 0$ del plano xt (ver la figura 10.6.2). En cada uno de los puntos de los lados seminfinitos se impone una condición y en cada punto de la base finita se imponen dos. Como contraste, el problema de conducción del calor, al ser de primer orden en el tiempo, requirió solamente una condición sobre la recta inicial $t = 0$.

Es importante darse cuenta que la ecuación (1) rige un gran número de otros problemas ondulatorios, además de las vibraciones transversales de una cuerda elástica. Por ejemplo, basta interpretar adecuadamente la función u y la constante a para tener problemas que tratan de las olas en un océano, las ondas acústicas o electromagnéticas en la atmósfera o las ondas elásticas en un cuerpo sólido. Si es significativa más de una dimensión espacial,

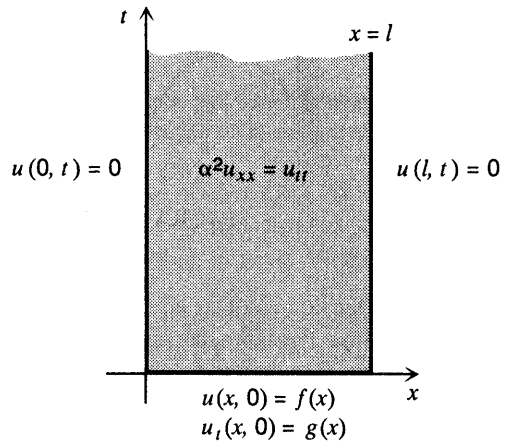


FIGURA 10.6.2 Problema con valores en la frontera para la ecuación de onda.

entonces es necesario generalizar ligeramente la ecuación (1). La ecuación bidimensional de onda es

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}. \tag{7}$$

Esta ecuación surgiría, por ejemplo, al considerar el movimiento de una delgada hoja elástica, como el parche de un tambor. De manera semejante, la ecuación de onda en tres dimensiones es

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \tag{8}$$

En relación con las dos últimas ecuaciones, también deben generalizarse de manera adecuada las condiciones en la frontera y las condiciones iniciales.

A continuación se resolverán algunos problemas típicos con valores en la frontera que comprenden la ecuación unidimensional de onda.

Cuerda elástica con desplazamiento inicial diferente de cero. En primer lugar, supóngase que la cuerda se perturba a partir de su posición de equilibrio y luego se suelta con velocidad cero en el instante $t = 0$, para que vibre libremente. Entonces el desplazamiento vertical $u(x, t)$ debe satisfacer la ecuación de onda (1)

$$a^2u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0;$$

las condiciones en la frontera (3)

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t \geq 0;$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq l; \tag{9}$$

en donde f es una función dada que describe la configuración de la cuerda en $t = 0$.

Es posible aplicar el método de separación de variables para obtener la solución de las ecuaciones (1), (3) y (9). Si se supone que

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{10}$$

y se sustituye u de (1), se obtiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\sigma, \tag{11}$$

en donde σ es una constante. Por tanto, se encuentra que $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \sigma X = 0, \tag{12}$$

$$T'' + a^2\sigma T = 0. \tag{13}$$

Como en el caso de los problemas de conducción del calor considerados antes, se determinarán valores permisibles de la constante de separación σ, a partir de las condiciones en la frontera. Al sustituir $u(x, t)$ de la ecuación (10) en las condiciones en la frontera(3) se encuentra que

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{14}$$

El problema de resolver la ecuación diferencial (12), sujeta a las condiciones en la frontera (14), es *precisamente el mismo problema* que se presentó en la sección 10.1, en relación con el problema de conducción del calor. De este modo, es posible usar los resultados allí obtenidos: el problema (12) y (14) tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\sigma = n^2\pi^2/l^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

y las soluciones correspondientes para $X(x)$ son proporcionales a $\operatorname{sen}(n\pi x/l)$. Si se usa en la ecuación (13) los valores de σ dados por la (15), se encuentra que $T(t)$ es una combinación lineal de $\operatorname{sen}(n\pi at/l)$ y $\cos(n\pi at/l)$. De donde, funciones de la forma

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi at}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

$$v_n(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

satisfacen la ecuación diferencial parcial (1) y las condiciones en la frontera (3). Estas funciones son las soluciones fundamentales del problema dado.

A continuación se buscará una superposición de las soluciones fundamentales (16), (17) que también satisfaga las condiciones iniciales (9). Por tanto, se supone que $u(x, t)$ se expresa por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n u_n(x, t) + k_n v_n(x, t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{l} + k_n \cos\frac{n\pi at}{l}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

en donde c_n y k_n son constantes que se elegirán para satisfacer las condiciones iniciales.

La condición inicial $u(x, t) = f(x)$ da

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} = f(x). \tag{19}$$

Como consecuencia, las k_n deben ser los coeficientes en la serie de senos de Fourier de periodo $2l$ para f y se expresan por

$$k_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

En seguida se supone además que la serie (18) se puede derivar término a término con respecto a t. Entonces la condición inicial $u_t(x, t) = 0$ da

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi a}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} = 0. \tag{21}$$

De donde, las cantidades $c_n(n\pi a/l)$ deben ser los coeficientes en la serie de senos de Fourier de periodo $2l$, para la función que es idénticamente cero. A partir de las fórmulas de Euler-Fourier se concluye que $c_n = 0$ para toda n. Por tanto, la solución formal[9] del problema de las ecuaciones (1), (3) y (9) es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi at}{l}, \tag{22}$$

en donde los coeficientes k_n se dan por la (20).

Para un valor fijo de n, la expresión $\operatorname{sen}(n\pi x/l)\cos(n\pi at/l)$ de la ecuación (22) es periódica en el tiempo con el periodo $2l/na$; por lo tanto, representa un movimiento vibratorio de la cuerda que tenga este periodo o que tenga la frecuencia $n\pi a/l$. Las cantidades $\lambda a = n\pi a/l$, para $n = 1, 2, \ldots$, son las **frecuencias naturales** de la cuerda; es decir, las frecuencias a las que la cuerda vibra libremente. El factor $k_n \operatorname{sen}(n\pi x/l)$ representa el patrón de desplazamiento que ocurre en la cuerda, cuando vibra la frecuencia dada. Cada patrón de desplazamiento se llama **modo natural** de vibración y es periódico en la variable espacial x; el periodo espacial $2l/n$ se conoce como **longitud de onda** del modo de frecuencia $n\pi a/l$. En la figura 10.6.3 se muestran los tres primeros modos naturales. El movimiento total de la cuerda, dado por la función $u(x, t)$ de la ecuación (22) es, por tanto, una combinación de los modos naturales de vibración y es también una función periódica del tiempo con periodo $2l/a$.

Justificación de la solución. Como en el problema de conducción del calor considerado antes, la ecuación (22) con los coeficientes k_n dados por la ecuación (20) es sólo una solución *formal* de las ecuaciones (1), (3) y (9). Para averiguar si la ecuación (22) en *realidad* representa una solución del problema dado se requiere algo más de investigación. Como en el problema de conducción del calor, es tentador intentar demostrar esto directamente al

[9] Soluciones de la forma (22) fueron dadas por Euler en 1749 y, con gran detalle, por Daniel Bernoulli en 1753.

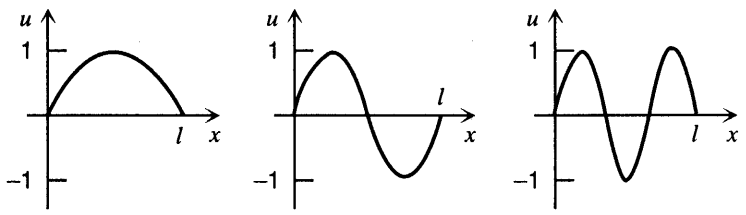


FIGURA 10.6.3 Primeros tres modos fundamentales de vibración de una cuerda elástica. a) Frecuencia = $\pi a/l$, longitud de onda = $2l$; b) frecuencia = $2\pi a/l$, longitud de onda = l; c) frecuencia = $3\pi a/l$, longitud de onda = $2l/3$.

sustituir $u(x, t)$ de las ecuaciones (1), (3) y (9) por la expresión dada en la (22). Sin embargo, al calcular formalmente u_{xx}, por ejemplo, se obtiene

$$u_{xx}(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi at}{l};$$

debido a la presencia del factor n^2 en el numerador, esta serie puede no converger. Esto no necesariamente significa que la serie (22) para $u(x, t)$ es incorrecta, solamente que no se puede usar la serie (22) para calcular u_{xx} y u_{tt}. La diferencia básica entre las soluciones de la ecuación de onda y las de la ecuación de conducción del calor es que ésta contiene términos exponenciales negativos que tienden a cero muy rápido al crecer n, lo cual asegura la convergencia de la solución en serie y sus derivadas. Como contraste, las soluciones en serie de la ecuación de onda sólo contienen términos oscilatorios que no decaen al crecer n.

Sin embargo, existe una manera alternativa para establecer indirectamente la validez de la ecuación (22). Al mismo tiempo se ganará información adicional sobre la estructura de la solución. En primer lugar se demostrará que es equivalente a

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2}[h(x - at) + h(x + at)], \tag{23}$$

en donde h es la función que se obtiene al extender los datos iniciales f hacia $(-l, 0)$ como una función impar y a otros valores de x como una función periódica de periodo $2l$. Es decir,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le l, \\ -f(-x), & -l < x < 0; \end{cases} \tag{24}$$
$$h(x + 2l) = h(x).$$

Para establecer la ecuación (23), nótese que h tiene la serie de Fourier

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}. \tag{25}$$

Entonces si se usan las identidades trigonométricas para el seno de una suma o diferencia, se obtiene

$$h(x - at) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} - \cos \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{l} \right),$$

$$h(x + at) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} + \cos \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{l} \right),$$

y la ecuación (23) se deduce de inmediato al sumar las dos últimas ecuaciones. Por la ecuación (23) se ve que $u(x, t)$ es continua para $0 < x < l, t > 0$, siempre que h sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Esto requiere que f sea continua sobre el intervalo original $[0, l]$ y, como h es la extensión periódica impar de f, que f sea cero en $x = 0$ y $x = l$. De manera semejante, u es dos veces continuamente diferenciable con respecto a cualquiera de las variables en $0 < x < l, t > 0$, siempre que h sea dos veces continuamente diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Esto requiere que f' y f'' sean continuas sobre $[0, l]$. Además, en virtud de que h'' es la extensión impar de f'', también debe tenerse $f''(0) = f''(l) = 0$. Sin embargo, dado que h' es la extensión par de f', no se requieren condiciones adicionales sobre f'. Siempre que se satisfagan estas condiciones, pueden calcularse u_{xx} y u_{tt} a partir de la ecuación (23), y es un ejercicio elemental demostrar que estas derivadas satisfacen la ecuación de onda. Algunos de los detalles del razonamiento que acaba de indicarse se dan en los problemas 15 y 16.

Si no se satisface alguno de los requisitos de continuidad del último párrafo, entonces u no es diferenciable en algunos puntos de la banda seminfinita $0 < x < l, t > 0$, y por tanto, sólo es una solución de la ecuación de onda en un significado un tanto restringido. Una consecuencia física importante de esta observación es que si en los datos iniciales f están presentes cualesquiera discontinuidades, se mantendrán en la solución $u(x, t)$ para todo el tiempo. Como contraste, en los problemas de conducción del calor las discontinuidades iniciales se suavizan instantáneamente (sección 10.5). Supóngase que el desplazamiento inicial f tiene una discontinuidad por salto en $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq l$. Como h es una extensión periódica de f, la misma discontinuidad está presente en $h(\xi)$ en $\xi = x_0 + 2nl$ y en $\xi = -x_0 + 2nl$, en donde n es cualquier entero. Por tanto, $h(x - at)$ es discontinua cuando $x - at = x_0 + 2nl$, o cuando $x - at = -x_0 + 2nl$. Para una x fija en $[0, l]$, la discontinuidad que originalmente estaba en x_0 reaparecerá en $h(x - at)$ en los instantes $t = (x \pm x_0 - 2nl)/a$. De manera semejante, $h(x + at)$ es discontinua en el punto x en los instantes $t = (-x \pm x_0 + 2nl/a$, en donde m es cualquier entero. Con referencia a la ecuación (23), se concluye que la solución $u(x, t)$ también es discontinua en el punto dado x en estos instantes. Puesto que el problema físico se plantea para $t > 0$, sólo interesan aquellos valores de m y n que dan lugar a valores positivos de t.

Problema general de la cuerda elástica. Supóngase que la cuerda se pone en movimiento a partir de una posición inicial específica con una velocidad dada; entonces, el desplazamiento vertical $u(x, t)$ debe satisfacer la ecuación de onda (1),

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0,$$

las condiciones en la frontera (3),

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{26}$$

en donde f y g son funciones dadas que definen la posición y la velocidad iniciales de la cuerda, respectivamente.

Recuérdese que las soluciones fundamentales dadas por las ecuaciones (16) y (17) satisfacen la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (3) y, una vez más, supóngase que $u(x, t)$ se expresa por la (18). Ahora se deben determinar los coeficientes c_n y k_n a partir de las condiciones iniciales (26). Si se aplica la condición $u(x, 0) = f(x)$ da

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x). \tag{27}$$

De donde, los coeficientes k_n son nuevamente los coeficientes de la serie de senos de Fourier para f, de periodo $2l$ y, por tanto, se expresan por la ecuación (20),

$$k_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Si se deriva la ecuación (18) con respecto a t y se aplica la segunda condición inicial $u_t(x, 0) = g(x)$, ahora da

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = g(x). \tag{28}$$

De donde, las cantidades $(n\pi a/l)c_n$ son los coeficientes de la serie de senos de Fourier para g, de periodo $2l$; por consiguiente,

$$\frac{n\pi a}{l} c_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Por tanto, la ecuación (18), con los coeficientes dados por las ecuaciones (20) y (29), constituye una solución formal para el problema de las ecuaciones (1), (3) y (26). Se puede establecer la validez de esta solución formal mediante razonamientos semejantes a los antes indicados para la solución de las ecuaciones (1), (3) y (9).

Problemas

1. Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ en una cuerda elástica que está fija en sus extremos y que se pone en movimiento al jalar su centro. En este caso, $u(x, t)$ satisface las condiciones (1), (3) y (9) con $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq l/2, \\ A(l - x), & l/2 < x \leq l. \end{cases}$$

2. Halle el desplazamiento $u(x, t)$ en una cuerda elástica, fija en los dos extremos, que se pone en movimiento sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $u(x, t) = f(x)$, en donde

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le l/4, \\ Al/4, & l/4 < x < 3l/4, \\ A(l - x), & 3l/4 \le x \le l. \end{cases}$$

3. Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ en una cuerda elástica, que se mantiene fija en los extremos y que se pone en movimiento a partir de su posición de equilibrio, $u(x, 0) = 0$, con una velocidad inicial $u_t(x, 0) = g(x)$, en donde g es una función dada.
4. Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ de una cuerda elástica de longitud l, sujeta en los dos extremos, que se pone en movimiento a partir de su posición recta de equilibrio con la velocidad inicial g definida por

$$g(x) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le l/2, \\ A(l - x), & l/2 < x \le l. \end{cases}$$

5. Demuestre que la solución $u(x, t)$ del problema

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$
$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x),$$

puede escribirse como

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

en donde $v(x, t)$ es la solución del mismo problema con $g(x) = 0$ y $w(x, t)$ es la solución del mismo problema con $f(x) = 0$. De este modo, $v(x, t)$ representa el movimiento de una cuerda a partir del reposo con el desplazamiento inicial $f(x)$ y $w(x, t)$ representa el movimiento de una cuerda que se pone en movimiento a partir de su posición de equilibrio con velocidad inicial $g(x)$. Por lo tanto, se puede obtener la solución del problema general al resolver dos problemas subsidiarios.

6. Si una cuerda elástica está libre en uno de sus extremos, la condición en la frontera a satisfacer allí es que $u_x = 0$. Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ en una cuerda elástica de longitud l, fija en $x = 0$ y libre en $x = l$, que se pone en movimiento sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $u(x, 0) = f(x)$, en donde f es una función dada.
Sugerencia: demuestre que las soluciones fundamentales para este problema, que satisfacen todas las condiciones excepto la condición inicial no homogénea, son

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen} \lambda_n x \cos \lambda_n at,$$

en donde $\lambda_n = (2n - l)\pi/2l$, $n = 1, 2, \ldots$. Compare este problema con el 11 de la sección 10.5; en especial ponga atención en la extensión de los datos iniciales hacia afuera del intervalo original $[0, l]$.

7. Es posible introducir variables adimensionales en la ecuación de onda (11) de la siguiente manera: al hacer $s = x/l$, demuestre que la ecuación de onda queda

$$a^2 u_{ss} = l^2 u_{tt}.$$

a continuación demuestre que l/a tiene las dimensiones de tiempo y que, por tanto, se puede usar como la unidad en la escala del tiempo. Finalmente, haga $\tau = at/l$ y demuestre que la ecuación de onda se reduce a

$$u_{ss} = u_{\tau\tau}.$$

En los problemas 8 y 9 se indica la forma de la solución general de la ecuación de onda y el significado físico de la constante a.

8. Demuestre que la ecuación de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

puede reducirse a la forma $u_{\xi\eta} = 0$, mediante el cambio de variables $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. Demuestre que $u(x, t)$ debe ser de la forma

$$u(x, t) = \phi(x - at) + \psi(x + at),$$

en donde ϕ y ψ son funciones arbitrarias.

9. Trace la gráfica del valor de $\phi(x - at)$ para $t = 0, 1/a, 2/a, t_0/a$, si $\phi(s) = \text{sen } s$. Observe que para cualquier $t \neq 0$ la gráfica de $y = \phi(x - at)$ es la misma que la de $y = \phi(x)$ cuando $t = 0$, pero desplazada una distancia at en la dirección x positiva. De este modo, a representa la velocidad a la que la perturbación se mueve a lo largo de la cuerda. ¿Cuál es la interpretación de $\phi(x + at)$?

10. Un alambre de cobre de 5 pies de longitud se estira mediante una fuerza de tracción de 50 lb. El alambre tiene un peso por unidad de longitud de 0.026 lb/pie.
    a) Encuentre la velocidad de programación de las ondas transversales en el alambre.
    b) Encuentre las frecuencias naturales de vibración.
    c) Si se aumenta la tensión en el alambre, ¿cómo cambian las frecuencias naturales? ¿También cambian los modos naturales?

11. Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación

$$a^2 u_{xx} - \alpha^2 u = u_{tt},$$

en donde α^2 es proporcional al coeficiente de elasticidad del medio. Suponga que la cuerda está fija en los extremos y que se suelta sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $\mu(x, 0) = f(x)$, $0 < x < l$. En el desplazamiento $u(x, t)$.

12. Considere la ecuación de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

en un medio infinito unidimensional, sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

a) Use la forma de la solución obtenida en el problema 8 para demostrar que ϕ y ψ deben satisfacer

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x),$$
$$-\phi'(x) + \psi'(x) = 0.$$

b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) para ϕ y ψ y demuestre de este modo que

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)].$$

Esta forma de la solución la D'Alembert en 1746.
Sugerencia: observe que la ecuación $\psi'(x) = \phi'(x)$ se resuelva al elegir $\psi(x) = \phi(x) + c$.
c) Haga

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demuestre que

$$f(x - at) = \begin{cases} 2, & -1 + at < x < 1 + at \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

También determinar $f(x + at)$.
d) Trace la gráfica de la solución hallada en el inciso b), en $t = 0$, $t = 1/2a$, $t = 1/a$ y $t = 2/a$, y obtenga los resultados que se muestran en la figura 10.6.4. Observe que un desplazamiento inicial produce dos ondas que se mueven en direcciones opuestas alejándose de la ubicación original; cada onda consta de la mitad del desplazamiento inicial.

13. Considere la ecuación de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

en un medio infinito unidimensional, sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

a) Use la forma de la solución obtenida en el problema 8 para demostrar que

$$\phi(x) + \psi(x) = 0,$$
$$-a\phi'(x) + a\psi'(x) = g(x).$$

b) Use la primera ecuación del inciso a) para demostrar que $\psi'(x) = -\phi'(x)$. A continuación, utilice la segunda ecuación para demostrar que $-2a\,\phi'(x) = g(x)$ y, por lo tanto que

$$\phi(x) = -\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi + \phi(x_0),$$

en donde x_0 es arbitraria. Por último determine $\psi(x)$.
c) Demuestre que

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

14. Combine los resultados de los problemas 12 y 13 para demostrar que la solución del problema

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

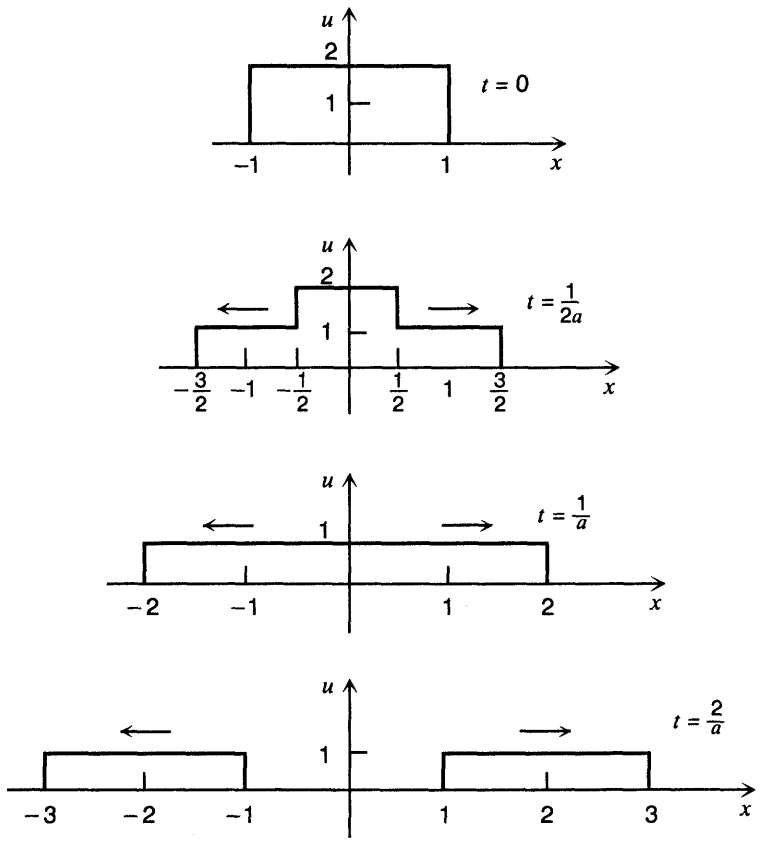


FIGURA 10.6.4 Propagación de una perturbación inicial en un medio infinito unidimensional.

se expresa por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\, d\xi.$$

Los problemas 14 y 15 indican cómo es posible demostrar que la solución formal (22) de las ecuaciones (1), (3) y (9) constituye la solución real de ese problema.

15. Aplique la identidad trigonométrica sen A cos $B = \frac{1}{2}[\text{sen}(A + B) + \text{sen}(A - B)]$ para demostrar que la solución (22) del problema de las ecuaciones (1), (3) y (9) se puede escribir en la forma (23).

*16. Suponga que $h(\xi)$ representa el desplazamiento inicial en $[0, l]$ extendido hacia $(-l, 0)$ como una función impar y extendido en las demás partes como una función periódica de periodo $2l$. Si se supone que h, h' y h'' son todos continuas, demuestre mediante la derivación directa que $u(x, t)$, según la ecuación (23), satisface la ecuación de onda (1) y también las condiciones iniciales (9). Observe también que como la ecuación (22) evidentemente satisface las condiciones en la frontera (3), lo mismo es cierto para la (23). Si se compara ésta con la solución del problema correspondiente para la cuerda infinita

(problema 12), se ve que tienen la misma forma, siempre que los datos iniciales para la cuerda finita, definidos originalmente sólo sobre el intervalo $0 \leq x \leq l$, se extiendan de la manera dada sobre todo el eje x. Si se hace esto, la solución para la cuerda infinita también es aplicable a la finita.

17. El movimiento de una membrana circular elástica, como el parche de un tambor, se rige por la ecuación bidimensional de onda en coordenadas polares

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$

Si se supone que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encuentre ecuaciones diferenciales ordinarias que sean satisfechas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$, y $T(t)$.

*18. La energía total $E(t)$ de la cuerda vibrante se da como una función del tiempo por

$$E(t) = \int_0^l [\tfrac{1}{2}\rho u_t^2(x, t) + \tfrac{1}{2}Hu_x^2(x, t)]\, dx; \tag{i}$$

el primer término es la energía cinética debida al movimiento de la cuerda y el segundo es la energía potencial creada por el desplazamiento de la cuerda al alejarse de su posición de equilibrio.

Para el desplazamiento $u(x, t)$ dado por la ecuación (22), es decir, para la solución del problema de la cuerda con velocidad inicial cero, demuestre que

$$E(t) = \frac{\pi^2 H}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 k_n^2. \tag{ii}$$

Observe que el segundo miembro de la ecuación (ii) no depende de t. Por tanto, la energía total E es constante y, por consiguiente, se *conserva* durante el movimiento de la cuerda. *Sugerencia*: aplique la ecuación de Parseval (problema 37 de la sección 10.4 y problema 13 de la sección 10.3) y recuerde que $a^2 = H/\rho$.

10.7 Ecuación de Laplace

Una de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes que se presentan en las matemáticas aplicadas es la asociada con el nombre de Laplace[10]: en dos dimensiones

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

y en tres dimensiones

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{2}$$

Por ejemplo, en un problema bidimensional de conducción del calor, la temperatura $u(x, y, t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \tag{3}$$

[10] La ecuación de Laplace recibe ese nombre en honor de Pierre Simon de Laplace quien, a partir de 1782 estudió con amplitud sus soluciones al investigar la atracción gravitacional de cuerpos arbitrarios en el espacio. Sin embargo, la ecuación apareció por vez primera en un documento de Euler sobre hidrodinámica, en 1752.

en donde α^2 es la difusibilidad térmica. Si existe un estado estable, entonces u es una función sólo de x y y, y la derivada respecto al tiempo se anula; en este caso, la ecuación (3) se reduce a la (1). De manera semejante, para el problema de estado estable de conducción del calor en tres dimensiones, la temperatura debe satisfacer la forma tridimensional de la ecuación de Laplace. Las ecuaciones (1) y (2) también se presentan en otras ramas de la física matemática. En la consideración de los campos electrostáticos, la función de potencial eléctrico en un medio dieléctrico que no contiene cargas eléctricas debe satisfacer la ecuación (1) o la (2), dependiendo del número de dimensiones espaciales que intervengan. De manera semejante, la función de energía potencial de una partícula en el espacio libre sobre la que sólo recibe la acción de fuerzas gravitacionales satisface las mismas ecuaciones. Como consecuencia, la ecuación de Laplace a menudo se menciona como **ecuación del potencial**. Otro ejemplo se presenta en el estudio del movimiento estable (independiente del tiempo), bidimensional, no viscoso, irrotacional de un fluido incomprensible, el cual se centra en torno a dos funciones, conocidas como función del potencial de velocidad y función de corriente, que satisfacen la ecuación (1). En elasticidad, los desplazamientos que ocurren cuando se tuerce una barra perfectamente elástica se describen en términos de la llamada función alabeada, que también satisface la ecuación (1).

En virtud de que en ninguno de los problemas que acaban de mencionarse existe dependencia con respecto al tiempo, no hay condiciones iniciales que tengan que ser satisfechas por las soluciones de la ecuación (1) o la (2). Sin embargo, deben satisfacer ciertas condiciones en la frontera sobre la curva o superficie que limita la región en la que va a resolverse la ecuación diferencial. Como la ecuación de Laplace es de segundo orden, sería plausible esperar que se requieran dos condiciones en la frontera para determinar la solución por completo. Sin embargo, éste no es el caso. Recuérdese que en el problema de conducción del calor para la barra finita (secciones 10.1 y 10.5) fue necesario prescribir una condición en cada extremo de la barra; es decir, *una condición en cada punto de la frontera*. Si se generaliza esta observación a problemas multidimensionales, entonces resulta natural prescribir una condición sobre la función u en cada punto de la frontera de la región en la que se busca una solución de (1) o (2). Se tiene la condición más común en la frontera cuando se especifica el valor de u en cada punto de la misma; en términos del problema de conducción del calor, esto corresponde a prescribir la temperatura sobre la frontera. En algunos problemas, en vez de ello se especifica el valor de la derivada, o razón de cambio, de u en la dirección normal a la frontera; la condición sobre la frontera de un cuerpo térmicamente aislado, por ejemplo, es de este tipo. Es por completo posible que ocurran condiciones en la frontera más complicadas; por ejemplo, podría prescribirse u sobre parte de la frontera y especificarse su derivada normal en el resto. El problema de encontrar una solución de la ecuación de Laplace que toma valores dados en la frontera se conoce como **problema de Dirichlet**, en honor de P. G. L. Dirichlet.[11] Como contraste, si se prescriben los valores de la derivada normal sobre la frontera, se dice que el problema es un **problema de Neumann**,

[11] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) fue profesor en Berlín y, después del fallecimiento de Gauss, en Gotinga. En 1829 dio el primer conjunto de condiciones suficientes para garantizar la convergencia de una serie de Fourier. La definición de función que suele usarse en la actualidad en el cálculo elemental es en esencia la que dio Dirichlet en 1837. Aunque actualmente es más conocido por su trabajo en análisis y ecuaciones diferenciales, Dirichlet también fue uno de los teóricos más destacados en teoría de números del siglo XIX.

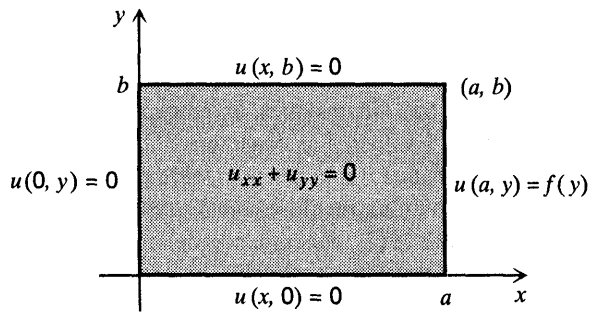


FIGURA 10.7.1 Problema de Dirichlet para un rectángulo.

en honor de K. G. Neumann[12]. Los problemas de Dirichlet y de Neumann también se conocen como primero y segundo problemas con valores en la frontera de la teoría del potencial, respectivamente.

Desde el punto de vista físico, es plausible esperar que los tipos de condiciones en la frontera que acaban de mencionarse basten para determinar por completo la solución. De hecho, es posible establecer la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Laplace en las condiciones mencionadas en la frontera, siempre que la forma de la frontera y las funciones que aparecen en las condiciones en la frontera satisfagan ciertos requisitos muy ligeros. Sin embargo, las demostraciones de estos teoremas, e incluso su enunciado exacto, rebasan el alcance de este libro. Lo único que interesa aquí es resolver algunos problemas típicos por medio de separación de variables y series de Fourier.

Aunque los problemas elegidos como ejemplos pueden tener interpretaciones físicas interesantes (en términos de potenciales electrostáticos o de distribuciones de estado estable de temperaturas, por ejemplo), la finalidad aquí es señalar principalmente algunas de las características que se pueden presentar durante su resolución matemática. También vale la pena hacer notar una vez más que algunas veces se pueden resolver problemas más complicados al expresar la solución como la suma de soluciones de problemas más sencillos (ver los problemas 3 y 4).

Problemas de Dirichlet para un rectángulo. Considérese el problema matemático de encontrar la función u que satisfaga la ecuación de Laplace (1),

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, y que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ &u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 \leq y \leq b, \end{aligned} \tag{4}$$

en donde f es una función dada sobre $0 \leq y \leq b$ (ver la figura 10.7.1).

[12] Karl Gottfried Neumann (1832-1925), profesor en Leipzig, hizo contribuciones en ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales y variables complejas.

Para resolver este problema se desea construir un conjunto fundamental de soluciones que satisfagan la ecuación diferencial parcial y las condiciones homogéneas en la frontera; luego se superpondrán estas soluciones de modo que se satisfaga la condición restante en la frontera. Supóngase que

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{5}$$

y sustitúyase u de la ecuación (1); esto da

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma,$$

en donde σ es la constante de separación. Por tanto, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' - \sigma X = 0, \tag{6}$$

$$Y'' + \sigma Y = 0. \tag{7}$$

Si ahora u dada en la ecuación (5) se sustituye en cada una de las condiciones homogéneas en la frontera, se encuentra que

$$X(0) = 0 \tag{8}$$

y

$$Y(0) = 0, \qquad Y(b) = 0. \tag{9}$$

Se determinará primero la solución de la ecuación diferencial (7) sujeta a las condiciones en la frontera (9). Sin embargo, este problema es en esencia idéntico al que se consideró con detalle en la sección 10.1. Se concluye que existen soluciones no triviales si y sólo si σ toma ciertos valores reales; a saber,

$$\sigma = (n\pi/b)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{10}$$

las soluciones correspondientes para $Y(y)$ son proporcionales a $\operatorname{sen}(n\pi y/b)$. En seguida, σ dada en la ecuación (10) se sustituye en la (6) y se resuelve ésta sujeta a la condición en la frontera (8). De inmediato se concluye que $X(x)$ debe ser proporcional a $\operatorname{senh}(n\pi x/b)$. De este modo se obtienen las soluciones fundamentales

$$u_n(x, y) = \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Estas soluciones satisfacen la ecuación diferencial (1) y todas las condiciones homogéneas en la frontera para cada valor de n.

Para satisfacer la condición no homogénea restante en la frontera cuando $x = a$ se supone, como de costumbre, que la solución $u(x, t)$ se puede representar en la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \tag{12}$$

Los coeficientes c_n se determinan por la condición en la frontera

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = f(y). \tag{13}$$

Por lo tanto, las cantidades $c_n \operatorname{senh}(n\pi a/b)$ deben ser los coeficientes de la serie de senos de Fourier para f, de periodo $2b$, y se expresan por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dy. \tag{14}$$

De este modo, la solución de la ecuación diferencial parcial (1) que satisface las condiciones en la frontera (4) está dada por la ecuación (12), con los coeficientes c_n calculados a partir de la (14).

Con base en las ecuaciones (12) y (14), se ve que la solución contiene el factor $\operatorname{senh}(n\pi x/b)/\operatorname{senh}(n\pi a/b)$. A fin de estimar esta cantidad para n grande puede usarse la aproximación $\operatorname{senh} \xi \simeq e^{\xi}/2$, y obtener así

$$\frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \cong \frac{\frac{1}{2}\exp(n\pi x/b)}{\frac{1}{2}\exp(n\pi a/b)} = \exp[-n\pi(a - x)/b].$$

Por tanto, este factor tiene el carácter de una exponencial negativa; como consecuencia, la serie (12) converge bastante rápido a menos que $a - x$ sea muy pequeña.

Problema de Dirichlet para un círculo. Considérese el problema de resolver la ecuación de Laplace en la región circular $r < a$, sujeta a la condición en la frontera

$$u(a, \theta) = f(\theta), \tag{15}$$

en donde f es una función dada sobre $0 \leq \theta < 2\pi$ (ver la figura 10.7.2). En coordenadas polares, la ecuación de Laplace toma la forma

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0. \tag{16}$$

Para completar el planteamiento del problema se observa que, para que $u(r, \theta)$ sea de valores únicos, es necesario que u sea periódica en θ con periodo 2π. Además, se expresa explícitamente que $u(r, \theta)$ debe estar acotada para $r \leq a$, ya que esto será importante posteriormente.

Para aplicar el método de separación de variables a este problema se supone que

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{17}$$

y se sustituye u de la ecuación diferencial (16) por esta expresión. De este modo se obtiene

$$R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0,$$

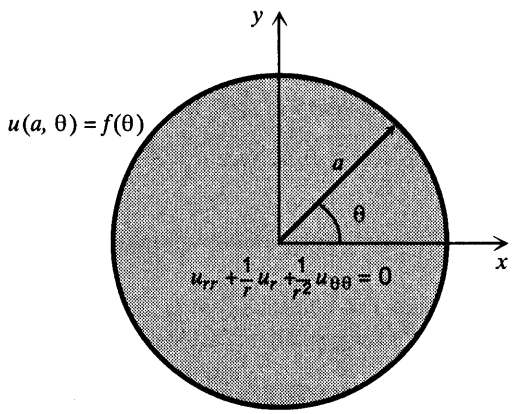


FIGURA 10.7.2 Problema de Dirichlet para un círculo.

o bien,

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \sigma, \tag{18}$$

en donde σ es la constante de separación. Por tanto, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2R'' + rR' - \sigma R = 0, \tag{19}$$

$$\Theta'' + \sigma\Theta = 0. \tag{20}$$

En este problema no hay condiciones homogéneas en la frontera; sin embargo, recuérdese que las soluciones deben ser acotadas y también periódicas en θ, con periodo 2π. Es posible demostrar (problema 9) que la condición de periodicidad requiere que σ sea real. Se considerarán sucesivamente los casos en que σ es negativa, cero y positiva.

Si $\sigma < 0$, sea $\sigma = -\lambda^2$, en donde $\lambda > 0$; entonces la ecuación (20) queda $\Theta'' - \lambda^2\Theta = 0$ y como consecuencia,

$$\Theta(\theta) = c_1e^{\lambda\theta} + c_2e^{-\lambda\theta}. \tag{21}$$

Por tanto, $\Theta(\theta)$ puede ser periódica sólo si $c_1 = c_2 = 0$ y se concluye que σ no puede ser negativa.

Si $\sigma = 0$, entonces la ecuación (20) queda $\Theta'' = 0$ y, por tanto,

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta. \tag{22}$$

Para que $\Theta(\theta)$ sea periódica debe tenerse $c_2 = 0$, de modo que $\Theta(\theta)$ es constante. Además, para $\sigma = 0$, la ecuación (19) quede

$$r^2R'' + rR' = 0. \tag{23}$$

Esta ecuación es del tipo de Euler y tiene la solución

$$R(r) = k_1 + k_2 \ln r. \tag{24}$$

No es posible aceptar el término logarítmico, si $u(r, \theta)$ ha de permanecer acotada cuando $r \to 0$; de donde, $k_2 = 0$. Por tanto, correspondiente a $\sigma = 0$, se obtiene la solución

$$u_0(r, \theta) = 1. \tag{25}$$

Por último si $\sigma > 0$, se hace $\sigma = \lambda^2$, en donde $\lambda > 0$. Entonces las ecuaciones (19) y (20) quedan

$$r^2R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \tag{26}$$

y

$$\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0, \tag{27}$$

respectivamente. La (26) es una ecuación de Euler y tiene la solución

$$R(r) = k_1 r^{\lambda} + k_2 r^{-\lambda}, \tag{28}$$

mientras que la (27) tiene la solución

$$\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen} \lambda\theta + c_2 \cos \lambda\theta. \tag{29}$$

Para que Θ sea periódica con el periodo 2π es necesario que λ sea un entero positivo n. Con $\lambda = n$ se deduce que debe descartarse la solución $r^{-\lambda}$ de la ecuación (28), en virtud de que se vuelve no acotada cuando $r \to 0$. Como consecuencia, $k_2 = 0$ y las soluciones apropiadas de la (16) son

$$u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \qquad v_n(r, \theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Estas funciones, junto con $u_0(r, \theta) = 1$, forman un conjunto de soluciones fundamentales del presente problema.

De la manera acostumbrada, supóngase ahora que u puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones fundamentales; es decir,

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta). \tag{31}$$

Entonces, la condición en la frontera (15) requiere que

$$u(a, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta) = f(\theta) \tag{32}$$

para $0 \leq \theta < 2\pi$. La función f puede extenderse hacia afuera de este intervalo de modo que sea pariódica de periodo 2π y, por lo tanto, tiene una serie de Fourier de la forma (32). Como la función extendida tiene periodo 2π, es posible calcular sus coeficientes de Fourier al integrar sobre cualquier periodo de la función. En particular, es conveniente utilizar el intervalo original $(0, 2\pi)$; entonces,

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{33}$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Con esta elección de los coeficientes, la ecuación (31) representa la solución del problema con valores en la frontera de las ecuaciones (15) y (16). Nótese que en este problema se necesitaron tanto términos en seno como en coseno en la solución. Esto se debe a que los datos en la frontera se dieron sobre $0 \leq \theta < 2\pi$ y tienen periodo 2π. Como consecuencia, se requiere toda la serie de Fourier, en lugar de sólo términos en seno o en coseno.

Problemas

1. a) Encuentre la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0, \qquad 0 < y < b$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq a.$$

   b) Encuentre la solución si $g(x)$ se da por la fórmula

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < a/2, \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

2. Encuentre la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \qquad u(x, b) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a.$$

3. Encuentre la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \qquad u(x, b) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a.$$

   Sugerencia: considere la posibilidad de sumar las soluciones de los dos problemas, uno con condiciones homogéneas en la frontera, excepto para $u(a, y) = f(y)$, y el otro con condiciones homogéneas en la frontera, excepto para $u(x, 0) = h(x)$.

4. Muestre cómo encontrar la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(0, y) = k(y), \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \qquad u(x, b) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq a.$$

   Sugerencia: ver el problema 3.

5. Encuentre la solución $u(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = 0$$

   fuera de círculo $r = a$, que también satisfaga la condición en la frontera

$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

   sobre el cálculo. Suponga que $u(r, \theta)$ es de valores únicos y acotada para $r > a$.

6. Encuentre la solución $u(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace en la región semicircular $r < a$, $0 < \theta < \pi$ que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \pi) = 0, \qquad 0 \le r < a,$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Suponga que u es de valores únicos y acotada en la región que se da.

7. Encuentre la solución $u(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace en el sector circular $0 < r < a$, $0 < \theta < \alpha$ que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \alpha) = 0, \qquad 0 \le r < a$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \alpha.$$

Suponga que u es de valores únicos y acotada en el sector.

8. Encuentre la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en la banda seminfinita $0 < x < a$, $y > 0$, que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0, \qquad y > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le a$$

y la condición adicional de que $u(x, y) \to 0$ cuando $y \to \infty$.

9. Demuestre que la ecuación (20) tiene soluciones periódicas sólo si σ es real.
Sugerencia: Haga $\sigma = -\lambda^2$, en donde $\lambda = \mu + i\nu$ con μ y ν reales.

10. Considere el problema de encontrar una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u_x(0, y) = 0, \qquad u_x(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u_y(x, 0) = 0, \qquad u_y(x, b) = 0, \qquad 0 \le x \le a.$$

Este es un ejemplo del problema de Neumann.

a) Demuestre que la ecuación de Laplace y las condiciones homogéneas en la frontera determinan el conjunto fundamental de soluciones

$$u_0(x, y) = c_0,$$
$$u_n(x, y) = c_n \cosh(n\pi x/b) \cos(n\pi y/b); \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

b) Superponga las soluciones fundamentales del inciso a), determinar formalmente una función u que también satisfaga la condición no homogénea en la frontera $u_x(a, y) = f(y)$. Observe que, cuando se calcula $u_x(a, y)$, se elimina el término constante en $u(x, y)$ y no existe condición a partir de la cuál determinar c_0. Además, debe ser posible expresar f por medio de una serie de casos de Fourier de periodo $2b$, que no tenga término constante. Esto significa que

$$\int_0^b f(y)\, dy = 0$$

es una condición necesaria para que el problema dado sea resoluble. Por último, observe que c_0 permanece arbitraria y, de donde, la solución sólo queda determinada hasta esta constante aditiva. Esta es una propiedad de todos los problemas de Neumann.

11. Encuentre una solución $u(r, \theta)$ de la ecuación de Laplace en el interior del círculo $r = a$ que también satisfaga la condición en la frontera sobre el círculo

$$u_r(a, \theta) = g(\theta), \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Observe que éste es un problema de Neumann y que su solución sólo está determinada hasta una constante aditiva arbitraria. Establezca una condición necesaria sobre $g(\theta)$ para que este problema sea resoluble por el método de separación de variables (ver el problema 10).

12. Encuentre la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u_x(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a.$$

Observe que este no es un problema de Dirichlet ni de Neumann, si no un problema mixto en el que se prescribe u sobre parte de la frontera y su derivada normal sobre el resto.

13. Encuentre la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u_y(x, b) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a.$$

Sugerencia: a la larga será necesario desarrollar $f(y)$ en una serie en la que se apliquen las funciones $\text{sen}(\pi y/2b)$, $\text{sen}(3\pi y/2b)$, $\text{sen}(5\pi y/2b)$, . . . (ver el problema 39 de la sección 10.4).

14. Encuentre la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$u_x(0, y) = 0, \qquad u_x(a, y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq a.$$

15. Al escribir la ecuación de Laplace en las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y después suponer que la solución es axialmente simétrica (no hay dependencia con respecto a θ), se obtiene la ecuación

$$u_{rr} + (1/r)u_r + u_{zz} = 0.$$

Si se supone que $u(r, z) = R(r)Z(z)$ demuestre que R y Z satisfacen las ecuaciones

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0, \qquad Z'' - \lambda^2 Z = 0.$$

La ecuación para R es la ecuación de Bessel de orden cero con variable independiente λr.

APÉNDICE A

Deducción de la ecuación de conducción del calor. En esta sección se deduce la ecuación diferencial que, por lo menos hasta una primera aproximación, rige la conducción del

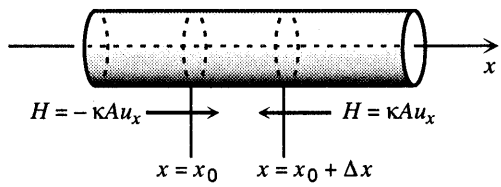


FIGURA 10.A.1 Conducción del calor en un elemento de una barra.

calor en sólidos. Es importante comprender que el análisis matemático de una situación o proceso físico como éste se basa en última instancia en un conocimiento empírico del fenómeno que se trata. El matemático debe contar con un punto de partida, por así decirlo, y éste lo proporciona la experiencia. En el caso de la conducción del calor, se ha demostrado muchas veces que si dos placas paralelas de la misma área A y diferentes temperaturas constantes T_1 y T_2, respectivamente, están separadas por una pequeña distancia d, pasa una cantidad de calor por unidad de tiempo de la placa más caliente a la menos caliente. Además, con un alto grado de aproximación, esta cantidad de calor es proporcional al área A, o la diferencia de temperaturas $|T_2 - T_2|$ e inversamente proporcional a la distancia de separación d. Por tanto,

$$\text{Cantidad de calor por unidad de tiempo} = \kappa A|T_2 - T_1|/d, \tag{1}$$

en donde el factor de proporcionalidad positivo κ se llama conductividad térmica y depende sólo del material[13] existente entre las dos placas. La ley física expresada por la ecuación (1) se conoce como ley de Newton del enfriamiento. Se repite que la (1) es un resultado empírico, no teórico, y que se le puede comprobar, como se ha hecho a menudo, mediante experimentos cuidadosos. Es la base de la teoría matemática de la conducción del calor.

A continuación, considérase una barra recta de sección transversal uniforme y de material homogéneo, orientada de modo que el eje x quede a lo largo del eje de la barra (ver la figura 10.A.1). Desígnese $x = 0$ y $x = l$ los extremos de la barra.

Se supondrá que los lados de la barra están perfectamente aislados, de modo que a través de ellos no pasa calor. También se supondrá que la temperatura u sólo depende de la posición axial x y del tiempo t, y no de las coordenadas laterales y y z. En otras palabras, se supone que la temperatura permanece constante sobre cualquier sección transversal de la barra. Esta suposición suele ser satisfactoria cuando las dimensiones laterales de la barra son pequeñas en comparación con su longitud.

La ecuación diferencial que rige la temperatura en la barra es una expresión de un equilibrio físico fundamental: la razón a la que el calor fluye hacia cualquier porción de la barra es igual a la razón a la que el calor es absorbido en esa porción de la barra. Los términos de la ecuación se llaman término de flujo y término de absorción, respectivamente.

Se calculará primero el término de flujo. Considérese un elemento de la barra que se encuentra entre las secciones transversales $x = x_0$ y $x = x_0 + \Delta x$, en donde x_0 es arbitraria y Δx es pequeño. La razón instantánea de transferencia de calor $H(x_0, t)$ de izquierda a derecha, a través de la sección transversal $x = x_0$, se da por

[13] En realidad, κ también depende de la temperatura, pero si el intervalo de temperaturas no es demasiado grande, resulta satisfactorio suponer que κ es independiente de la misma.

$$H(x_0, t) = -\lim_{d \to 0} \kappa A \frac{u(x_0 + d/2, t) - u(x_0 - d/2, t)}{d}$$
$$= -\kappa A u_x(x_0, t). \tag{2}$$

El signo menos aparece en esta ecuación porque hay un flujo positivo de calor de izquierda a derecha sólo si la temperatura es mayor a la izquierda de $x = x_0$ que a la derecha; en este caso $u_x(x_0, t)$ es negativa. De manera semejante, la razón a la que pasa calor de izquierda a derecha, a través de la sección transversal $x = x_0 + \Delta x$, se da por

$$H(x_0 + \Delta x, t) = -\kappa A u_x(x_0 + \Delta x, t). \tag{3}$$

Por tanto, la razón neta a la que fluye el calor hacia el segmento de la barra entre $x = x_0$ y $x = x_0 + \Delta x$ se expresa por

$$Q = H(x_0, t) - H(x_0 + \Delta x, t) = \kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)], \tag{4}$$

y la cantidad de calor que entra en este elemento de barra en el tiempo Δt es

$$Q\,\Delta t = \kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\,\Delta t. \tag{5}$$

Calcúlese ahora el término de absorción. El cambio promedio en la temperatura, Δu, en el intervalo de tiempo Δt, es proporcional a la cantidad de calor $Q\,\Delta t$ que se introduce e inversamente proporcional a la masa Δm del elemento. Por tanto,

$$\Delta u = \frac{1}{s}\frac{Q\,\Delta t}{\Delta m} = \frac{Q\,\Delta t}{s\rho A\,\Delta x}, \tag{6}$$

en donde la constante de proporcionalidad s se conoce como calor específico del material de la barra y ρ es su densidad.[14] El cambio promedio en la temperatura, Δu, en el elemento de barra que se está considerando es el cambio real en la temperatura en algún punto intermedio $x = x_0 + \theta\,\Delta x$, en donde $0 < \theta < 1$. Por tanto, la ecuación (6) puede escribirse como

$$u(x_0 + \theta\,\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\,\Delta x, t) = \frac{Q\,\Delta t}{s\rho A\,\Delta x}, \tag{7}$$

o como

$$Q\,\Delta t = [u(x_0 + \theta\,\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\,\Delta x, t)]\,s\rho A\,\Delta x. \tag{8}$$

Para balancear los términos de flujo y de absorción, se igualan las dos expresiones para $Q\,\Delta t$:

$$\kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\,\Delta t$$
$$= s\rho A[u(x_0 + \theta\,\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\,\Delta x, t)]\,\Delta x, \tag{9}$$

[14] La dependencia de la densidad y del calor específico con respecto a la temperatura es relativamente pequeña, por lo que se despreciará; por tanto ρ y s se considerarán como constantes.

Al dividir la ecuación (9) entre $\Delta x\,\Delta t$ y hacer que $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$, se obtiene la ecuación de *conducción del calor* o de la difusión

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t. \tag{10}$$

La cantidad α^2 definida por

$$\alpha^2 = \kappa/\rho s \tag{11}$$

se llama *difusibilidad térmica* y es un parámetro que sólo depende del material de la barra. Las unidades de α^2 son (longitud)^2 tiempo. En la tabla 10.1.1 se dan valores comunes de α^2.

En los extremos de la barra es posible imponer varias condiciones relativamente sencillas. Por ejemplo, la temperatura en uno de los extremos puede mantenerse en algún valor constante T. Esto podría llevarse a cabo al colocar el extremo de la barra en contacto térmico con algún depósito de tamaño suficiente, de modo que cualquier calor que fluyera entre la barra y el depósito no alterara de modo apreciable la temperatura de éste. En el extremo en que se hace esto, la condición en la frontera es

$$u = T. \tag{12}$$

Ocurre otra sencilla condición en la frontera si se aísla el extremo de modo que no pase calor a través de él. Si se recuerda la expresión (2) para la cantidad de calor que cruza cualquier sección transversal de la barra, resulta evidente que la condición de aislamiento es que esta cantidad se anule; por tanto,

$$u_x = 0 \tag{13}$$

es la condición en la frontera en un extremo aislado.

Se tiene un tipo más general de condición en la frontera si la razón de flujo de calor a través de uno de los extremos de la barra es proporcional a la temperatura allí. Considérese el extremo $x = 0$, en donde la razón de flujo de calor de izquierda a derecha se expresa por $-\kappa A u_x(0, t)$; ver la ecuación (2). De donde, la razón de flujo de calor hacia afuera de la barra (de derecha a izquierda) en $x = 0$ es $\kappa A u_x(0, t)$. Si esta cantidad es proporcional a la temperatura, $u(0, t)$, entonces se obtiene la condición en la frontera

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{14}$$

en donde h_1 es una constante no negativa de proporcionalidad. Nótese que $h_1 = 0$ corresponde a uno de los extremos aislados, mientras que $h_1 \to \infty$ corresponde a uno de los extremos mantenido a la temperatura cero.

Si el flujo de calor se lleva a efecto en el extremo derecho de la barra ($x = l$), entonces de modo semejante se obtiene la condición en la frontera

$$u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = 0 \qquad t > 0, \tag{15}$$

en donde de nuevo h_2 es una constante no negativa de proporcionalidad.

Por último, para determinar por completo el flujo de calor en la barra es necesario dar a conocer la distribución de temperaturas en un instante fijo, que suele tomarse como el instante inicial $t = 0$. Esta condición inicial es de la forma

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{16}$$

Entonces, el problema es determinar la solución de la ecuación diferencial (10) sujeta a una de las condiciones en la frontera (12) a (15) en cada extremo y a la condición inicial (16) en $t = 0$.

En la práctica también ocurren varias generalizaciones de la ecuación del calor (10). En primer lugar, el material de la barra puede ser no uniforme y la sección transversal puede no ser constante a lo largo de la longitud de la barra. En este caso, los parámetros κ, ρ, s y A pueden depender de la variable axial x. Si se regresa a la ecuación (2) se ve que la razón de transferencia del calor de izquierda a derecha, a través de la sección transversal en $x = x_0$, ahora se da por

$$H(x_0, t) = -\kappa(x_0)A(x_0)u_x(x_0, t) \tag{17}$$

con una expresión semejante para $H(x_0 + \Delta x, l)$. Si se introducen estas cantidades en la ecuación (4) y al final en la (9), y se procede como antes, se obtiene la ecuación diferencial parcial

$$(\kappa A u_x)_x = s\rho A u_t. \tag{18}$$

Por lo general, la ecuación (18) se escribirá en la forma

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x, \tag{19}$$

en donde $p(x) = \kappa(x)A(x)$ y $r(x) = s(x)\rho(x)A(x)$. Nótese que estas dos cantidades son intrínsecamente positivas.

Se tiene una segunda generalización si existe otras maneras en las que el calor entra a la barra o sale de ésta. Supóngase que existe una *fuente* que agrega calor a la barra a una razón $G(x, t, u)$ por unidad de tiempo por unidad de tiempo por unidad delongitud, en donde $G(x, t, u) > 0$. En este caso, es necesario sumar el término $G(x, \text{t}, u)\Delta x \Delta t$ al primer miembro de la ecuación (9) y esto da la ecuación diferencial

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x + G(x, t, u). \tag{20}$$

Si $G(x, t, u) < 0$, entonces se habla de un *sumidero* que elimina calor de la barra a la razón $G(x, t, u)$ por unidad de tiempo por unidad de longitud. Para hacer manejable el problema se debe restringir la forma de la función G. En especial, se supondrá que G es lineal en u y que el coeficiente de u no depende de t. De este modo, se escribe

$$G(x, t, u) = F(x, t) - q(x)u. \tag{21}$$

Se ha introducido el signo menos en la ecuación (21) para que ciertas ecuaciones que aparecen más tarde tengan sus formas acostumbradas. Si se sustituye la ecuación (21) en la (20), se obtiene

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t). \tag{22}$$

Algunas veces a esta ecuación se le conoce como ecuación generalizada de la conducción del calor. Los problemas con valores en la frontera para la ecuación (21) se analizarán con cierta amplitud en el capítulo 11.

Finalmente si en vez de una barra unidimensional, se considera un cuerpo con más de una dimensión espacial significativa, entonces la temperatura es función de dos o tres coordenadas espaciales en vez de serlo solamente de x. Pueden aplicarse consideraciones semejantes a las que dieron la ecuación (10) para deducir la ecuación de conducción del calor en dos dimensiones

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \tag{23}$$

o en tres dimensiones

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t. \tag{24}$$

Las condiciones en la frontera correspondientes a las ecuaciones (12) y (13) para problemas multidimensionales corresponden a una distribución prescrita de temperaturas sobre la frontera, o bien, a una frontera aislada. De manera semejante, en general, la distribución inicial de temperaturas será función de x y y para la (23), y función de x, y y z para la (24).

APÉNDICE B

Deducción de la ecuación de onda. En este apéndice se deduce la ecuación de onda en una dimensión espacial, como se aplica a las vibraciones transversales de una cuerda o cable elásticos; la cuerda elástica puede ser una cuerda de violín, un tirante o quizá un cable de energía eléctrica. Sin embargo, la misma ecuación, con las variables interpretadas de modo adecuado, se presenta en muchos otros problemas ondulatorios que sólo tienen una variable espacial significativa.

Considérese una cuerda elástica perfectamente flexible, tensada firmemente entre soportes fijos al mismo nivel horizontal (ver la figura 10.B.1*a*). Supóngase que el eje x está a lo largo de la cuerda, con puntos extremos ubicados en $x = 0$ y $x = l$. Si la cuerda se pone en movimiento en algún instante inicial $t = 0$ (al jalarla por ejemplo) y a partir de entonces no se le perturba, vibrará libremente en un plano vertical siempre que se desprecien los efectos de amortiguamiento, como la resistencia del aire. Para determinar la ecuación diferencial que rige este movimiento, se considerarán las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemen-

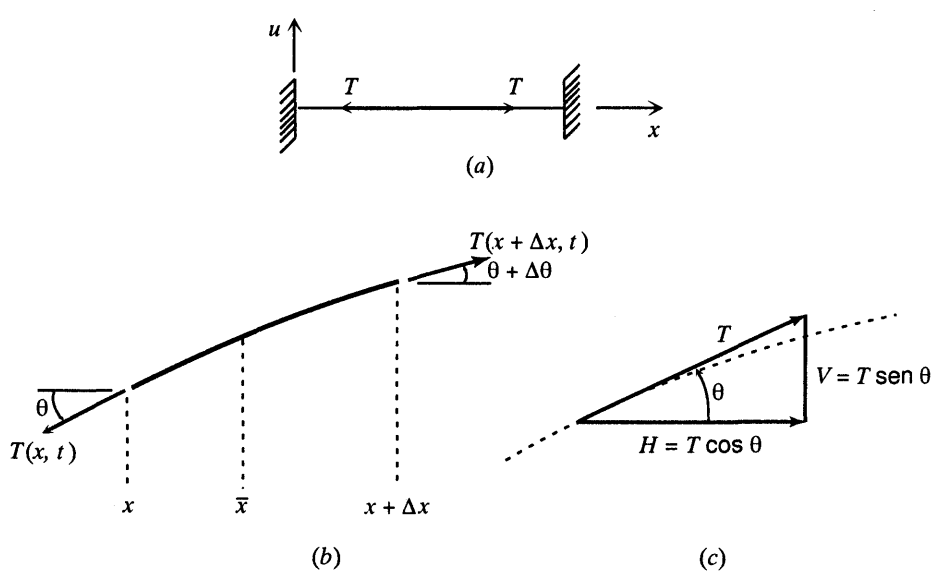


FIGURA 10.B.1 a) Cuerda elástica bajo tracción. b) Elemento de la cuerda desplazada. c) Resolución de la tensión T en componentes.

to de la cuerda, de longitud Δx, que se encuentre entre los puntos x y $x + \Delta x$ (ver la figura 10.B.1*b*). Se supone que el movimiento de la cuerda es pequeño y que, como consecuencia, cada punto de la misma se mueve únicamente en una línea vertical. El desplazamiento vertical del punto x en el instante t se denota por $u(x, t)$. Considérese que la tensión en la cuerda, que siempre actúa en dirección tangencial, se denota por $T(x, t)$ y la masa por unidad de longitud de cuerda por ρ.

La ley de Newton, según se aplica al elemento Δx de la cuerda, afirma que la fuerza neta externa, debida a la tensión en los extremos del elemento, debe ser igual al producto de la masa del elemento y la aceleración de su centro de masa. Como no hay aceleración horizontal, las componentes horizontales deben satisfacer

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \cos \theta = 0. \tag{1}$$

Si por H se denota la componente horizontal de la tensión (ver la figura 10.B.1*c*), entonces la ecuación (1) afirma que H es independiente de x.

Por otra parte, las componentes verticales satisfacen

$$T(x + \Delta x, t) \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \operatorname{sen} \theta = \rho \, \Delta x \, u_{tt}(\bar{x}, t), \tag{2}$$

en donde $\bar{x}$ es la coordenada del centro de masa del elemento de la cuerda que se está considerando. Resulta evidente que $\bar{x}$ está en el intervalo $x < \bar{x} < + \Delta x$. Se supone que el peso de la cuerda, que actúa verticalmente hacia abajo, es despreciable, por lo que se ha omitido en la ecuación (2).

Si la componente vertical de T se denota por V, entonces (2) puede escribirse como

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t).$$

Si se pasa al límite cuando $\Delta x \to 0$, da

$$V_x(x, t) = \rho u_{tt}(x, t). \tag{3}$$

Para expresar la ecuación (3) por completo en términos de u se observa que

$$V(x, t) = H(t) \tan \theta = H(t) u_x(x, t).$$

De donde, (3) queda

$$(H u_x)_x = \rho u_{tt},$$

o bien, en virtud de que H es independiente de x,

$$H u_{xx} = \rho u_{tt}. \tag{4}$$

Para movimientos pequeños de la cuerda es permisible sustituir $H = T \cos \theta$ por T. Entonces la ecuación (4) toma su forma acostumbrada

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \tag{5}$$

en donde

$$a^2 = T/\rho. \tag{6}$$

Además, se supondrá que a^2 es constante, aunque esto no se requiere en la deducción, incluso para movimientos pequeños. La ecuación (5) se llama ecuación de onda para una dimensión espacial. Dado que T tiene la dimensión de fuerza y ρ la de masa/longitud, se concluye que la constante a tiene la dimensión de velocidad. Es posible identificar a como la velocidad con la que una pequeña perturbación (onda) se desplaza a lo largo de la cuerda. Según la ecuación (6), la velocidad de la onda a varía directamente con la tensión en la cuerda, pero inversamente con la densidad del material de ésta. Estos hechos concuerdan con la experiencia.

Como en el caso de la ecuación de conducción del calor, existen varias generalizaciones de la ecuación de onda (5). Una ecuación importante se conoce como la *ecuación del telégrafo* y tiene la forma

$$u_{tt} + cu_t + ku = a^2u_{xx} + F(x, t), \tag{7}$$

en donde c y k son constante no negativas. Los términos cu_t, ku y $F(x, t)$ surgen de una fuerza de amortiguamiento viscosa, una fuerza de restitución elástica y una fuerza externa, respectivamente. Nótese la semejanza de la ecuación (7), excepto por el término a^2u_{xx}, con la ecuación del sistema resorte-masa que se dedujo en la sección 3.8; el término adicional a^2u_{xx} surge por una consideración de las fuerzas elásticas internas.

Para un sistema vibrante con más de una coordenada espacial significativa, puede ser necesario considerar la ecuación de onda en dos dimensiones

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}, \tag{8}$$

o en tres dimensiones

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \tag{9}$$

BIBLIOGRAFÍA

Los libros siguientes contienen información adicional sobre las series de Fourier:

Buck, R.C., y Buck, E. F., *Advanced Calculus* (3a ed.)(New York; McGraw-Hill).

Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals* (3a ed.)(Cambridge: Cambridge University Press, 1930); reimpreso por Dover, New York.

Courant, R., y John, F., *Introduction to Calculus and Analysis* (New York; Wiley-Interscience).

Guillemin, E. A., *The Mathematics of Circuit Analysis* (New York; Wiley).

Kaplan, W., *Advanced Calculus* (3a ed.)(Reading, Mass.: Adison-Wesley).

Una breve biografía de Fourier y una copia con anotaciones de su artículo de 1807 están contenidos en:

Grattan-Guinness, I., *Joseph Fourier 1768-1830* (Cambridge, Mass.: MIT Press).

Algunas referencias útiles sobre ecuaciones diferenciales parciales y el método de separación de variables incluyen las siguientes:

Berg, P. W. y McGregor, J. L., *Elementary Partial Differential Equations* (San Francisco: Holden-Day).

Churchill, R. V., y Brown, J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems* (3a ed.)(New York; McGraw-Hill).

Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations* (2a ed.) Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall).

Pinsky, M. A., *Introduction to Partial Differential Equations with Applications* (New York: McGraw-Hill).

Powers, D. L., *Boundary Value Problems* (2a ed.)(New York: Academic Press).

Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (New York: Wiley).

Weinberger, H. F., *A First Course in Partial Differential Equations* (New York; Wiley).

Capítulo 11 Problemas con valores en la frontera y teoría de Sturm-Liouville

Como resultado de las variables de separación en una ecuación diferencial parcial del capítulo 10, se encontró repetidas veces la ecuación diferencial

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad 0 < x < l$$

con las condiciones en la frontera

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0.$$

Este problema con valor en la frontera es el prototipo de una gran clase de problemas que son importantes en matemáticas aplicadas. Estos problemas se conocen como problemas con valores en la frontera de Sturm-Liouville. En este capítulo se analizan las propiedades más importantes de los problemas de Sturm-Liouville y de sus soluciones; en el proceso será posible generalizar un tanto el método de separación de variables para las ecuaciones diferenciales parciales.

11.1 Ocurrencia de problemas con valores en la frontera en dos puntos

Para contar con un contexto físico para este último análisis recuérdese por lo visto en la sección 10.1, el problema de conducción del calor que consta de la ecuación diferencial parcial

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0 \tag{1}$$

sujeta a las condiciones en la frontera

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2}$$

y a la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

El método de separación de variables, como se aplicó en el capítulo 10, consta de dos pasos principales: 1) la reducción de la ecuación diferencial parcial a dos (o más) ecuaciones diferenciales ordinarias y 2) el desarrollo de ciertas funciones en series de Fourier. Las funciones seno o coseno usadas al formar las series de Fourier solían aparecer como soluciones de la ecuación diferencial

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad 0 < x < l \tag{4}$$

si se satisfacen condiciones en la frontera como

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0 \tag{5}$$

o bien,

$$X'(0) = 0, \qquad X'(l) = 0. \tag{6}$$

En este capítulo se amplían y generalizan los resultados del capítulo 10. La meta principal es mostrar cómo es posible aplicar el método de separación de variables para resolver problemas algo más generales que los de las ecuaciones (1), (2) y (3). Se tiene interés en tres tipos de generalizaciones.

En primer lugar, se desea considerar ecuaciones diferenciales parciales más generales; por ejemplo, la ecuación

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t). \tag{7}$$

Esta ecuación puede surgir, como se indicó en el apéndice A del capítulo 10, en el estudio de la conducción del calor en una barra de propiedades variables en el material, en presencia de fuentes de calor. Si p y r son constantes y si los términos de la fuente qu y F son cero, entonces la ecuación (7) se reduce a la (1). La ecuación diferencial parcial (7) también se presenta en la investigación de otros fenómenos de carácter difusivo.

Una segunda generalización es permitir condiciones más generales en la frontera. En particular, se desea considerar condiciones en la frontera de la forma

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \qquad u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = 0. \tag{8}$$

Se tienen estas condiciones cuando la razón de flujo de calor a través de uno de los extremos de la barra es proporcional a la temperatura allí. Por lo general, h_1 y h_2 son constantes no negativas, pero en algunos casos pueden ser negativas o depender de t. Las condiciones en la frontera (2) se obtienen en el límite cuando $h_1 \to \infty$ y $h_2 \to \infty$. El otro caso límite importante, $h_1 = h_2 = 0$, da las condiciones en la frontera para los extremos aislados.

La generalización final que se analiza en este capítulo se relaciona con la geometría de la región en que se plantea el problema. Los resultados del capítulo 10 sólo son adecuados para una clase de problemas un tanto restringida, principalmente aquellos en los que la región de interés es rectangular o, en unos cuantos casos, circular. Más tarde, en este capítulo, se consideran ciertos problemas planteados en otras regiones geométricas.

Considérese la ecuación

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u \tag{9}$$

que se obtiene al igualar a cero el término $F(x, t)$ de la ecuación (7). A fin de separar las variables, se supone que

$$u(x, t) = X(x)T(t), \tag{10}$$

y se sustituye u de la ecuación (9); se obtiene

$$r(x)XT' = [p(x)X']'T - q(x)\,XT \tag{11}$$

o bien, al dividir entre $r(x)XT$,

$$\frac{T'}{T} = \frac{[p(x)X']'}{r(x)X} - \frac{q(x)}{r(x)} = -\lambda. \tag{12}$$

Se ha denotado la constante por separación por $-\lambda$, anticipándose al hecho de que ésta por lo general resulta real y negativa. A partir de la ecuación (12) se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes para X y T:

$$[p(x)X']' - q(x)X + \lambda r(x)X = 0, \tag{13}$$

$$T' + \lambda T = 0. \tag{14}$$

Si u dada en la ecuación (10) se sustituye en las ecuaciones (8) y se supone que h_1 y h_2 son constantes, entonces se obtienen las condiciones de la frontera

$$X'(0) - h_1X(0) = 0, \qquad X'(l) + h_2X(l) = 0. \tag{15}$$

Para continuar el proceso es necesario resolver la ecuación (13) sujeta a las condiciones en la frontera (15). Esto es una generalización del problema que consta de la ecuación diferencial (4) y las condiciones en la frontera (5) o (6). En general, el problema de resolver una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo, sujeta a condiciones en la frontera en cada extremo, se llama **problema con valores en la frontera en dos puntos**. Como contraste, en un problema con valor inicial, se prescriben los valores de la función desconocida y sus derivadas en un solo punto inicial y casi siempre se busca la solución de la ecuación diferencial en el intervalo seminfinito que se inicia allí.

Ahora resultará útil distinguir entre dos tipos de problemas lineales con valores en la frontera, a saber, problemas homogéneos y no homogéneos. La ecuación diferencial lineal de segundo orden más general es

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x). \tag{16}$$

Estas ecuaciones se clasificaron en el capítulo 3 como homogéneas si $G(x)$ es idénticamente cero y como no homogéneas, en caso contrario. De manera semejante, la condición lineal en la frontera más general en un punto $x = x_0$ es

$$a_1y(x_0) + a_2y'(x_0) = c, \tag{17}$$

en donde a_1, a_2 y c son constantes. Se dice que esta condicion en la frontera es homogénea si c es cero y no homogénea, en caso contrario. Un problema con valor en la frontera es homogéneo si tanto la ecuación diferencial como todas las condiciones en la frontera son homogéneas; si no es así, el problema es no homogéneo. Un problema típico lineal homogéneo de segundo orden con valores en la frontera es de la forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{18}$$

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \tag{19}$$

$$b_1y(1) + b_2y'(1) = 0. \tag{20}$$

El problema dado por las ecuaciones (13) y (15) también es lineal y homogéneo. Los problemas no homogéneos con valores en la frontera se identifican con facilidad por la presencia en la ecuación diferencial, o en una condición en la frontera, de por lo menos un término diferente de cero que es independiente de y y de sus derivadas.

Como se indica mediante las ecuaciones (18) a (20), se suelen considerar problemas planteados sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Se cumplen resultados correspondientes para problemas planteados sobre un intervalo finito arbitrario. De hecho, si el intervalo es originalmente $\alpha \leq s \leq \beta$, es posible transformarlo hacia $0 \leq x \leq 1$ por el cambio de variable $x = (s - \alpha)/(\beta - \alpha)$.

También se pueden tener problemas con valores en la frontera con ecuaciones diferenciales de orden superior; en ellos, el número de condiciones en la frontera debe ser igual al orden de la ecuación diferencial. Como regla, el orden de la ecuación diferencial es par y se dan la mitad de las condiciones en la frontera en cada extremo del intervalo básico. También es posible que una sola condición en la frontera comprenda valores de la solución o de sus derivadas o ambas cosas, los dos puntos frontera; por ejemplo,

$$y(0) - y(1) = 0. \tag{21}$$

En este capítulo se analizan algunas de las propiedades de las soluciones de los problemas con valores en la frontera en dos puntos para ecuaciones lineales de segundo orden. En donde sea conveniente, se considerará la ecuación lineal general (16), o bien, la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{22}$$

obtenida al dividir ésta entre $P(x)$. Sin embargo, para la mayoría de los fines es mejor analizar ecuaciones en las que los términos en la primera y segunda derivadas estén relacionados como en la ecuación (13). Se observa que siempre es posible transformar la ecuación general (16) de modo que los términos en las derivadas aparezcan como en (13) (ver el problema 7). Se encontrará que las soluciones del problema (13), (15) son muy semejantes, en muchos aspectos importantes, a las soluciones $\operatorname{sen}(n\pi x/l)$ del problema simple (4), (5). En especial, se pueden utilizar las soluciones de las ecuaciones (13) y (15) para construir soluciones en serie de diversos problemas de ecuaciones diferenciales parciales. Con fines ilustrativos se usará el problema de conducción del calor compuesto por la ecuación diferencial parcial (7), las condiciones en la frontera (8) y la condición inicial (3).

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6 diga si el problema dado con valores en la frontera es homogéneo o no homogéneo.

1. $y'' + 4y = 0, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $[(1 + x^2)y']' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
3. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
4. $-y'' + x^2y = \lambda y, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$
5. $-[(1 + x^2)y']' = \lambda y + 1, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
6. $-y'' = \lambda(1 + x^2)y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) + 3y(1) = 0$

7. Considere la ecuación general lineal homogénea de segundo orden

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{i}$$

Se busca un factor integrante $\mu(x)$ tal que, una vez que se multiplica la ecuación (i) por $\mu(x)$, la ecuación resultante se puede escribir en la forma

$$[\mu(x)P(x)y']' + \mu(x)R(x)y = 0. \tag{ii}$$

a) Al igualar los coeficientes de y', demuestre que μ debe ser una solución de

$$P\mu' = (Q - P')\mu. \tag{iii}$$

b) Resuelva la ecuación (iii) y de esta manera demuestre que

$$\mu(x) = \frac{1}{P(x)} \exp \int_{x_0}^{x} \frac{Q(s)}{P(s)}\, ds. \tag{iv}$$

Compare este resultado con el del problema 27 de la sección 3.2.

En cada uno de los problemas 8 a 11 aplique el método del problema 7 para transformar la ecuación dada en la forma $[p(x)y']' + q(x)y = 0$.

8. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$ Ecuación de Hermite
9. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$ Ecuación de Bessel
10. $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0,$ Ecuación de Laguerre
11. $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$ Ecuación de Chebyshev
12. La ecuación

$$u_{tt} + cu_t + ku = a^2u_{xx} + F(x, t), \tag{i}$$

en donde $a^2 > 0$, $c \geq 0$ y $k \geq 0$ son constantes, se conoce como **ecuación del telégrafo** y se presenta en el estudio de una cuerda elástica sometida a tracción (ver el apéndice B del capítulo 10). Esta ecuación también se presenta en otras aplicaciones.

Si se supone que $F(x, t) = 0$, haga $\mu(x, t) = X(x)\,T(t)$, separe las variables de la ecuación (i) y deduzca las ecuaciones diferenciales ordinarias para X y T.

11.2 Problemas lineales homogéneos con valores en la frontera: eigenvalores y eigenfunciones

Considérese el problema con valores en la frontera que consta de ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

y las condiciones en la frontera

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \qquad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0. \tag{2}$$

Según las definiciones de la sección 11.1, el problema con valores en la frontera (1), (2) es lineal y homogéneo. Por el teorema 3.2.1, un problema con valor inicial para la ecuación diferencial (1) tiene una solución única sobre cualquier intervalo alrededor del punto inicial en el que las funciones p y q son continuas. Para el problema con valores en la frontera (1), (2) no es posible afirmar algo tan amplio. En primer lugar, todos los problemas homogéneos tienen la solución $y = 0$. Esta solución trivial suele no ser de interés, el tema importante es si existen otras soluciones, no triviales. Si se supone que $y = \phi(x)$ es esa solución, entonces por la naturaleza lineal homogénea del problema se concluye que $y = k\phi(x)$ también es una solución para cualquier valor de la constante k. Por tanto, correspondiendo a una solución no trivial ϕ existe una familia infinita de soluciones, cada uno de cuyos miembros es proporcional a ϕ. Para problemas de la forma (1), (2) es posible demostrar que existe cuando más de una de esas familias de soluciones no triviales (ver la sección 11.3). Sin embargo, para problemas más generales de segundo orden con valores en la frontera puede haber dos familias de soluciones correspondientes a dos soluciones linealmente independientes ϕ_1 y ϕ_2. Las tres posibilidades (soluciones no triviales, una sola familia infinita de soluciones y una familia doblemente infinita de soluciones) se ilustran en los tres ejemplos siguientes.

Ejemplo 1 Encontrar $y = \phi(x)$ que satisfaga

$$y'' + y = 0, \tag{3}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x.$$

Dado que $y(0) = c_2$, la primera condición en la frontera requiere que $c_2 = 0$; entonces, se tiene $y = c_1 \operatorname{sen} x$ y $y(1) = c_1 \operatorname{sen} 1$. Como $\operatorname{sen} 1 \neq 0$, la segunda condición en la frontera requiere que $c_1 = 0$. Por tanto, la única solución es $\phi(x) = 0$, la solución trivial.

Ejemplo 2 Encontrar $y = \phi(x)$ que satisfaga

$$y'' + \pi^2 y = 0, \tag{4}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Ahora la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 \operatorname{sen} \pi x + c_2 \cos \pi x,$$

y se satisface la primera condición en la frontera si $c_2 = 0$. La función $y = c_1 \operatorname{sen} \pi x$ también satisface la segunda condición en la frontera para cualquier constante c_1 en tanto $\operatorname{sen} \pi = 0$. Así, $\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} \pi x$, en donde c_1 es arbitraria. Por tanto, el problema dado tiene una sola familia infinita de soluciones, cada una de las cuales es múltiplo de $\operatorname{sen} \pi x$.

Ejemplo 3 Encontrar $y = \phi(x)$ que cumpla

$$y'' + \pi^2 y = 0,$$

$$y(0) + y(1) = 0, \qquad y'(0) + y'(1) = 0. \tag{5}$$

Una vez más, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 \operatorname{sen} \pi x + c_2 \cos \pi x. \tag{6}$$

Si se aplica la primera condición en la frontera, se tiene

$$y(0) + y(1) = c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 + c_1 \operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi = 0 + c_2 + 0 - c_2 = 0.$$

Por tanto, la primera condición en la frontera no impone restricciones sobre las constantes arbitrarias c_1 y c_2. De manera semejante, también se satisface la segunda condición en la frontera para todos los valores de c_1 y c_2. De este modo, la función $y = \phi(x)$ dada por la ecuación (6) es en realidad la solución más general del problema con valores en la frontera. En este caso existen dos familias infinitas de soluciones, una proporcional a $\phi_1(x) = \operatorname{sen} \pi x$ y la otra proporcional a $\phi_2(x) = \cos \pi x$ y la propia es una combinación lineal de ellas. Nótese también que las condiciones en la frontera no son de la forma (2), dado que cada una comprende los dos puntos de la frontera.

De manera más general, a menudo se desea considerar un problema con valores en la frontera en el que la ecuación diferencial contenga un parámetro arbitrario λ; por ejemplo,

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{7}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0. \tag{8}$$

Si $\lambda = 1$ o $\lambda = \pi^2$, se obtienen los problemas que se presentan en los ejemplos 1 y 2, respectivamente. En estos ejemplos se encontró que si $\lambda = 1$, el problema (7), (8) sólo tiene solución trivial, mientras que si $\lambda = \pi^2$, entonces el problema tiene soluciones no triviales. Esto origina la cuestión de qué sucede cuando λ toma algún otro valor.

El problema con valores en la frontera (7), (8) se consideró con detalle en la sección 10.1 y también apareció en las secciones 10.6 y 10.7. En todos esos lugares, el parámetro λ se presentó como una constante de separación. En la sección 10.1 se demostró que sólo existen soluciones no triviales de este problema para ciertos valores reales de λ; a saber,

$$\lambda = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots, n^2\pi^2, \ldots. \tag{9}$$

Para otros valores de λ solamente se tiene la solución trivial. Los valores dados por la ecuación (9) se llaman **eigenvalores** del problema con valores en la frontera (7), (8). Las soluciones no triviales correspondientes $\phi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$ son las **eigenfunciones**. La existencia de esos valores y funciones es típica de los problemas lineales homogéneos con valores en la frontera que contienen un parámetro.

En problemas que se presentan en la física, los eigenvalores y las eigenfunciones suelen tener importantes interpretaciones físicas. Por ejemplo, el problema (7), (8) se presenta en el estudio de la cuerda elástica vibrante (sección 10.6). Allí, los eigenvalores son proporcionales a los cuadrados de las frecuencias naturales de la vibración de la cuerda, y las eigenfunciones describen la configuración de la cuerda cuando ésta se encuentra vibrando en uno de sus nodos naturales.

Considérese ahora el tema de la existencia de eigenvalores y eigenfunciones para un problema más general. Considérese la ecuación diferencial

$$y'' + p(x, \lambda)y' + q(x, \lambda)y = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{10}$$

cuyos coeficientes dependen de un parámetro λ y de las condiciones en la frontera (2). ¿Para cuáles valores de λ, en caso de haberlos, existen soluciones no triviales del problema dado con valores en la frontera? Se supondrá que las funciones p y q son continuas para $0 \leq x \leq 1$ y para todos los valores de λ.

La solución general de la ecuación (10) debe depender tanto de x como de λ y es posible escribirla en la forma

$$y = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda), \tag{11}$$

en donde y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (10). Si se sustituye y en las condiciones en la frontera (2) se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} &c_1[a_1 y_1(0, \lambda) + a_2 y_1'(0, \lambda)] + c_2[a_1 y_2(0, \lambda) + a_2 y_2'(0, \lambda)] = 0, \\ &c_1[b_1 y_1(1, \lambda) + b_2 y_1'(1, \lambda)] + c_2[b_1 y_2(1, \lambda) + b_2 y_2'(1, \lambda)] = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

para c_1 y c_2. Este conjunto de ecuaciones lineales homogéneas tiene soluciones (diferentes de $c_1 = c_2 = 0$) si y sólo si el determinante de los coeficientes $D(\lambda)$ es cero; es decir, si y sólo si

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 y_1(0, \lambda) + a_2 y_1'(0, \lambda) & a_1 y_2(0, \lambda) + a_2 y_2'(0, \lambda) \\ b_1 y_1(1, \lambda) + b_2 y_1'(1, \lambda) & b_1 y_2(1, \lambda) + b_2 y_2'(1, \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Los valores de λ, si los hay, que satisfacen esta ecuación determinantal son los eigenvalores del problema con valores en la frontera (10), (2). Correspondiendo a cada eigenvalor existe por lo menos una solución no trivial, una eigenfunción, que se determina cuando más hasta una constante multiplicativa arbitraria.

Debido a la manera arbitraria en la que λ aparece en la ecuación diferencial (10), es difícil decir más sobre los eigenvalores y las eigenfunciones del problema con valores en la frontera (10), (2).

Por consiguiente, ahora el análisis se restringe a los problemas en los que el coeficiente p de la (10) es independiente de λ y el coeficiente q es una función lineal de λ. Para cierta clase de problemas de este tipo existe una teoría bien desarrollada: este es el tema de secciones posteriores de este capítulo. Es favorable que esta clase de problemas en la frontera en dos puntos incluya también muchos de significado práctico, como los que surgen en el estudio de la ecuación de conducción de calor, la ecuación de onda o la ecuación del potencial en el capítulo 10, o sus generalizaciones mencionadas en la sección 11.1. El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de los eigenvalores y eigenfunciones.

Ejemplo 4 Encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones correspondientes del problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{14}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(1) + y(1) = 0. \tag{15}$$

Un campo en el que se presenta este problema es en la conducción del calor en una barra de longitud unitaria. La condición en la frontera en $x = 0$ corresponde a una temperatura cero allí. La condición en la frontera en $x = 1$ corresponde a una razón de flujo de calor que es proporcional a la temperatura en ese punto, y las unidades se eligen de modo que la constante de proporcionalidad sea uno (ver el apéndice A del capítulo 10).

La solución de la ecuación diferencial puede tener una de varias formas, dependiendo de λ, por lo que es necesario considerar varios casos. En primer lugar, si $\lambda = 0$, la solución de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 x + c_2. \tag{16}$$

Las dos condiciones en la frontera requieren que

$$c_2 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 = 0, \tag{17}$$

respectivamente. La única solución de las ecuaciones (17) es $c_1 = c_2 = 0$, de modo que, en este caso, el problema con valores en la frontera no tiene solución no trivial. De donde, $\lambda = 0$ no es un eigenvalor.

Si $\lambda > 0$, entonces la solución general de la ecuación diferencial (14) es

$$y = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}\, x, \tag{18}$$

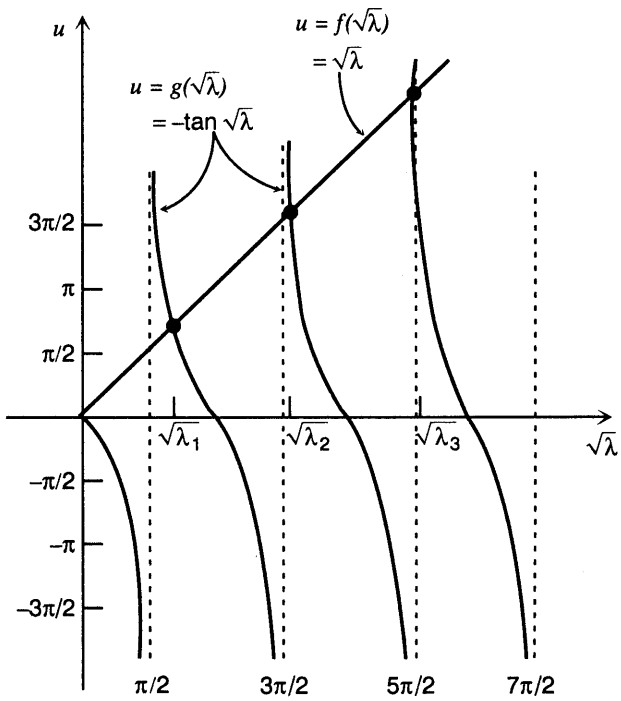


FIGURA 11.2.1 Solución gráfica de $\sqrt{\lambda} = -\tan \sqrt{\lambda}$.

en donde $\sqrt{\lambda} > 0$. La condición en la frontera en $x = 0$ requiere que $c_2 = 0$; entonces, por la condición en la frontera en $x = 1$ se obtiene la ecuación

$$c_1(\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Para que exista una solución no trivial y debe tenerse $c_1 \neq 0$ y, por tanto, λ debe satisfacer

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0. \tag{19}$$

Nótese que si λ es tal que $\cos\sqrt{\lambda} = 0$, entonces $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} \neq 0$ y no se satisface la ecuación (19). Por tanto, es posible suponer que $\cos\sqrt{\lambda} \neq 0$; si se divide (19) entre $\cos\sqrt{\lambda}$, se obtiene

$$\sqrt{\lambda} = -\tan\sqrt{\lambda}. \tag{20}$$

Las soluciones de la ecuación (20) pueden determinarse numéricamente. También es posible hallarlas aproximadamente al trazar las gráficas de $f(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}$ y $g(\sqrt{\lambda}) = -\tan\sqrt{\lambda}$ para $\sqrt{\lambda}\,0$, en el mismo conjunto de ejes y al identificar los puntos de intersección de las dos curvas (ver la figura 11.2.1). El punto $\sqrt{\lambda} = 0$ se excluye específicamente de este razonamiento porque la solución (18) solamente es válida para $\sqrt{\lambda} \neq 0$. A pesar del hecho de que las curvas se intersecan allí, $\lambda = 0$ no es un eigenvalor, como ya se ha demostrado. La primera solución positiva de la ecuación (20) es $\sqrt{\lambda_1} \cong 2.029$. Como puede verse en la figura 11.2.1, las otras raíces se dan con exactitud razonable por $\sqrt{\lambda_n} \cong (2n-1)\pi/2$, para $n = 2, 3, \ldots$, y la precisión de esta estimación mejora a medida que n crece. De donde, los eigenvalores son

$$\lambda_1 \cong 4.116, \qquad \lambda_n \cong (2n-1)^2\pi^2/4 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots. \tag{21}$$

Finalmente, como $c_2 = 0$, la eigenfunción correspondiente al eigenvalor λ_n es

$$\phi_n(x, \lambda_n) = k_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x; \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

en donde la constante k_n sigue siendo arbitraria.

A continuación, considérese $\lambda < 0$. En este caso, es conveniente hacer $\lambda = -\mu$, de modo que $\mu > 0$. Entonces, la ecuación (14) queda

$$y'' - \mu y = 0, \tag{23}$$

y su solución general es

$$y = c_1 \operatorname{senh}\sqrt{\mu}x + c_2 \cosh\sqrt{\mu}x, \tag{24}$$

en donde $\sqrt{\mu} > 0$. Si se procede como en el caso anterior, se encuentra que μ debe satisfacer la ecuación

$$\sqrt{\mu} = -\tanh\sqrt{\mu}. \tag{25}$$

Con base en la figura 11.2.2 resulta evidente que las gráficas de $f(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$ y $g(\sqrt{\mu}) = -\tanh\sqrt{\mu}$ sólo se intersecan en el origen. De donde, no existen valores positivos de μ que satisfagan la ecuación (25) y, por lo tanto, el problema con valores en la frontera (14), (15) no tiene eigenvalores negativos.

Por último, es necesario considerar la posibilidad de que λ pueda ser complejo. Es posible demostrar por cálculo directo que el problema (14), (15) no tiene eigenvalores complejos. Sin embargo, en la sección 11.3 se considera con más detalle una gran clase de problemas que incluye este ejemplo. Una de las cosas que se demuestran allí es que todo problema de esta

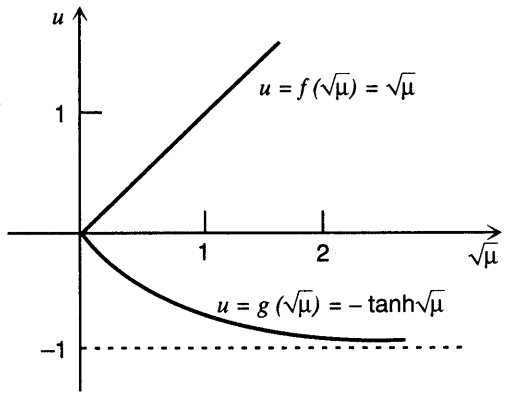


FIGURA 11.2.2 Solución gráfica de $\sqrt{\mu} = -\tanh\sqrt{\mu}$.

clase sólo tiene eigenvalores reales. Por consiguiente, aquí se omite el análisis de la no existencia de eigenvalores complejos. De este modo, se concluye que todos los eigenvalores y eigenfunciones del problema (14), (15) se expresan por las ecuaciones (21) y (22).

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4 encuentre los eigenvalores y eigenfunciones del problema dado con valores en la frontera. Suponga que todos los eigenvalores son reales.

1. $y'' + \lambda y = 0$
   $y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

2. $y'' + \lambda y = 0$
   $y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$

3. $y'' + \lambda y = 0$
   $y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

4. $y'' - \lambda y = 0$
   $y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

En cada uno de los problemas 5 a 8, determine la forma de las eigenfunciones y la ecuación determinantal satisfecha por los eigenvalores diferentes de cero. Determine si $\lambda_1 = 0$ es un eigenvalor y encuentre un valor aproximado para λ_1, el eigenvalor diferente de cero con menor valor absoluto. Calcule λ_n para valores grandes de n. Suponga que todos los eigenvalores son reales.

5. $y'' - \lambda y = 0$
   $y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$

6. $y'' + \lambda y = 0$
   $y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0$

7. $y'' + \lambda y = 0$
   $y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$

8. $y'' + \lambda y = 0$
   $y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$

9. Considere el problema con valores en la frontera

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

a) Introduzca una nueva variable dependiente u mediante la relación $y = s(x)u$. Determine $s(x)$ de modo que la ecuación diferencial para u no tenga término en u'.
b) Resuelva el problema con valores en la frontera para u y determine de esta manera los eigenvalores y eigenfunciones del problema original. Suponga que todos los eigenvalores son reales.

c) Resuelva también directamente el problema dado (sin introducir u).

*10. Considere el problema con valores en la frontera

$$y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(l) = 0.$$

a) Determine, por lo menos aproximadamente, los eigenvalores reales y las eigenfunciones correspondientes al proceder como en el problema 9(a, b).

b) Resuelva también directamente el problema dado (sin introducir una nueva variable).

Sugerencia: en el inciso a), considere con todo cuidado las condiciones en la frontera, así como la ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales de los problemas 11 y 12 difieren de las de los problemas anteriores en que el parámetro λ multiplica los términos en y', así como el término en y. En cada uno de estos problemas, determine los eigenvalores y las eigenfunciones correspondientes.

11. $y'' + y' + \lambda(y' + y) = 0$
$y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$

*12. $x^2y'' - \lambda(xy' - y) = 0$
$y(1) = 0, \qquad y(2) - y'(2) = 0$

13. Considere el problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 2y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

a) Halle la ecuación determinantal satisfecha por los eigenvalores positivos. Demuestre que existe una sucesión infinita de esos eigenvalores y que $\lambda_n \cong (2n + 1)\pi/2$ para n grande.

b) Encuentre la ecuación determinantal satisfecha por los eigenvalores negativos. Demuestre que existe exactamente un eigenvalor negativo.

*14. Considere el problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad \alpha y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0,$$

en donde α es una constante real dada.

a) Demuestre que para todos los valores de α existe una sucesión infinita de eigenvalores positivos.

b) Si $\alpha < 1$, demuestre que todos los eigenvalores (reales) son positivos. Demuestre que el eigenvalor más pequeño tiende a cero cuando α tiende a uno desde abajo.

c) Demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor sólo si $\alpha = 1$.

d) Si $\alpha > 1$, demuestre que existe exactamente un eigenvalor negativo y que este eigenvalor decrece cuando α crece.

15. Considere el problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(l) = 0.$$

Demuestre que si ϕ_m y ϕ_n son eigenfunciones, correspondientes a los eigenvalores λ_m y λ_n, son respectivamente, con $\lambda_m \neq \lambda_n$, entonces

$$\int_0^l \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0.$$

Sugerencia: observe que

$$\phi_m'' + \lambda_m\phi_m = 0, \qquad \phi_n'' + \lambda_n\phi_n = 0.$$

Multiplique la primera de estas ecuaciones por ϕ_n, la segunda por ϕ_m e integre desde 0 hasta l mediante integración por partes.

*16. En este problema se considera un problema de eigenvalores de orden superior. En el estudio de las vibraciones transversales de una barra elástica uniforme se llega a la ecuación diferencial

$$y^{iv} - \lambda y = 0,$$

en donde y es el desplazamiento transversal y $\lambda = m\omega^2/EI$; m es la masa por unidad de longitud de la barra, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal en torno al eje que pasa por el centroide perpendicular al plano de vibración y ω es la frecuencia de vibración. Por tanto, para una barra cuyas propiedades del material y geométricas se conozcan, los eigenvalores determinan las frecuencias naturales de vibración. Las condiciones en la frontera en cada uno de los extremos suelen ser de uno de los tipos siguientes:

$y = y' = 0,$	extremo sujeto,
$y = y'' = 0,$	extremo simplemente apoyado o articulado
$y'' = y''' = 0,$	extremo libre.

Para cada uno de los tres casos siguientes, encuentre la forma de las eigenfunciones y la ecuación satisfecha por los eigenvalores de este problema con valores en la frontera de cuarto orden. Determine, por lo menos aproximadamente, el menor eigenvalor λ_1. Suponga que los eigenvalores son reales y positivos.

a) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(l) = y''(l) = 0$
b) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0$
c) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0$ (barra voladiza o cantilever)

*17. En este problema se ilustra que el parámetro eigenvalor algunas veces aparece en las condiciones en la frontera, así como en la ecuación diferencial. Considere las vibraciones longitudinales de una barra elástica recta uniforme de longitud l. Es posible demostrar que el desplazamiento axial $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$(E/\rho)u_{xx} = u_{tt}; \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0 \tag{i}$$

en donde E es el módulo de Young y ρ es la masa por unidad de volumen. Si el extremo $x = 0$ está fijo, entonces la condición en la frontera allí es

$$u(0, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{ii}$$

Suponga que el extremo $x = l$ está sujeto rígidamente a una masa m, y que ésta es su única restricción. Se pueden obtener las condiciones en la frontera aquí al escribir la ley de Newton para la masa. Con base en la teoría de la elasticidad, es posible demostrar que la fuerza ejercida por la barra sobre la masa se expresa por $-EAu_x(l, t)$; de donde, la condición en la frontera es

$$EAu_x(l, t) + mu_{tt}(l, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{iii}$$

a) Suponga que $u(x, t) = X(x)T(t)$ y demuestre que $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales.

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{iv}$$

$$T'' + \lambda(E/\rho)T = 0. \tag{v}$$

b) Demuestre que las condiciones en la frontera son

$$X(0) = 0, \qquad X'(l) - \gamma\lambda l X(t) = 0, \tag{vi}$$

en donde $\gamma = m/\rho A l$ es un parámetro adimensional que da la razón de la masa en el extremo a la masa de la barra.
Sugerencia: aplique la ecuación diferencial para $T(t)$ al simplificar la condición en la frontera en $x = l$.
c) Determine la forma de las eigenfunciones y la ecuación satisfecha por los eigenvalores reales de las ecuaciones (iv) y (vi). Encuentre los dos primeros eigenvalores λ_1 y λ_2 si $\gamma = 0.5$.

11.3 Problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera

A continuación se consideran los problemas con valores en la frontera en dos puntos del tipo que se obtuvo en la sección 11.1 al separar las variables en un problema de conducción del calor para una barra con propiedades variables del material y con un término fuente proporcional a la temperatura. Este tipo de problema también se presenta en muchas otras aplicaciones.

Estos problemas con valores en la frontera comúnmente se asocian a los nombre de Sturm y Liouville.[1] Constan de una ecuación diferencial de la forma

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \tag{1}$$

sobre el intervalo $0 < x < 1$, junto con las condiciones en la frontera

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \cdot \tag{2}$$

en los extremos. A menudo es conveniente introducir el operador diferencial lineal homogéneo L definido por

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y. \tag{3}$$

Entonces la ecuación diferencial (1) se puede escribir como

$$L[y] = \lambda r(x)y. \tag{4}$$

Se supone que las funciones p, p', q y r son continuas sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y, además, que $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en todos los puntos en $0 \leq x \leq 1$. Estas suposiciones son necesarias para hacer que la teoría sea lo más sencilla posible en tanto se conserva una

[1] Charles-François Sturm (1803-1855) y Joseph Liouville (1809-1882), en una serie de artículos en 1836 y 1837, establecieron muchas propiedades de la clase de problemas con valores en la frontera asociados con sus nombres, incluyendo los resultados enunciados en los teoremas 11.3.1 a. 11.3.4. Sturm también es famoso por un teorema sobre el número de ceros reales de un polinomio y, además, realizó un amplio trabajo en física y mecánica. Además de su propia investigación en análisis, álgebra y teoría de números, Liouville fue el fundador, y durante 39 años el editor, de la importante *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Uno de sus resultados más relevantes fue la demostración (en 1884) de la existencia de los números trascendentes.

generalidad considerable. Resulta que estas condiciones son satisfechas en muchos problemas importantes de la física matemática. Por ejemplo, la ecuación $y'' + \lambda y = 0$, que se presentó repetidas veces en el capítulo anterior, es de la forma (1) con $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $r(x) = 1$. Se dice que las condiciones en la frontera (2) están **separadas**, es decir, cada una sólo comprende uno de los puntos frontera. Estas son las condiciones separadas en la frontera más generales posibles para una ecuación diferencial de segundo orden.

Antes de proceder a establecer algunas de las propiedades del problema de Sturm-Liouville (1), (2), es necesario deducir una identidad, conocida como **identidad de Lagrange**, que es básica para el estudio de problemas lineales con valores en la frontera. Sean u y v funciones que tienen segundas derivadas continuas sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$; entonces[2]

$$\int_0^1 L[u]v\,dx = \int_0^1 \{-(pu')'v + quv\}\,dx.$$

Si se integra dos veces por partes el primer término del segundo miembro, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 L[u]v\,dx &= -p(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 + p(x)u(x)v'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \{-u(pv')' + uqv\}\,dx \\ &= -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1 + \int_0^1 uL[v]\,dx.\end{aligned}$$

De donde, al trasponer la integral del segundo miembro, se tiene

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1, \tag{5}$$

que es la identidad de Lagrange.

Supóngase ahora que las funciones u y v de la ecuación (5) también satisfacen las condiciones en la frontera (2). Entonces, si se supone que $a_2 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, el segundo miembro queda

$$\begin{aligned}&-p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1 \\ &\quad = -p(1)[u'(1)v(1) - u(1)v'(1)] + p(0)[u'(0)v(0) - u(0)v'(0)] \\ &\quad = -p(1)\left[-\frac{b_1}{b_2}u(1)v(1) + \frac{b_1}{b_2}u(1)v(1)\right] + p(0)\left[-\frac{a_1}{a_2}u(0)v(0) + \frac{a_1}{a_2}u(0)v(0)\right] \\ &\quad = 0.\end{aligned}$$

Se cumple el mismo resultado si a_2, o bien, b_2 es cero; en este caso, la demostración es todavía más sencilla y se deja al lector. Por tanto, para el operador diferencial L definido por la ecuación (3) y si las funciones u y v satisfacen las condiciones en la frontera (2), la identidad de Lagrange se reduce a

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = 0. \tag{6}$$

A continuación, escríbase la ecuación (6) de manera ligeramente distinta. En la sección 10.2 se introdujo el producto interno (u, v) de dos funciones u y v de valores reales sobre un intervalo dado; si se usa el intervalo $0 \leq x \leq 1$, se tiene

[2] Por brevedad, algunas veces se usa la notación $\int_0^1 f\,dx$ en vez de $\int_0^1 f(x)\,dx$ en este capítulo.

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx. \tag{7}$$

Con esta notación, la ecuación (6) queda

$$(L[u], v) - (u, L[v]) = 0. \tag{8}$$

Al probar el teorema 11.3.1 a continuación es necesario tratar con funciones de valores complejos. Por analogía con la definición de la sección 7.2 para los vectores, se define el producto interno de dos funciones de valores complejos sobre $0 \leq x \leq 1$ como

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\bar{v}(x)\,dx, \tag{9}$$

en donde $\bar{v}$ es el complejo conjugado de v. Resulta evidente que la ecuación (9) coincide con la (7), si $u(x)$ y $v(x)$ son reales. Es importante saber que la (8) sigue siendo válida en las condiciones enunciadas si u y v son funciones de valores complejos y si se emplea el producto interno (9). Para ver esto, es posible empezar con la cantidad $\int_0^1 L[u]\bar{v}\,dx$ y repetir los pasos que dan la ecuación (6), si se aplica el hecho de que $p(x)$, $q(x)$, a_1, a_2, b_1 y b_2 son todas cantidades reales (ver el problema 22).

Considérese ahora, algunas de las implicaciones de la ecuación (8) para el problema de Sturm-Liouville con valores en la frontera (1), (2). Se supondrá sin demostración[3] que este problema tiene en realidad eigenvalores y eigenfunciones. En los teoremas 11.3.1 a 11.3.4 que se plantean a continuación se expresan varias de sus propiedades importantes, aunque relativamente elementales. Cada una de estas propiedades se ilustra ante el muy sencillo problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0, \tag{10}$$

cuyos eigenvalores son $\lambda_n = n^2\pi^2$, con las eigenfunciones correspondientes $\phi_n(x) = \text{sen } n\pi x$.

Teorema 11.3.1 Todos los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville (1), (2) son reales.

Para probar este teorema supóngase que λ es un eigenvalor (posiblemente complejo) del problema (1), (2) y que ϕ es una eigenfunción correspondiente, quizá también de valores complejos. Escríbase $\lambda = \mu + iv$ y $\phi(x) = U(x) + iV(x)$, en donde μ, v, $U(x)$ y $V(x)$ son reales. Entonces, si se hace $u = \phi$ y también $v = \phi$ en la ecuación (8), se tiene

$$(L[\phi], \phi) = (\phi, L[\phi]). \tag{11}$$

Sin embargo, se sabe que $L[\phi] = \lambda r\phi$, por lo que la ecuación (11) queda

$$(\lambda r\phi, \phi) = (\phi, \lambda r\phi), \tag{12}$$

[3] Se puede hallar la demostración, por ejemplo, en la bibliografía de Sagan (capítulo 5) o de Birkhoff y Rota (capítulo 10).

Si se escribe completa la ecuación (12) y se aplica la definición (9) de producto interno, se obtiene

$$\int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)\,dx = \int_0^1 \phi(x)\bar{\lambda}\bar{r}(x)\bar{\phi}(x)\,dx. \tag{13}$$

En virtud de que $r(x)$ es real, entonces (13) se reduce a

$$(\lambda - \bar{\lambda})\int_0^1 r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)\,dx = 0,$$

o bien,

$$(\lambda - \bar{\lambda})\int_0^1 r(x)[U^2(x) + V^2(x)]\,dx = 0. \tag{14}$$

El integrando de la ecuación (14) es no negativo y no idénticamente a cero. Dado que el integrando también es continuo, se concluye que la integral es positiva. Por consiguiente, el factor $\lambda - \bar{\lambda} = 2iv$ debe ser cero. De donde $v = 0$ y λ es real, con lo que se prueba el teorema.

Una consecuencia importante del teorema 11.3.1 es que al hallar los eigenvalores y eigenfunciones de problema de Sturm-Liouville con valores en la frontera, sólo se requiere buscar eigenvalores reales. También es posible demostrar que las eigenfunciones del problema con valores en la frontera (1), (2) son reales. En el problema 23 se describe una demostración.

Teorema 11.3.2 Si ϕ_1 y ϕ_2 son dos eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville (1), (2) correspondientes a los eigenvalores λ_1 y λ_2, respectivamente, y si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces

$$\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

Este teorema expresa la propiedad de **ortogonalidad** de las eigenfunciones con respecto a la función de peso r. Para probar el teorema se observa que ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$L[\phi_1] = \lambda_1 r\phi_1 \tag{16}$$

y

$$L[\phi_2] = \lambda_2 r\phi_2, \tag{17}$$

respectivamente. Si se hace $u = \phi_1$, $v = \phi_2$ y se sustituyen $L[u]$ y $L[v]$ en la ecuación (8), se obtiene

$$(\lambda_1 r\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, \lambda_2 r\phi_2) = 0,$$

o bien, si se utiliza la (9),

$$\lambda_1 \int_0^1 r(x)\phi_1(x)\bar{\phi}_2(x)\,dx - \bar{\lambda}_2 \int_0^1 \phi_1(x)\bar{r}(x)\bar{\phi}_2(x)\,dx = 0.$$

Debido a que λ_2, $r(x)$ y $\phi_2(x)$ son todos reales, esta ecuación queda

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx = 0. \tag{18}$$

Como por hipótesis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que ϕ_1 y ϕ_2 deben satisfacer la ecuación (15) y queda probado el teorema.

Teorema 11.3.3 Todos los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville (1), (2) son sencillos; es decir, a cada eigenvalor sólo le corresponde una eigenfunción linealmente independiente. Además, los eigenvalores forman una sucesión infinita que es posible ordenar según la magnitud creciente, de modo que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots.$$

Es más, $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

La demostración de este teorema es algo más avanzada que la de los dos teoremas precedentes, por lo que se omitirá. Sin embargo, en el problema 20 se indica una demostración de que los eigenvalores son sencillos.

Una vez más se observa que todas las propiedades expresadas en los teoremas 11.3.1 a 11.3.3 son ejemplificadas por los eigenvalores $\lambda_n = n^2\pi^2$ y las eigenfunciones $\phi_n(x) = \text{sen } n\pi x$ del problema ejemplo (10). Es evidente que los eigenvalores son reales. Las eigenfunciones satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^1 \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \int_0^1 \text{sen } m\pi x \text{ sen } n\pi x\,dx = 0, \qquad m \neq n, \tag{19}$$

que se estableció en la sección 10.2 por otro método. Además, se pueden ordenar los eigenvalores de modo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, y $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Por último, a cada eigenvalor le corresponde una sola eigenfunción linealmente independiente.

A continuación se supondrá que los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville (1), (2) están ordenados como se indica en el teorema 11.3.3. Asociado con el eigenvalor λ_n está una eigenfunción correspondiente ϕ_n, determinada hasta una constante multiplicativa. A menudo es conveniente elegir la constante arbitraria que multiplica a cada eigenfunción de modo que satisfaga la condición

$$\int_0^1 r(x)\phi_n^2(x)\,dx = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

La ecuación (20) se llama condición de normalización y se dice que las eigenfunciones que satisfacen están **normalizadas**. De hecho, en este caso, se dice que las eigenfunciones forman un **conjunto ortonormal** (con respecto a la función de peso r) debido a que satisfacen automáticamente la relación de ortogonalidad (15). Algunas veces es útil combinar las ecuaciones (15) y (20) en una sola ecuación. Con este fin, se introduce el símbolo δ_{mn}, conocido como delta de Kronecker (1823-1891) y definido por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ 1, & \text{si } m = n. \end{cases} \tag{21}$$

Si se aplica la delta de Kronecker, es posible escribir las ecuaciones (15) y (20) como

$$\int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \delta_{mn}. \tag{22}$$

Ejemplo 1 Determinar las eigenfunciones normalizadas del problema (10):

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Los eigenvalores de este problema son $\lambda_1 = \pi^2$, $\lambda_2 = 4\pi^2$, ... $\lambda_n = n^2\pi^2$, : . . , y las eigenfunciones correspondientes son k_1 sen πx, k_2 sen $2\pi x$, . . . , k_n sen $n\pi x$, . . . , respectivamente. En este caso la función de peso es $r(x) = 1$. Para satisfacer la ecuación (20) es necesario elegir k_n de modo que

$$\int_0^1 (k_n \operatorname{sen} n\pi x)^2\,dx = 1 \tag{23}$$

para cada valor de n. Como

$$k_n^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2 n\pi x\,dx = k_n^2 \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2n\pi x)\,dx = \tfrac{1}{2}k_n^2,$$

la ecuación (23) se satisfará si se elige k_n como $\sqrt{2}$ para cada valor de n. De donde, las eigenfunciones normalizadas del problema dado con valores en la frontera son

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen} n\pi x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

Ejemplo 2 Determinar las eigenfunciones normalizadas del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(1) + y(1) = 0, \tag{25}$$

En el ejemplo 4 de la sección 11.2 se encontró que los eigenvalores λ_n satisfacen la ecuación

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}_n + \sqrt{\lambda}_n \cos\sqrt{\lambda}_n = 0, \tag{26}$$

y que las eigenfunciones correspondientes son

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}_n x, \tag{27}$$

en donde k_n es arbitraria. Es posible determinar k_n a partir de la condición de normalización (20). Como $r(x) = 1$ en este problema, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_n^2(x)\,dx &= k_n^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2 \sqrt{\lambda}_n x\,dx \\
&= k_n^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\sqrt{\lambda}_n x\right) dx = k_n^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda}_n x}{4\sqrt{\lambda}_n}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= k_n^2 \frac{2\sqrt{\lambda}_n - \operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda}_n}{4\sqrt{\lambda}_n} = k_n^2 \frac{\sqrt{\lambda}_n - \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}_n \cos\sqrt{\lambda}_n}{2\sqrt{\lambda}_n} \\
&= k_n^2 \frac{1 + \cos^2\sqrt{\lambda}_n}{2},
\end{aligned}$$

en donde en el último paso se ha utilizado la ecuación (26). De donde, para normalizar las eigenfunciones ϕ_n es necesario elegir

$$k_n = \left(\frac{2}{1 + \cos^2\sqrt{\lambda}_n}\right)^{1/2} \tag{28}$$

Las eigenfunciones normalizadas del problema dado son

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\,\sqrt{\lambda_n}\,x}{(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}; \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Regrésese ahora a la cuestión de expresar una función dada f como una serie de eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville (1), (2). Ya se han visto ejemplos de esos desarrollos en las secciones 10.2 a 10.4. Por ejemplo, allí se demostró que si f es continua y tiene una derivada seccionalmente continua sobre $0 \leq x \leq 1$, y satisface las condiciones en la frontera $f(0) = f(1) = 0$, entonces es posible desarrollar f en una serie de senos de Fourier de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\, n\pi x. \tag{30}$$

Las funciones sen $n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$, son precisamente las eigenfunciones del problema con valor en la frontera (10). Los coeficientes b_n se expresan por

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\,\text{sen}\, n\pi x\, dx \tag{31}$$

y la serie (30) converge para cada x en $0 \leq x \leq 1$. De manera semejante, se puede desarrollar f en una serie de cosenos de Fourier si se usan las eigenfunciones cos $n\pi x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, del problema con valores en la frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Supóngase ahora que una función dada f, satisface condiciones adecuadas, se puede desarrollar en una serie infinita de eigenfunciones del problema más general de Sturm-Liouville (1), (2). Si se puede hacer esto, entonces se tiene

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \tag{32}$$

en donde las $\phi_n(x)$ satisfacen las ecuaciones (1), (2) y también la condición de ortonormalidad (22). Para calcular los coeficientes c_n de la serie (32), se multiplica la ecuación (32) por $r(x)\phi_m(x)$ y se integra desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Si se supone que la serie puede integrarse término a término, se obtiene

$$\int_0^1 r(x)f(x)\phi_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\delta_{mn}. \tag{33}$$

De donde, si se aplica la definición de δ_{mn},

$$c_m = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_m(x)\,dx = (f, r\phi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Por tanto, se han determinado formalmente los coeficientes de la serie (32). La ecuación (34) tiene la misma estructura que las fórmulas de Euler-Fourier para los coeficientes de una serie de Fourier y la serie de eigenfunciones (32) también tiene propiedades de convergencia semejantes a las de las series de Fourier. El siguiente teorema es análogo al 10.3.1.

Teorema 11.3.4 Sean $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$, las eigenfunciones normalizadas del problema de Sturm-Liouville (1), (2):

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0,$$

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \qquad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0.$$

Sean f y f' seccionalmente continuas sobre $0 \leq x \leq 1$. Entonces, la serie (32) cuyos coeficientes c_m se expresan por la ecuación (34) converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$ en cada punto del intervalo abierto $0 < x < 1$.

Si f satisface condiciones adicionales, entonces es posible establecer una conclusión más fuerte. Supóngase que, además de las hipótesis del teorema 11.3.4, la función f es continua sobre $0 \leq x \leq 1$. Si $a_2 = 0$ en la ecuación (2a) [de modo que $\phi_n(0) = 0$], entonces hágase $f(0) = 0$. De manera semejante, si $b_2 = 0$ en la ecuación (2b), hágase $f(1) = 0$. En caso contrario no se necesita prescribir condiciones en la frontera para f. Entonces, la serie (32) converge a $f(x)$ en cada punto del intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$.

Ejemplo 3 Desarrollar la función

$$f(x) = x, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{35}$$

en términos de la eigenfunciones normalizadas $\phi_n(x)$ del problema (25).

En el ejemplo 2 se encontró que las eigenfunciones normalizadas son

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}x \tag{36}$$

en donde k_n se da por la (28) y λ_n satisface la (26). A fin de hallar el desarrollo para f en términos de las ϕ_n, se escribe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \tag{37}$$

en donde los coeficientes se dan por la ecuación (34); de este modo,

$$c_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx = k_n \int_0^1 x \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\,x\,dx.$$

Si se integra por partes, se obtiene

$$c_n = k_n\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} - \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = k_n\frac{2\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n},$$

en donde se utilizó la ecuación (26) en el último paso. Una vez que se sustituye k_n por su expresión (28), se obtiene

$$c_n = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}. \tag{38}$$

Por tanto,

$$f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x}{\lambda_n (1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})}. \tag{39}$$

Obsérvese que, aunque el segundo miembro de la ecuación (39) es una serie de senos, no es una serie de senos de Fourier, como se analizó en la sección 10.4.

Problemas autoadjuntos. Los problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera son de gran importancia por sí mismos, pero también pueden concebirse como pertenecientes a una clase mucho más amplia de problemas que tienen muchas de las misma propiedades. Por ejemplo, existen muchas semejanzas entre los problemas de Sturm-Liouville y el sistema algebraico

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \tag{40}$$

en donde la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es simétrica real o hermitiana. Si se comparan los resultados mencionados en la sección 7.3 con los de esta sección se observa que, en los dos casos, los eigenvalores son reales y las eigenfunciones o los eigenvectores forman un conjunto ortogonal. Además, se pueden usar las eigenfunciones o los eigenvectores como la base para expresar, como una suma, una función o vector esencialmente arbitrarios, respectivamente. La diferencia más importante es que una matriz sólo tiene un número finito de eigenvalores y eigenvectores, mientras que un problema de Sturm-Liouville tiene una infinidad. Es interesante y de importancia fundamental en matemáticas que estos problemas aparentemente diferentes – el problema matricial (40) y el de Sturm-Liouville (1), (2) – que surgen de maneras distintas, en realidad formen parte de una sola teoría subyacente. Esta teoría suele mencionarse como teoría de los operadores lineales y forma parte del tema de análisis funcional.

A continuación se señalan algunas maneras en las que es posible generalizar los problemas de Sturm-Liouville, a la vez que se conservan los resultados más importantes de los teoremas 11.3.1 a 11.3.4: la existencia de una sucesión de eigenvalores reales que tienden al infinito, la ortogonalidad de las eigenfunciones y la posibilidad de expresar una función arbitraria como una serie de eigenfunciones. Al efectuar estas generalizaciones es esencial que la relación primordial (8) permanezca siendo válida.

Considérese el problema con valores en la frontera que consta de la ecuación diferencial

$$L[y] = \lambda r(x) y, \qquad 0 < x < 1 \tag{41}$$

en donde

$$L[y] = P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x) y, \tag{42}$$

y las n condiciones lineales homogéneas en la frontera en los extremos. Si la ecuación (8) es válida para todo par de funciones suficientemente diferenciables que satisfagan las condiciones en la frontera, entonces se dice que el problema dado es **autoadjunto**. Es importante observar que (8) comprende restricciones sobre la ecuación diferencial y también sobre las condiciones en la frontera. El operador lineal L debe ser tal que en los dos térmi-

nos aparezca el mismo operador. Esto requiere que L sea de orden par. Además, un operador de segundo orden debe tener la forma (3), un operador de cuarto orden debe tener la forma

$$L[y] = [p(x)y'']'' - [q(x)y']' + s(x)y, \tag{43}$$

y los operadores de orden superior deben tener una estructura semejante. Además, las condiciones en la frontera deben ser tales que se eliminen los términos en la frontera que surjan durante la integración por partes aplicada en la deducción de la ecuación (8). Por ejemplo, en un problema de segundo orden esto es cierto para las condiciones separadas en la frontera (2) y también en algunos otros casos, uno de los cuales se da en el ejemplo 4 a continuación.

Supóngase que se tiene un problema autoadjunto con valores en la frontera para la ecuación (41), en donde $L[y]$ ahora se da por la ecuación (43). Se supone que p, q, r y s son continuas sobre $0 \leq x \leq 1$ y que las derivadas de p y q indicadas en la ecuación (43) también son continuas. Si además $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ para $0 \leq x \leq 1$, entonces existe una sucesión infinita de eigenvalores reales que tiende hacia $+\infty$, las eigenfunciones son ortogonales con respecto a la función de peso r, y una función arbitraria se puede expresar como una serie de eigenfunciones. Sin embargo, las eigenfunciones puede no ser sencillas en estos problemas más generales.

Regrésese ahora a la relación entre los problemas de Sturm-Liouville y las series de Fourier. Se hizo notar con anterioridad, que se pueden obtener las series de senos y de cosenos de Fourier mediante el empleo de las eigenfunciones de ciertos problemas de Sturm-Liouville que comprendan la ecuación diferencial $y'' + \lambda y = 0$. Esto plantea la pregunta de si es posible obtener una serie completa de Fourier, incluyendo tanto términos de seno como de coseno al elegir un conjunto apropiado de condiciones en la frontera. La respuesta es proporcionada por el siguiente ejemplo, que también sirve para ilustrar la ocurrencia de condiciones no separadas en la frontera.

Ejemplo 4 Encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones del problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{44}$$

$$y(-l) - y(l) = 0, \qquad y'(-l) - y'(l) = 0. \tag{45}$$

Éste no es un problema de Sturm-Liouville porque las condiciones en la frontera no están separadas. Las condiciones en la frontera (45) se llaman **condiciones periódicas en la frontera**, ya que requieren que y y y' tomen los mismos valores en $x = l$ así como en $x = -l$. Empero, es directo demostrar que el problema (44), (45) es autoadjunto. Con un simple cálculo se establece que $\lambda_0 = 0$ es un eigenvalor y que la eigenfunción correspondiente es $\phi_0(x) = 1$. Además, existen eigenvalores adicionales $\lambda_1 = (\pi/l)^2$, $\lambda_2 = (2\pi/l)^2, \ldots, \lambda_n = (n\pi/l)^2, \ldots$, a cada uno de estos eigenvalores diferentes de cero le corresponden *dos* eigenfunciones linealmente independientes; por ejemplo, correspondiendo a λ_n se tienen las dos eigenfunciones $\phi_n(x) = \cos(n\pi x/l)$ y $\psi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/l)$. Esto ilustra que los eigenvalores puede ser no sencillos, a menos que las condiciones en la frontera estén separadas. Además, si se busca desarrollar una función dada f de periodo $2l$ en una serie de eigenfunciones del problema (44), (45), se obtiene la serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right),$$

que es precisamente la serie de Fourier para f.

No se dará más atención a problemas con condiciones no separadas en la frontera y ni se abordarán problemas de orden superior al segundo, excepto en unos cuanto. Sin embargo, existe otro tipo de generalización que es necesario analizar. Se trata del caso en el que los coeficientes de p, q y r de la (1) no satisfacen los requisitos más bien estrictos de continuidad y positividad que se plantearon al principio de esta sección. Estos problemas se llaman problemas singulares de Sturm-Liouville, y son el tema de la sección 11.5.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 5 determine las eigenfunciones normalizadas del problema dado.

1. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$ ver la sección 11.2, problema 1.
2. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0;$ ver la sección 11.2, problema 2.
3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$ ver la sección 11.2, problema 3.
4. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0;$ ver la sección 11.2, problema 7.
5. $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$ ver la sección 11.2, problema 9.

En cada uno de los problemas 6 a 9 encuentre el desarrollo en eigenfunciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ de la función dada, con el empleo de las eigenfunciones normalizadas del problema 1.

6. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$
7. $f(x) = x, \quad 0 \le x \le 1$
8. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

En cada uno de los problemas 10 a 13 encuentre el desarrollo en eigenfunciones $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ de la función dada, con el empleo de las eigenfunciones normalizadas del problema 4.

10. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$
11. $f(x) = x, \quad 0 \le x \le 1$
12. $f(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le 1$
13. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

En cada uno de los problemas 14 a 18 determine si el problema dado con valores en la frontera es autoadjunto.

14. $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
15. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0$
16. $y'' + y = \lambda y, \quad y(0) - y'(1) = 0, \quad y'(0) - y(1) = 0$
17. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + y = \lambda(1 + x^2)y, \quad y(0) - y'(1) = 0, \quad y'(0) + 2y(1) = 0$
18. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0$

19. Demuestre que si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones (2) y si $a_2 = 0$ o $b_2 = 0$, o las dos cosas, entonces

$$p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1 = 0.$$

20. En este problema se describe una demostración de la primera parte del teorema 11.3.3: que los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville (1), (2) son sencillos.

    Para un λ dado, suponga que ϕ_1 y ϕ_2 son dos eigenfunciones linealmente independientes. Calcule el wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)(x)$ y use las condiciones en la frontera (2) para demostrar que $W(\phi_1, \phi_2)(0) = 0$. A continuación aplique los teoremas 3.3.2 y 3.3.3 para concluir que ϕ_1 y ϕ_2 no pueden ser linealmente independientes, como se supuso.

21. Considere el problema de Sturm-Liouville

$$-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y,$$
$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \qquad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0,$$

    en donde p, q y r satisfacen las condiciones expresadas en el texto.

    a) Demuestre que si λ es un eigenvalor y ϕ es una eigenfunción correspondiente, entonces

$$\lambda \int_0^1 r\phi^2\,dx = \int_0^1 (p\phi'^2 + q\phi^2)\,dx + \frac{b_1}{b_2}\,p(1)\phi^2(1) - \frac{a_1}{a_2}\,p(0)\phi^2(0)$$

    en el supuesto que $a_2 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$. ¿Cómo debe modificarse este resultado si $a_2 = 0$ o $b_2 = 0$?

    b) Demuestre que si $q(x) \geq 0$ y si b_1/b_2 y $-a_1/a_2$ son negativos, entonces el eigenvalor λ es no negativo.

    c) En las condiciones del inciso b), demuestre que el eigenvalor λ es estrictamente positivo a menos que $q(x) = 0$ para cada x en $0 \leq x \leq 1$ y también $a_1 = b_1 = 0$.

22. Deduzca la ecuación (8) aplicando el producto interno (9) y al suponer que u y v son funciones de valores complejos.

    Sugerencia: Considere la cantidad $\int_0^1 L[u]\bar{v}\,dx$, separe u y v en partes real e imaginaria y proceda como en el texto.

23. En este problema se indica una demostración de que las eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville (1), (2) son reales.

    a) Sean λ un eigenvalor y ϕ una eigenfunción correspondiente. Suponga que $\phi(x) = u(x) + iv(x)$, y demuestre que u y v también son eigenfunciones correspondientes a λ.

    b) Aplique el teorema 11.3.3 o el resultado del problema 20 para demostrar que u y v son linealmente dependientes.

    c) Demuestre que ϕ debe ser real, aparte de una constante multiplicativa arbitraria que puede se compleja.

24. Considere el problema (problema 9 de la sección 11.2)

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

    a) Demuestre que este problema no es autoadjunto.

    b) Demuestre que, a pesar de ello, todos los eigenvalores son reales. Por tanto, la conclusión del teorema 11.3.1 también es válida para ciertos problemas autoadjuntos.

    c) Demuestre que las eigenfunciones no son ortogonales (con respecto a la función de peso que surge a partir del coeficiente de λ en la ecuación diferencial).

*25. Considere el problema

$$x^2y'' = \lambda(xy' - y), \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

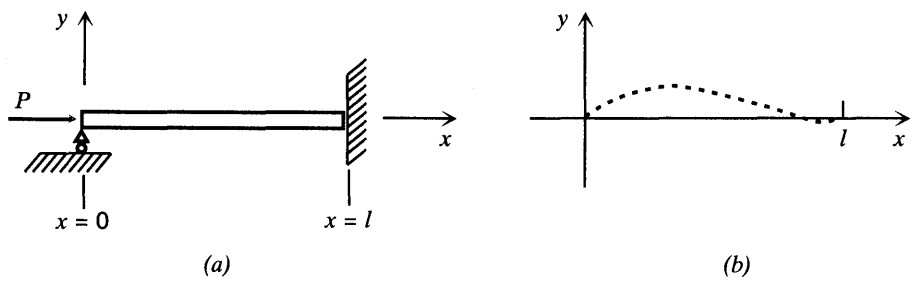


FIGURA 11.3.1 a) Columna bajo compresión. b) Perfil de la columna pandeada.

Observe que λ aparece como un coeficiente de y' así como de la propia y. Es posible extender la definición de autoadjunción hacia este tipo de problema y demostrar que este problema específico no es autoadjunto. Demuestre que este problema tiene eigenvalores, pero que ninguno es real. Con esto se demuestra que, en general, los problemas no autoadjuntos pueden tener eigenvalores que no sean reales.

Pandeo de una columna elástica. En una investigación sobre el pandeo de una columna elástica uniforme de longitud l por una carga axial P (figura 11.3.1*a*) se llega a la ecuación diferencial

$$y^{iv} + \lambda y'' = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{i}$$

El parámetro $\lambda = P/EI$, en donde E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a un eje que pasa por el centroide perpendicular al plano xy. Las condiciones en la frontera en $x = 0$ y $x = l$ dependen de cómo estén soportados los extremos de la columna. Condiciones típicas en la frontera son

$$y = y' = 0; \qquad \text{extremo sujeto}$$

$$y = y'' = 0; \qquad \text{extremo simplemente apoyado (articulado)}$$

La barra que se muestra en la figura 11.3.1*a* está apoyada simplemente en $x = 0$ y sujeta en $x = l$. Se desea determinar los eigenvalores y eigenfunciones de la ecuación (i) sujeta a condiciones adecuadas en la frontera. En especial, el menor eigenvalor λ_1 da la carga a la que se pandea la columna o toma una posición curva de equilibrio, como se muestra en la figura 11.3.1*b*. La eigenfunción correspondiente describe la configuración de la columna pandeada. Nótese que la ecuación diferencial (i) no corresponde a la teoría estudiada en esta sección. Sin embargo, no es posible demostrar que en cada uno de los casos que aquí se dan todos los eigenvalores son reales y positivos. Los problemas 26 y 27 tratan de pandeo de columnas.

26. Para cada una de las siguientes condiciones en la frontera, encuentre el menor eigenvalor (la carga de pandeo) de $y^{iv} + \lambda y'' = 0$ y también halle la eigenfunción correspondiente (la forma de la columna pandeada).
    a) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(l) = y''(l) = 0$
    b) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0$
    c) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0.$

*27. En algunos problemas de pandeo el parámetro eigenvalor aparece en las condiciones en la frontera así como en la ecuación diferencial. Se presenta uno de esos casos cuando uno de los extremos de la columna está sujeto y el otro está libre. En este caso, debe resolverse la ecuación diferencial $y^{iv} + \lambda y'' = 0$ sujeta a las condiciones en la frontera

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(l) = 0, \qquad y'''(l) + \lambda y'(l) = 0.$$

Encuentre el menor eigenvalor y la eigenfunción correspondiente.

11.4 Problemas no homogéneos con valores en la frontera

En esta sección se analiza cómo resolver problemas no homogéneos con valores en la frontera, tanto para ecuaciones diferenciales ordinarias como parciales. La mayor parte de la atención se centra en problemas en los que la ecuación diferencial sola no es homogénea, en tanto que las condiciones en la frontera son homogéneas. Se supone que la solución se puede desarrollar en una serie de eigenfunciones de un problema homogéneo relacionado y luego se determinan los coeficientes de esta serie de modo que se satisfaga el problema no homogéneo. Primero se describe este método según se aplica a problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden. Luego se ilustra su uso para las ecuaciones diferenciales parciales al resolver un problema de conducción de calor en una barra con propiedades variables del material y en presencia de términos fuente.

Problemas de Sturm-Liouville no homogéneos. Considérese el problema con valores en la frontera que consta de la ecuación diferencial no homogénea

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x), \tag{1}$$

en donde μ es una constante dada y f es una función definida sobre $0 \leq x \leq 1$, y las condiciones en la frontera

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \qquad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0. \tag{2}$$

Como en la sección 11.3, se supone que p, p', q y r son continuas sobre $0 \leq x \leq 1$ y que $p(x) > 0$ y $q(x) > 0$ allí. Se resolverá el problema (1), (2) al aplicar las eigenfunciones del problema homogéneo correspondiente que consta de la ecuación diferencial

$$L[y] = \lambda r(x)y \tag{3}$$

y de las condiciones de la frontera (2). Sean $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ los eigenvalores de este problema y $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ las eigenfunciones normalizadas correspondientes.

Ahora se supone que la solución $y = \phi(x)$ del problema no homogéneo (1), (2) puede expresarse como una serie de la forma

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x). \tag{4}$$

A partir de la ecuación (34) de la sección 11.3, se sabe que

$$b_n = \int_0^1 r(x)\phi(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Sin embargo, como se desconoce $\phi(x)$, no es posible usar la ecuación (5) para calcular los b_n. En vez de ello, se intentará determinar b_n de modo que se satisfaga el problema (1), (2)

y, a continuación se aplicará la ecuación (4) para encontrar $\phi(x)$. En primer lugar, nótese que ϕ, según se expresa en la ecuación (4) siempre satisface las condiciones en la frontera (2), ya que cada ϕ_n lo hace.

Considérese ahora la ecuación diferencial que debe satisfacer ϕ; ésta es precisamente la ecuación (1) con y sustituida por ϕ:

$$L[\phi](x) = \mu r(x)\phi(x) + f(x). \tag{6}$$

Se sustituye la serie (4) en la ecuación diferencial (6) y se intenta determinar los b_n de modo que se satisfaga la ecuación diferencial. El término en el primer miembro de (6) queda

$$\begin{aligned} L[\phi](x) &= L\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n\right](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n L[\phi_n](x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n r(x)\phi_n(x), \end{aligned} \tag{7}$$

en donde se ha supuesto que es posible intercambiar las operaciones de suma y derivación.

Nótese que la función r aparece en la ecuación (7) y también en el término $\mu r(x)\ \phi(x)$ de la (6). Esto sugiere volver a escribir el término no homogéneo de (6) como $r(x)[f(x)/r(x)]$, de modo que $r(x)$ también aparezca como multiplicador en este término. Si la función f/r satisface las condiciones del teorema 11.3.4, entonces

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \tag{8}$$

en donde, si se utiliza la ecuación (5), con ϕ sustituida por f/r,

$$c_n = \int_0^1 r(x)\frac{f(x)}{r(x)}\phi_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Después de sustituir $\phi(x)$, $L[\phi](x)$ y $f(x)$ de la ecuación (6) por sus expresiones dadas en (4), (7) y (8), respectivamente, se encuentra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n r(x)\phi_n(x) = \mu r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x) + r(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x).$$

Después de agrupar términos y cancelar el factor común diferente de cero $r(x)$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda_n - \mu)b_n - c_n]\phi_n(x) = 0. \tag{10}$$

Si debe cumplirse la ecuación (10) para cada x en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, entonces cada coeficiente de la serie debe ser cero por separado; ver el problema 14 para una demostración de este hecho. De donde,

$$(\lambda_n - \mu)b_n - c_n = 0; \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Ahora es necesario distinguir dos casos principales, uno de los cuales también tiene dos subcasos.

En primer lugar, supóngase que $\mu \neq \lambda_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$; es decir, μ no es igual a ningún eigenvalor del problema homogéneo correspondiente. Entonces,

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

y

$$y = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} \phi_n(x). \tag{13}$$

La ecuación (13), con los c_n dados por la ecuación (9), es una solución formal del problema no homogéneo con valores en la frontera (1), (2). El razonamiento no prueba que la serie (13) converge. Sin embargo, cualquier solución del problema con valores en la frontera (1), (2) evidentemente satisface las condiciones del teorema 11.3.4; de hecho, satisface las condiciones más estrictas que se dan en el párrafo siguiente a ese teorema. Por tanto, resulta razonable esperar que la serie (13) sí converja en cada punto y se puede establecer este hecho en el supuesto, por ejemplo, de que f sea continua.

Supóngase ahora que μ es igual a uno de los eigenvalores del problema homogéneo correspondiente, por ejemplo $\mu = \lambda_m$; entonces la situación es bastante diferente. En este caso, para $n = m$ la ecuación (11) tiene la forma $0 \cdot b_m - c_m = 0$. De nuevo es necesario considerar dos casos.

Si $\mu = \lambda_m$ y $c_m \neq 0$, entonces es imposible resolver la ecuación (11) para b_m, y el problema no homogéneo (1), (2) no tiene solución.

Si $\mu = \lambda_m$ y $c_m = 0$, entonces se satisface la ecuación (11) sin importar el valor de b_m; en otras palabras, b_m permanece arbitraria.

En este caso, el problema con valores en la frontera (1), (2) tiene una solución, pero no es única, ya que contiene un múltiplo arbitrario de la eigenfunción ϕ_m.

Si $c_m = 0$ no depende del término no homogéneo f. En particular,

$$c_m = \int_0^1 f(x)\phi_m(x)\, dx. \tag{14}$$

Por tanto, si $\mu = \lambda_m$ el problema no homogéneo con valores en la frontera (1), (2) puede resolverse sólo si f es ortogonal a la eigenfunción correspondiente al eigenvalor λ_m.

En el siguiente teorema se resumen los resultados que se han obtenido formalmente.

Teorema 11.4.1 El problema no homogéneo con valores en la frontera (1), (2) tiene una solución única para cada f continua siempre que μ sea diferente de todos los eigenvalores del problema homogéneo correspondiente; la solución está dada por la ecuación (13) y la serie converge para cada x en $0 \leq x \leq 1$. Si μ es igual a un eigenvalor λ_m del problema homogéneo correspondiente, entonces el problema no homogéneo con valores en la frontera no tiene solución, a menos que f sea ortogonal a ϕ_m; es decir, a menos que se cumpla la condición (14); en ese caso, la solución no es única y contiene un múltiplo arbitrario de $\phi_m(x)$.

La parte principal del teorema 11.4.1 algunas veces se enuncia del modo siguiente.

Teorema 11.4.2 Para un valor dado de μ, el problema no homogéneo (1), (2) tiene una solución única para cada f continua (si μ no es igual a algún eigenvalor λ_m del problema homogéneo correspondiente), o bien, el problema homogéneo (3), (2) tiene una solución no trivial (la eigenfunción correspondiente a λ_m).

Esta última forma del teorema se conoce como teorema alternativo de Fredholm[4]. Este es uno de los teoremas básicos del análisis matemático y se presenta en muchos contextos diferentes. Quizá el lector esté familiarizado con él en relación con conjuntos de ecuaciones algebraicas lineales en donde la anulación o no anulación del determinante de los coeficientes sustituye las afirmaciones sobre μ y λ_m. Ver el análisis de la sección 7.3.

Ejemplo 1 Resolver el problema con valores en la frontera

$$y'' + 2y = -x, \tag{15}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) + y'(1) = 0. \tag{16}$$

Este problema específico se puede resolver directamente de una manera elemental y tiene la solución

$$y = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{2}x}{\operatorname{sen} \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \sqrt{2}} - \frac{x}{2}. \tag{17}$$

El método de solución que se describe a continuación ilustra el empleo de desarrollos en eigenfunciones, método que es posible emplear en muchos problemas inaccesibles por procedimientos elementales. Para identificar la ecuación (15) con la (1) resulta útil escribir aquélla como

$$-y'' = 2y + x, \tag{18}$$

Se busca la solución del problema dado como una serie de eigenfunciones normalizadas ϕ_n del problema homogéneo correspondiente

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \tag{19}$$

Estas eigenfunciones fueron halladas en el ejemplo 2 de la sección 11.3 y son

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x, \tag{20}$$

en donde

$$k_n = \left(\frac{2}{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}} \right)^{1/2} \tag{21}$$

[4] El matemático sueco Erik Ivar Fredholm (1866-1927), profesor en la Universidad de Estocolmo, estableció la teoría moderna de las ecuaciones integrales en una publicación fundamental, en 1903. En su trabajo, Fredholm destacó las semejanzas entre las ecuaciones integrales y los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. También existen muchas interrelaciones entre las ecuaciones diferenciales e integrales; por ejemplo, ver la sección 2.11 y el problema 21 de la sección 6.6.

y λ_n satisface

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n} = 0. \tag{22}$$

Se supone que y se expresa por la ecuación (4),

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x),$$

y se concluye que los coeficientes b_n se encuentran a partir de la ecuación (12),

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - 2},$$

en donde los c_n son los coeficientes del desarrollo del término no homogéneo $f(x) = x$ de la ecuación (18), en términos de las eigenfunciones ϕ_n. Estos coeficientes se encontraron en el ejemplo 3 de la sección 11.3 y son

$$c_n = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}. \tag{23}$$

Si se reúne todo, finalmente se obtiene la solución

$$y = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n(\lambda_n - 2)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x. \tag{24}$$

Aunque en apariencia las ecuaciones (17) y (24) son bastante diferentes, en realidad son dos expresiones diferentes de la misma función. Esto se concluye a partir de la parte de unicidad del teorema 11.4.1 o del teorema 11.4.2, ya que $\lambda = 2$ no es un eigenvalor del problema homogéneo (19). De manera alternativa, es posible demostrar la equivalencia de las ecuaciones (17) y (24) al desarrollar el segundo miembro de la ecuación (17) en términos de las eigenfunciones $\phi_n(x)$. Para este problema es bastante obvio que la fórmula (17) es más conveniente que la fórmula en serie (24). Sin embargo, una vez más se hace hincapié en que en otros problemas puede no ser posible obtener la solución, excepto por métodos en serie (o numéricos).

Problemas no homogéneos de conducción del calor. Para mostrar cómo es posible utilizar los desarrollos en eigenfunciones a fin de resolver los problemas no homogéneos para ecuaciones diferenciales parciales, considérese la ecuación generalizada de conducción de calor

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t) \tag{25}$$

con las condiciones en la frontera

$$u_x(0, t) - h_1u(0, t) = 0, \qquad u_x(1, t) + h_2u(1, t) = 0 \tag{26}$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x). \tag{27}$$

Este problema ya se analizó en el apéndice A del capítulo 10 y en la sección 11.1. En esta última se hizo $u(x, t) = X(x)T(t)$ en la ecuación homogénea que se obtuvo al hacer $F(x, t) = 0$ y se demostró que $X(x)$ debe ser una solución del problema con valores en la frontera

$$-[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X, \tag{28}$$

$$X'(0) - h_1X(0) = 0, \qquad X'(1) + h_2X(1) = 0. \tag{29}$$

Si se supone que p, q y r satisfacen los requisitos adecuados de continuidad y que $p(x)$ y $r(x)$ siempre son positivas, el problema (28), (29) es un problema de Sturm-Liouville, como se analizó en la sección 11.3. De este modo se obtiene una sucesión de eigenvalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, < \lambda_n < \cdots$ y las eigenfunciones normalizadas correspondientes $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, . . . , $\phi_n(x)$, ...

Se resolverá el problema no homogéneo dado con los valores en la frontera (25) a (27) al suponer que $u(x, t)$ se puede expresar como una serie de eigenfunciones,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x), \tag{30}$$

y entonces mostrar cómo determinar los coeficientes $b_n(t)$. Este procedimiento básicamente es el mismo que en el primer problema considerado en esta sección, aunque es más complicado en ciertos aspectos. Por ejemplo, los coeficientes b_n deben depender ahora de t, ya que de lo contrario u sería una función sólo de x. Nótese que las condiciones en la frontera (26) se satisfacen automáticamente por una expresión de la forma (30) debido a que cada $\phi_n(x)$ satisface las condiciones en la frontera (29).

A continuación se sustituye u de la (25) por su expresión dada en (30). A partir de los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación (25) se obtiene formalmente

$$\begin{aligned}[p(x)u_x]_x - q(x)u &= \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n'(x)\right] - q(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\{[p(x)\phi_n'(x)]' - q(x)\phi_n(x)\}.\end{aligned} \tag{31}$$

En virtud de que $[p(x)\phi_n'(x)]' - q(x)\phi_n(x) = -\lambda_n r(x)\phi_n(x)$, por último se obtiene

$$[p(x)u_x]_x - q(x)u = -r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\lambda_n\phi_n(x). \tag{32}$$

Considérese ahora el término del primer miembro de la ecuación (25); se tiene

$$\begin{aligned}r(x)u_t &= r(x)\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \\ &= r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\phi_n(x).\end{aligned} \tag{33}$$

También es necesario expresar el término no homogéneo de la ecuación (25) como una serie de eigenfunciones. Una vez más, es conveniente considerar la razón $F(x, t)/r(x)$ y escribir

$$\frac{F(x, t)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\phi_n(x), \tag{34}$$

en donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= \int_0^1 r(x) \frac{F(x, t)}{r(x)} \phi_n(x)\, dx \\ &= \int_0^1 F(x, t)\phi_n(x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{35}$$

En virtud de que se da $F(x, t)$, es posible considerar que se conocen las funciones $\gamma_n(t)$.

Si se reúnen todos estos resultados, se sustituyen las expresiones de las ecuaciones (32), (33) y (34) en la (25) y se encuentra que

$$r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\phi_n(x) = -r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\lambda_n\phi_n(x) + r(x) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\phi_n(x). \tag{36}$$

Para simplificar la ecuación (36), se cancela el factor común diferente de cero $r(x)$ en todos los términos y todo se escribe en una suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [b_n'(t) + \lambda_n b_n(t) - \gamma_n(t)]\phi_n(x) = 0. \tag{37}$$

De nuevo, si ha de cumplirse la ecuación (37) para toda x en $0 < x < 1$, es necesario que la cantidad entre corchetes sea cero para toda n (ver de nuevo el problema 14). De donde, $b_n(t)$ es una solución de la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden

$$b_n'(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t), \qquad n = 1, 2, \ldots , \tag{38}$$

en donde $\gamma_n(t)$ se expresa por la ecuación (35). Para determinar por completo $b_n(t)$ es necesario contar con una condición inicial

$$b_n(0) = \alpha_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{39}$$

para (38). Ésta se obtiene a partir de la condición inicial (27). Si se hace $t = 0$ en (30) y se utiliza la ecuación (27), se tiene

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\phi_n(x) = f(x). \tag{40}$$

Por tanto, los valores iniciales α_n son los coeficientes en el desarrollo en eigenfunciones para $f(x)$; por lo tanto,

$$\alpha_n = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_n(x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{41}$$

Nótese que se conoce todo lo del segundo miembro de la ecuación (41), por lo que es posible considerar α_n como conocido.

El problema con valor inicial (38), (39) se resuelve por los métodos de la sección 2.1. El factor integrante es $\mu(t) = \exp(\lambda_n t)$, y se concluye que

$$b_n(t) = \alpha_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}\gamma_n(s)\,ds, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{42}$$

Los detalles de este cálculo se dejan al lector. Nótese que el primer término del segundo miembro de la ecuación (42) depende de la función f, a través de los coeficientes α_n, mientras que el segundo depende del término no homogéneo F, a través de los coeficientes $\gamma_n(s)$.

De este modo, una solución explícita del problema con valores en la frontera (25) a (27)

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t),$$
$$u_x(0, t) - h_1u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) + h_2u(1, t) = 0,$$
$$u(x, 0) = f(x),$$

se da por la ecuación (30),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x),$$

en donde los coeficientes $b_n(t)$ se determinan a partir de la ecuación (42). Las cantidades α_n y $\lambda_n(s)$ de la (42) se encuentran a su vez a partir de las ecuaciones (41) y (35), respectivamente.

En resumen, para aplicar este método a fin de resolver un problema con valores en la frontera, como el dado por las ecuaciones (25) a (27), es necesario

1. Hallar los eigenvalores λ_n y eigenfunciones ϕ_n del problema homogéneo apropiado (28), (29).
2. Calcular los coeficientes α_n y $\gamma_n(t)$ a partir de las ecuaciones (41) y (35), respectivamente.
3. Evaluar la integral de la ecuación (42) para determinar los $b_n(t)$.
4. Sumar la serie infinita (30).

Como algunos o todos estos pasos pueden ser difíciles, todo el proceso puede ser bastante impresionante. Una característica a favor es que a menudo la serie (30) converge con rapidez, en cuyo caso es posible que sólo se necesiten pocos términos para obtener una aproximación adecuada de la solución.

Ejemplo 2 Encontrar la solución del problema de conducción del calor

$$u_t = u_{xx} + xe^{-t}, \tag{43}$$
$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) + u(1, t) = 0, \tag{44}$$
$$u(x, 0) = 0. \tag{45}$$

Una vez más, se aplican las eigenfunciones normalizadas ϕ_n del problema (19) y se supone que u se da por la ecuación (30),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x).$$

Los coeficientes b_n se determinan a partir de la ecuación diferencial

$$b_n' + \lambda_n b_n = \gamma_n(t), \tag{46}$$

en donde λ_n es el n-ésimo eigenvalor del problema (19) y los $\gamma_n(t)$ son los coeficientes del desarrollo del término no homogéneo xe^{-t}, en términos de las eigenfunciones ϕ_n. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\gamma_n(t) &= \int_0^1 xe^{-t}\phi_n(x)\,dx = e^{-t}\int_0^1 x\phi_n(x)\,dx \\ &= c_n e^{-t},\end{aligned} \tag{47}$$

en donde $c_n = \int_0^1 x\phi_n(x)\,dx$ se da por la ecuación (23). La condición inicial para la (46) es

$$b_n(0) = 0 \tag{48}$$

ya que la distribución inicial de temperaturas (45) es cero en todas partes. La solución del problema con valor inicial (46), (48) es

$$\begin{aligned}b_n(t) &= e^{-\lambda_n t}\int_0^t e^{\lambda_n s}c_n e^{-s}\,ds = c_n e^{-\lambda_n t}\frac{e^{(\lambda_n - 1)t} - 1}{\lambda_n - 1} \\ &= \frac{c_n}{\lambda_n - 1}(e^{-t} - e^{-\lambda_n t}).\end{aligned} \tag{49}$$

Por tanto, la solución del problema de conducción del calor (43) a (45) se expresa por

$$u(x, t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}(e^{-t} - e^{-\lambda_n t})\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \tag{50}$$

La solución dada por la ecuación (50) es exacta, pero complicada. Para juzgar si es posible obtener una aproximación satisfactoria a la solución mediante el uso de sólo pocos términos de esta serie, es necesario estimar su rapidez de convergencia. Primero divídase el segundo miembro en dos partes:

$$u(x, t) = 4e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n t}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \tag{51}$$

Recuérdese por el ejemplo 4 de la sección 11.2, que los eigenvalores λ_n son muy aproximadamente proporcionales a n^2. En la primera serie del segundo miembro de la ecuación (51) todos los factores trigonométricos están acotados cuando $n \to \infty$; por consiguiente, esta serie converge de manera semejante a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ o $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}$. De donde, para obtener una excelente aproximación para esta parte de la solución cuando mucho se requieren dos o tres términos. La segunda serie contiene al factor adicional $e^{-\lambda_n t}$, de modo que su convergencia es incluso más rápida para $t > 0$; casi con seguridad, todos los términos después del primero son despreciables.

Análisis adicional. Se pueden utilizar los desarrollos en eigenfunciones para resolver una variedad mucho mayor de problemas que lo que se pueden sugerir el análisis y ejemplos anteriores. El objetivo de las siguientes observaciones breves es indicar, en cierta medida, el alcance de este método.

1. **Condiciones no homogéneas en la frontera independientes del tiempo.** Supóngase que las condiciones en la frontera (26) del problema de conducción del calor se sustituyen por

$$u(0, t) = T_1, \qquad u(1, t) = T_2. \tag{52}$$

Entonces es posible proceder de manera bastante parecida a la de la sección 10.5 para reducir el problema a uno con condiciones homogéneas en la frontera; es decir, de u se resta una función v elegida de modo que se satisfagan las ecuaciones (52). Entonces la diferencia $w = u - v$ satisface un problema con condiciones homogéneas en la frontera, pero con un término de fuerza y una condición inicial modificados. Este problema se puede resolver por el procedimiento descrito en esta sección.

2. **Condiciones no homogéneas en la frontera dependientes del tiempo.** Supóngase que las condiciones en la frontera (26) se sustituyen por

$$u(0, t) = T_1(t), \qquad u(1, t) = T_2(t). \tag{53}$$

Si T_1 y T_2 son funciones diferenciables, es posible proceder precisamente como en el párrafo 1. De la misma manera, es posible abordar condiciones más generales en la frontera que comprendan tanto a u como a u_x. Sin embargo, si T_1 y T_2 no son diferenciables, entonces el método fracasa. Para resolver este tipo de problema es posible aplicar un refinamiento adicional del método de desarrollos en eigenfunciones, pero el procedimiento es más complicado y no se analiza aquí.

3. **Empleo de funciones diferentes a las eigenfunciones.** Una dificultad potencial al usar desarrollos en eigenfunciones es que deben hallarse las eigenfunciones normalizadas del problema homogéneo correspondiente. Para una ecuación diferencial con coeficientes variables esto puede ser difícil, si no imposible. En ese caso, algunas veces es posible usar otras funciones como las eigenfunciones de un problema más sencillo, que satisfagan las mismas condiciones en la frontera. Por ejemplo, si las condiciones en la frontera son

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0, \tag{54}$$

entonces puede ser conveniente sustituir las funciones $\phi_n(x)$ de la ecuación (30) por sen $n\pi x$. Estas funciones por lo menos satisfacen las condiciones correctas en la frontera, aunque en general no son soluciones de la ecuación diferencial homogénea correspondiente. A continuación se desarrolla el término no homogéneo $F(x, t)$ en una serie de la forma (34), una vez más con $\phi_n(x)$ sustituida por sen $n\pi x$, y después se sustituyen u y F de la ecuación (25). Después de reunir los coeficientes de sen $n\pi x$, para cada n, se tiene un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden a partir del cual determinar $b_1(t)$, $b_2(t)$, ... La diferencia esencial entre este caso y el considerado antes es que ahora las ecuaciones para los $b_n(t)$ están *acopladas*. Por tanto, no es posible resolverlas una por una como antes, es necesario tratarlas simultáneamente. En la práctica, el sistema infinito es reemplazado por un sistema finito de aproximación, a partir del cual se calculan aproximaciones para un número finito de coeficientes. A pesar de su complejidad, este procedimiento ha mostrado ser de bastante utilidad en la resolución de ciertos tipos de problemas difíciles.

4. **Problemas de orden superior.** A menudo se pueden resolver problemas con valores en la frontera para ecuaciones de orden superior al segundo mediante desarrollos en eigenfunciones. En algunos casos, el procedimiento es casi igual al de los problemas de segundo orden. Sin embargo, también pueden surgir diversas complicaciones, por lo que en este libro no se analizan esos problemas.

Por último, conviene resaltar que el análisis de esta sección ha sido puramente formal. Es necesario aplicar razonamientos separados y algunas veces elaborados para establecer la convergencia de los desarrollos en eigenfunciones o justificar alguno de los pasos utilizados, como la derivación término a término de las series de eigenfunciones.

También existen otros métodos por completo diferentes para resolver problemas con valores en la frontera no homogéneos. Uno de estos da una solución expresada como una integral definida en vez de como una serie infinita. Este enfoque comprende ciertas funciones conocidas como funciones de Green y, para ecuaciones diferenciales ordinarias, constituye el tema de los problemas 28 a 36.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 5 resuelva el problema dado por medio de un desarrollo en eigenfunciones.

1. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$; ver la sección 11.3, problema 7.
3. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$; ver la sección 11.3, problema 3.
4. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$; ver la sección 11.3, problema 11.
5. $y'' + 2y = -1 + 1 - 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

En cada uno de los problemas 6 a 9, determine un desarrollo formal en serie de eigenfunciones para la solución del problema dado. Suponga que f satisface las condiciones del teorema 11.4.1. Establezca los valores de μ para los que existe la solución.

6. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
7. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
8. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
9. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$

En cada uno de los problemas 10 a 13, determine si existe algún valor de la constante a para el que el problema tiene una solución. Encuentre la solución para cada uno de esos valores.

10. $y'' + \pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
11. $y'' + 4\pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
12. $y'' + \pi^2 y = a, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
13. $y'' + \pi^2 y = a - \cos \pi x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

14. Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ las eigenfunciones normalizadas de la ecuación diferencial (3) sujeta a las condiciones en la frontera (2). Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ converge a $f(x)$, en donde $f(x) = 0$ para cada x en $0 \leq x \leq 1$, demuestre que $c_n = 0$ para cada n.

Sugerencia: Multiplique por $r(x)\,\phi_m(x)$, integre y aplique la propiedad de ortogonalidad de las eigenfunciones.

15. Sea L un operador diferencial lineal de segundo orden. Demuestre que la solución $y = \phi(x)$ del problema

$$L[y] = f(x),$$
$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = \alpha, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = \beta,$$

puede escribirse como $y = u + v$ *siempre* que $u = \phi_1(x)$ y $v = \phi_2(x)$ sean soluciones de los problemas

$$L[u] = 0,$$
$$a_1 u(0) + a_2 u'(0) = \alpha, \qquad b_1 u(1) + b_2 u'(1) = \beta,$$

y

$$L[v] = f(x),$$
$$a_1 v(0) + a_2 v'(0) = 0, \qquad b_1 v(1) + b_2 v'(1) = 0,$$

respectivamente.

16. Demuestre que el problema

$$y'' + \pi^2 y = \pi^2 x, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

tiene la solución

$$y = c_1 \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x + x.$$

También demuestre que esta solución no se puede obtener al dividir el problema como se sugirió en el problema 15, ya que en este caso no es posible resolver ninguno de los problemas subsidiarios.

17. Considérese el problema

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(0) = a, \quad y(1) = b.$$

sea $y = u + v$, en donde v es cualquier función dos veces diferenciable que satisface las condiciones en la frontera (pero no necesariamente la ecuación diferencial). Demuestre que u es una solución del problema

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = g(x), \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

en donde $g(x) = -[v'' + p(x)v' + q(x)v]$, y que se conoce una vez que se elige a v. Por tanto, las no homogeneidades pueden transferirse de las condiciones en la frontera a la ecuación diferencial. Encuentre una función v para este problema.

18. Aplique el método del problema 17 para transformar el problema

$$y'' + 2y = 2 - 4x, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) + y'(1) = -2$$

en un nuevo en el que las condiciones en la frontera sean homogéneas. Resuelva este último problema con referencia al ejemplo 1 del texto.

En cada uno de los problemas 19 a 22, use desarrollos en eigenfunciones para hallar la solución del problema dado con valores en la frontera.

19. $u_t = u_{xx} - x$, $u(0, t) = 0$, $u_x(1, t) = 0$,
$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x/2)$; ver el problema 2.
20. $u_t = u_{xx} + e^{-t}$, $u_x(0, t) = 0$, $u_x(1, t) + u(1, t) = 0$,
$u(x, 0) = 1 - x$; ver la sección 11.3, problemas 10 y 12.
21. $u_t = u_{xx} + 1 - |1 - 2x|$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$,
$u(x, 0) = 0$; ver le problema 5.
22. $u_t = u_{xx} + e^{-t}(1 - x)$, $u(0, t) = 0$, $u_x(1, t) = 0$,
$u(x, 0) = 0$; ver la sección 11.3, problemas 6 y 7.
23. Considere el problema con valores en la frontera

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x),$$
$$u(0, t) = T_1, \qquad u(1, t) = T_2, \qquad u(x, 0) = f(x).$$

a) Sea $v(x)$ una solución del problema

$$[p(x)v']' - q(x)v = -F(x), \qquad v(0) = T_1, \quad v(1) = T_2.$$

Si $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$, halle el problema con valores en la frontera satisfecho por w. Observe que este problema se puede resolver por el método de esta sección.
b) Generalice el procedimiento del inciso a) para el caso en el que u satisface las condiciones en la frontera

$$u_x(0, t) - h_1u(0, t) = T_1, \qquad u_x(1, t) + h_2u(1, t) = T_2.$$

En los problemas 24 y 25 aplique el método indicado en el problema 23 para resolver el problema dado con valores en la frontera.

24. $u_t = u_{xx} - 2$
$u(0, t) = 1$, $u(1, t) = 0$
$u(x, 0) = x^2 - 2x + 2$

25. $u_t = u_{xx} - \pi^2 \cos \pi x$
$u_x(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$
$u(x, 0) = \cos(3\pi x/2) - \cos \pi x$

26. El método de desarrollo de eigenfunciones a menudo es útil para problemas no homogéneos relacionados con la ecuación de onda o sus generalizaciones. Considere el problema

$$r(x)u_{tt} = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t), \tag{i}$$
$$u_x(0, t) - h_1u(0, t) = 0, \qquad u_x(1, t) + h_2u(1, t) = 0, \tag{ii}$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x). \tag{iii}$$

Este problema puede surgir en conexión con generalizaciones de la ecuación del telégrafo (problema 12 de la sección 11.1) o de las vibraciones longitudinales de una barra elástica (problema 17 de la sección 11.2).
a) Haga $u(x, t) = X(x)\,T(t)$ en la ecuación homogénea correspondiente a la (i) y demuestre que $X(x)$ satisface las ecuaciones (28) y (29) del texto. Denote por λ_n y $\phi_n(x)$ los eigenvalores y las eigenfunciones normalizadas de este problema.
b) Suponga que $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\phi_n(x)$, y demuestre que los $b_n(t)$ deben satisfacer el problema con valor inicial

$$b_n''(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t), \qquad b_n(0) = \alpha_n, \quad b_n'(0) = \beta_n,$$

en donde α_n, β_n y $\gamma_n(t)$ son los coeficientes del desarrollo de $f(x)$, $g(x)$ y $F(x, t)$ en términos de las eigenfunciones $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$.

27. En este problema se analiza un poco más la analogía entre los problemas con valores en la frontera de Sturm-Liouville y las matrices hermitianas. Sea **A** una matriz hermitiana de $n \times n$ con los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ y los eigenvectores ortonormales correspondientes, $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$.

Considere el sistema no homogéneo de ecuaciones.

$$\mathbf{Ax} - \mu\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{i}$$

en donde μ es un número real dado y **b** es un vector dado. Se señalará una manera de resolver la ecuación (i) que es análoga al método presentado en el texto para resolver las ecuaciones (1) y (2).

a) Demuestre que $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi^{(i)}$, en donde $b_i = (\mathbf{b}, \xi^{(i)})$.

b) Suponga que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^{(i)}$ y demuestre que para satisfacer la ecuación (i) es necesario que $a_i = b_i/(\lambda_i - \mu)$. De este modo,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{b}, \xi^{(i)})}{\lambda_i - \mu} \xi^{(i)} \tag{ii}$$

siempre que μ no sea uno de los eigenvalores de **A**, $\mu \neq \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Compare este resultado con la ecuación (13).

Funciones de Green[5]. Considérese el sistema no homogéneo de ecuaciones algebraicas

$$\mathbf{Ax} - \mu\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{i}$$

en donde **A** es una matriz hermitiana de $n \times n$, μ es número real dado y **b** es un vector dado. En vez de usar un desarrollo en eigenvectores, como en el problema 27, es posible resolver la ecuación (i) al calcular la matriz inversa $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}$, que existe si μ no es eigenvalor de **A**; entonces

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}. \tag{ii}$$

En los problemas 28 a 36 se indica una manera de resolver problemas con valores no homogéneos en la frontera que es análoga al uso de la matriz inversa para un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. La función de Green tiene una función semejante al de la inversa de la

[5] Las funciones de Green recibieron su nombre en honor de George Green (1793-1841) de Inglaterra, quien casi fue por completo autodidacto en matemáticas, pero hizo contribuciones importantes a la electricidad y el magnetismo, la mecánica de fluidos y las ecuaciones diferenciales parciales. Su trabajo más notable fue un ensayo sobre la electricidad y magnetismo que publicó en forma privada en 1828. En este documento, Green fue el primero en reconocer la importancia de las funciones de potencial. Introdujo las funciones conocidas hoy como funciones de Green como un medio para resolver problemas con valores en la frontera y desarrolló los teoremas de transformaciones integrales de las cuales el teorema de Green en el plano es un caso particular. Sin embargo, estos resultados no fueron ampliamente conocidos hasta la republicación del ensayo de Green en la década de 1850, gracias al esfuerzo de William Thomson (Lord Kelvin).

matriz de coeficientes. Este método da soluciones expresadas como integrales definidas en vez de como series infinitas. Excepto en el problema 35, se supondrá que $\mu = 0$ para facilitar las cosas.

28. a) Demuestre por el método de variación de parámetros que la solución general de la ecuación diferencial

$$-y'' = f(x)$$

puede escribirse en la forma

$$y = \phi(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x - s) f(s)\, ds,$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.
b) Supóngase que también se requiere $y = \phi(x)$ para satisfacer las condiciones en la frontera $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Demuestre que, en este caso,

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \int_0^1 (1 - s) f(s)\, ds.$$

c) Demuestre que, en las condiciones de los incisos a) y b), $\phi(x)$ se puede escribir en la forma

$$\phi(x) = \int_0^x s(1 - x) f(s)\, ds + \int_x^1 x(1 - s) f(s)\, ds.$$

d) Si se define

$$G(x, s) = \begin{cases} s(1 - x), & 0 \le s \le x, \\ x(1 - s), & x \le s \le 1, \end{cases}$$

demuestre que la solución toma la forma

$$\phi(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s)\, ds.$$

La función $G(x, s)$ que aparece bajo el signo de la integral es una función de Green. La utilidad de una solución como función de Green radica en el hecho de que ésta es independiente del término no homogéneo de la ecuación diferencial. Por tanto, una vez que se determina la función de Green, se obtiene la solución del problema con valores en la frontera para diferentes términos no homogéneos $f(x)$ por simple integración. Observe también que no se requiere determinación de constantes arbitrarias, ya que $\phi(x)$ según está dada por la fórmula integral de la función de Green satisface automáticamente las condiciones en la frontera.

29. Mediante un procedimiento semejante al del problema anterior demuestre que la solución del problema con valores en la frontera

$$-(y'' + y) = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

es

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s)\, ds,$$

en donde

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}s\ \text{sen}(1-x)}{\text{sen}\ 1}, & 0 \le s \le x, \\ \dfrac{\text{sen}\,x\text{sen}(1-s)}{\text{sen}\ 1}, & x \le s \le 1. \end{cases}$$

30. Es posible demostrar que el problema de Sturm-Liouville

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = f(x), \tag{i}$$

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \qquad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0, \tag{ii}$$

tiene una solución como función de Green

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x, s)f(s)\,ds, \tag{iii}$$

siempre que $\lambda = 0$ no sea un eigenvalor de $L[y] = \lambda y$ sujeta a las condiciones en la frontera (ii). Además, $G(x, s)$ se expresa por

$$G(x, s) = \begin{cases} -y_1(s)y_2(x)/p(x)W(y_1, y_2)(x), & 0 \le s \le x, \\ -y_1(x)y_2(s)/p(x)W(y_1, y_2)(x), & x \le s \le 1, \end{cases} \tag{iv}$$

en donde y_1 es una solución de $L[y] = 0$ que satisface la condición en la frontera en $x = 1$ y $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de y_1 y y_2.

a) Compruebe que la función de Green obtenida en el problema 28 se expresa por la fórmula (iv).

b) Compruebe que la función de Green obtenida en el problema 29 se expresa por la fórmula (iv).

c) Demuestre que $p(x)W(y_1, y_2)(x)$ es una constantes, al probar que su derivada es cero.

d) Use la ecuación (iv) y el resultado del inciso c) para demostrar que $G(x, s) = G(s, x)$.

En cada uno de los problemas 31 a 34, resuelva el problema dado con valores en la frontera mediante la determinación de la función adecuada de Green y expresar la solución como una integral definida. Use las ecuaciones (i) a (iv) del problema 30.

31. $-y'' = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
32. $-y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$
33. $-(y'' + y) = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
34. $-y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

*35. Considere el problema con valores en la frontera

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x), \tag{i}$$

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0, \qquad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0. \tag{ii}$$

Según el texto, la solución $y = \phi(x)$ se expresa por la ecuación (13), en donde c_n se define por la (9), siempre que μ no sea un eigenvalor del problema homogéneo correspondiente. En este caso también se puede demostrar que la solución se expresa por una integral función de Green de la forma

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x, s, \mu)f(s)\,ds. \tag{iii}$$

Observe que en este problema la función de Green también depende del parámetro μ.
a) Demuestre que si estas dos expresiones para $\phi(x)$ han de ser equivalentes, entonces

$$G(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(s)}{\lambda_i - \mu}, \tag{iv}$$

en donde λ_i y ϕ_i son los eigenvalores y las eigenfunciones, respectivamente, de las ecuaciones (3), (2) del texto. Una vez más se observa a partir de la (iv) que μ no puede ser igual a algún eigenvalor λ_i.
b) Deduzca la ecuación (iv) directamente al suponer que $G(x, s, \mu)$ tiene el desarrollo en eigenfunciones

$$G(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x, \mu)\phi_i(s); \tag{v}$$

determine $a_i(x, \mu)$ al multiplicar (iv) por $r(s)\,\phi_j(s)$ e integrar con respecto a s desde $s = 0$ hasta $s = 1$.
Sugerencia: Demuestre primero que λ_i y ϕ_i satisfacen la ecuación

$$\phi_i(x) = (\lambda_i - \mu) \int_0^1 G(x, s, \mu) r(s)\phi_i(s)\, ds. \tag{vi}$$

*36. Considere el problema con valores en la frontera

$$-d^2y/ds^2 = \delta(s - x), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

en donde s es la variable independiente, $s = x$ es un punto definido en el intervalo $0 < s < 1$, y δ es la función delta de Dirac (ver la sección 6.5). Demuestre que la solución de este problema es la función de Green $G(x, s)$ que se obtuvo en el problema 28.

Al resolver el problema dado, observe que $\delta(s - x) = 0$ en los intervalos $0 \le s < x$ y $x < s \le 1$. Observe además que $-dy/ds$ experimenta un salto de magnitud 1 cuando s pasa por el valor de x.

Este problema ilustra una propiedad general; a saber, que la función de Green $G(s, x)$ puede identificarse como la respuesta en el punto s a un impulso unitario en el punto x. Un término no homogéneo más general f sobre $0 \le x \le 1$ puede considerarse como un conjunto de impulsos, en donde $f(x)$ da la magnitud del impulso en el punto x. La solución de un problema con valores no homogéneos en la frontera en términos de una integral función de Green se puede interpretar como el resultado de suponer las respuestas al conjunto de impulsos representado por el término no homogéneo $f(x)$.

*11.5 Problemas singulares de Sturm-Liouville

En las secciones anteriores de este capítulo se consideraron problemas con valores en la frontera de Sturm-Liouville: la ecuación diferencial

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

junto con condiciones en la frontera de la forma

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \tag{2a}$$

$$b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0. \tag{2b}$$

Hasta el momento, siempre se ha supuesto que el problema es regular; es decir, p es diferenciable, q y r son continuas y $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en todos los puntos en el intervalo *cerrado*. Sin embargo, también existen ecuaciones de interés en física en los que no se satisfacen algunas de estas condiciones.

Por ejemplo, supóngase que se desea estudiar la ecuación de Bessel de orden v sobre el intervalo $0 < x < 1$. Esta ecuación algunas veces se escribe en la forma[6]

$$-(xy')' + \frac{v^2}{x} y = \lambda x y, \tag{3}$$

de modo que $p(x) = x$, $q(x) = v^2/x$ y $r(x) = x$. Por tanto, $p(0) = 0$, $r(0) = 0$ y $q(x)$ no está acotada y, de donde, es discontinua cuando $x \to 0$. Sin embargo, las condiciones impuestas sobre problemas regulares de Sturm-Liouville se satisfacen en otras partes del intervalo.

De manera semejante, para la ecuación de Legendre se tiene

$$-[(1 - x^2)y']' = \lambda y, \qquad -1 < x < 1 \tag{4}$$

en donde $\lambda = \alpha(\alpha + 1)$, $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$ y $r(x) = 1$. En este caso, las condiciones requeridas sobre p, q y r se satisfacen en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, excepto en $x = 1$, en donde p es cero.

Se usa la expresión problemas singulares de Sturm-Liouville para referirse a cierta clase de problemas con valores en la frontera para la ecuación diferencial (1) en los que las funciones p, q y r satisfacen las condiciones previamente establecidas sobre el intervalo abierto $0 < x < 1$, pero por lo menos una no las satisface en uno o los dos puntos frontera. También se prescriben condiciones adecuadas en la frontera por separado, de un tipo que se describe posteriormente con más detalle en esta sección. También se presentan problemas singulares si el intervalo básico no está acotado; por ejemplo, $0 \leq x \leq \infty$. En este libro no se considerará esta última clase de problema singular.

Como ejemplo de un problema singular sobre un intervalo finito, considérese la ecuación

$$xy'' + y' + \lambda x y = 0, \tag{5a}$$

o bien,

$$-(xy')' = \lambda x y, \tag{5b}$$

sobre el intervalo $0 < x < 1$ y supóngase que $\lambda > 0$. Esta ecuación surge en el estudio de las vibraciones libres de una membrana elástica circular, y en la sección 11.6 se analiza aún más. Si se introduce la nueva variable independiente t definida por $t = \sqrt{\lambda} x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\lambda}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda \frac{d^2y}{dt^2}.$$

[6] La sustitución $t = \sqrt{\lambda} x$ reduce la ecuación (3) a la forma estándar $t^2y'' + ty' + (t^2 - y^2)y = 0$.

De donde, la ecuación (5a) queda

$$\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\lambda\frac{d^2y}{dt^2}+\sqrt{\lambda}\frac{dy}{dt}+\lambda\frac{t}{\sqrt{\lambda}}y=0$$

o bien, si se cancela el factor común $\sqrt{\lambda}$ en cada término,

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+ty=0. \tag{6}$$

La ecuación (6) es la ecuación de Bessel de orden cero (ver la sección 5.9). La solución general de la ecuación (6) para $t>0$ es

$$y=c_1J_0(t)+c_2Y_0(t);$$

de donde, la solución general de la (5) para $x>0$ es

$$y=c_1J_0(\sqrt{\lambda}x)+c_2Y_0(\sqrt{\lambda}x), \tag{7}$$

en donde J_0 y Y_0 denotan las funciones de Bessel de primera y segunda clases de orden cero. A partir de las ecuaciones (7) y (13) de la sección 5.9 se tiene

$$J_0(\sqrt{\lambda}x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\lambda^mx^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad x>0 \tag{8}$$

$$Y_0(\sqrt{\lambda}x)=\frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma+\ln\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)J_0(\sqrt{\lambda}x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m\lambda^mx^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x>0, \tag{9}$$

en donde $H_m=1+(1/2)+\cdots+(1/m)$ y $\gamma=\lim_{m\to\infty}(H_m-\ln m)$. En la figura 5.9.2 se dan las gráficas de $y=J_0(x)$ y $y=Y_0(x)$.

Supóngase que se busca una solución de la ecuación (5) que también satisfaga las condiciones en la frontera

$$y(0)=0, \tag{10a}$$

$$y(1)=0, \tag{10b}$$

que son típicas de las que se han encontrado en otros problemas de este capítulo. En virtud de que $J_0(0)=1$ y $Y_0(x)\to-\infty$ cuando $x\to0$, se puede satisfacer la condición $y(0)=0$ solamente al elegir $c_1=c_2=0$ en la ecuación (7). Por tanto, el problema con valores en la frontera (5), (10) sólo tiene la solución trivial.

Una interpretación de este resultado es que la condición en la frontera (10a) en $x=0$ es demasiado restrictiva para el ecuación diferencial (5). Esto ilustra la situación general; a saber, que en un punto frontera singular es necesario considerar un tipo modificado de condición en la frontera. En el presente problema, supóngase que sólo se requiere que la solución (7) de la ecuación (5) y su derivada permanezcan acotadas. En otras palabras se toma como la condición en la frontera en $x=0$ el requisito

$$y, y' \text{ acotadas cuando } x\to0. \tag{11}$$

Esta condición se puede satisfacer al elegir $c_2 = 0$, de modo que se elimine la solución no acotada Y_0. Entonces, la segunda condición en la frontera $y(1) = 0$ da

$$J_0(\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{12}$$

Es posible demostrar[7] que la ecuación (12) tiene un conjunto infinito de raíces positivas discretas, que dan lugar a los eigenvalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ del problema dado. Las eigenfunciones correspondientes son

$$\phi_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x), \tag{13}$$

determinadas sólo hasta una constante multiplicativa. El problema con valores en la frontera (5), (10b) y (11) es un ejemplo de un problema singular de Sturm-Liouville. Este ejemplo ilustra que si las condiciones en la frontera se relajan de manera adecuada, entonces un problema singular de Sturm-Liouville puede tener una sucesión infinita de eigenvalores y eigenfunciones, precisamente como sucede para un problema regular de Sturm-Liouville.

Debido a su importancia en las aplicaciones, vale la pena investigar un poco más los problemas singulares con valores en la frontera. Existen dos preguntas importantes de interés:

1. ¿Precisamente qué tipo de condiciones en la frontera se pueden permitir en un problema singular de Sturm-Liouville?
2. ¿Hasta qué punto los eigenvalores y las eigenfunciones de un problema singular comparten las propiedades de los eigenvalores y las eigenfunciones de los problemas regulares de Sturm-Liouville? En especial, ¿son reales los eigenvalores, son ortogonales las eigenfunciones y es posible desarrollar una función dada como una serie de eigenfunciones?

A las dos preguntas se les puede dar respuesta mediante un estudio de la identidad

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = 0, \tag{14}$$

que tuvo una importancia esencial en el desarrollo de la teoría de los problemas regulares de Sturm-Liouville. Por consiguiente, se investigarán las condiciones en las que se cumple esta relación para los problemas singulares, en donde la integral de la ecuación (14) ahora es posible se tenga que analizar como una integral impropia. Para concretar considérese la ecuación diferencial (1) y supóngase que $x = 0$ es un punto de frontera singular, pero que $x = 1$ no lo es. Se impone la condición de la frontera (2b) en el punto frontera no singular $x = 1$, pero, por el momento, se deja sin especificar la condición de la frontera en $x = 0$. De hecho, el objetivo principal es determinar qué tipos de condiciones en la frontera son permisibles en un punto frontera singular si ha de cumplirse la ecuación (14).

Dado que el problema con valores en la frontera que se está analizando es singular en $x = 0$, se considera la integral $\int_\epsilon^1 L[u]v\, dx$ en vez de $\int_0^1 L[u]v\, dx$, como en la sección 11.3 y luego se hace ϵ a cero. Si se supone que u y v tienen por lo menos dos derivadas continuas sobre $\epsilon \le x \le 1$, y se integra dos veces por partes, se encuentra que

[7] La función J_0 está bien tabulada; las raíces de la ecuación (12) se pueden encontrar en varias tablas; por ejemplo, en Jahnke y Emde o en Abramowitz y Stegun. Las tres primeras raíces de la (12) son $\sqrt{\lambda} = 2.405$, 5.520, y 8.654, respectivamente, hasta cuatro cifras significativas; $\sqrt{\lambda_n} \cong (n - 1/4)\pi$ para n grande.

$$\int_{\epsilon}^{1} \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_{\epsilon}^{1}. \tag{15}$$

Una vez más, se elimina el término frontera en $x = 1$ si tanto u como v satisfacen la condición en la frontera (2b) y, por tanto,

$$\int_{\epsilon}^{1} \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)]. \tag{16}$$

Si se toma el límite cuando $\epsilon \to 0$ da

$$\int_{0}^{1} \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)]. \tag{17}$$

De donde, (14) se cumple si y sólo si, además de las suposiciones expresadas antes,

$$\lim_{\epsilon \to 0} p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)] = 0 \tag{18}$$

para todo par de funciones u y v de la clase que se está considerando. Por consiguiente, la ecuación (18) es el criterio que determina qué condiciones en la frontera son permisibles en $x = 0$, si ese punto es un punto frontera singular; a saber.

$$\lim_{\epsilon \to 0} p(1 - \epsilon)[u'(1 - \epsilon)v(1 - \epsilon) - u(1 - \epsilon)v'(1 - \epsilon)] = 0. \tag{19}$$

En resumen, como en la sección 11.3, se dice que un problema singular con valores en la frontera para la ecuación (1) es **autoadjunto** si la (14) es válida, quizá como una integral impropia, para cada par de funciones u y v con las siguientes propiedades: son dos veces continuamente diferenciables sobre el intervalo abierto $0 < x$ 1, satisfacen una condición en la frontera de la forma (2) en cada punto frontera regular y satisfacen una condición en la frontera suficiente para asegurar la ecuación (18), si $x = 0$ es un punto frontera singular, o bien, la (19), si $x = 1$ es un punto frontera singular. Si por lo menos un punto frontera es singular, entonces se dice la ecuación diferencial (1), junto con dos condiciones en la frontera del tipo que se acaba de describir, forma un **problema singular de Sturm-Liouville.**

Por ejemplo, para la ecuación (5) se tiene $p(x) = x$. Si u y v satisfacen la condición en la frontera (11) en $x = 0$, es evidente que se cumplirá la ecuación (18). De donde, el problema singular con valores en la frontera que consta de la ecuación diferencial (5), la condición en la frontera (11) en $x = 0$ y cualquier condición en la frontera de la forma (2b) en $x = 1$, es autoadjunto.

La diferencia más sorprendente entre los problemas regular y singular de Sturm-Liouville es que, en un problema singular, los eigenvalores pueden no ser discretos. Es decir, el problema puede tener soluciones no triviales para todo valor de λ o para todo valor de λ en algún intervalo. En ese caso, se dice que el problema tiene un *espectro continuo*. Puede suceder que un problema singular tenga una mezcla de eigenvalores discretos y también un espectro continuo. Por último, es posible que sólo exista un conjunto discreto de eigenvalores, precisamente como en el caso regular que se analizó en la sección 11.3. Por ejemplo, esto es cierto para el problema que consta de las ecuaciones (5), (10b) y (11). En general, puede ser difícil determinar qué caso ocurre en realidad en un problema dado.

De hecho, un análisis sistemático de los problemas singulares de Sturm-Liouville es bastante complejo[8] y requiere una extensión sustancial de los métodos presentados en este libro. Nos restringiremos a algunos ejemplos relacionados con aplicaciones físicas; en cada uno de estos ejemplos se sabe que existe un conjunto infinito de eigenvalores discretos.

Si un problema singular de Sturm-Liouville tiene solamente un conjunto discreto de eigenvalores y eigenfunciones, entonces es posible aplicar la ecuación (14), del mismo modo que en la sección 11.3, para probar que los eigenvalores de un problema de este tipo son reales y que las eigenfunciones son ortogonales con respecto a la función de peso r. Entonces se llega al desarrollo de una función dada en términos de una serie de eigenfunciones como en la sección 11.3.

Esos desarrollos son útiles como en el caso regular, para resolver problemas con valores en la frontera no homogéneos. El procedimiento es muy semejante al que se describió en la sección 11.4. En los problemas 1 a 4 se indican algunos ejemplos para ecuaciones diferenciales ordinarias y, en la sección 11.6, se presentan algunos problemas para ecuaciones diferenciales parciales.

Por ejemplo, las eigenfunciones $\phi_n(x) = J_0(\lambda_n x)$ del problema singular de Sturm-Liouville

$$-(xy')' = \lambda xy, \qquad 0 < x < 1$$
$$y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 0, \qquad y(1) = 0$$

satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n \tag{20}$$

con respecto a la función de peso $r(x) = x$. Entonces, si f es una función dada, se supone que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x). \tag{21}$$

Si se multiplica la ecuación (21) por $xJ_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)$ y se integra término a término, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, da

$$\int_0^1 xf(x)J_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 xJ_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)\, J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x)\,dx. \tag{22}$$

Debido a la condición de ortogonalidad (20), el segundo miembro de la ecuación (22) se reduce a un solo término; de donde,

$$c_m = \frac{\displaystyle\int_0^1 xf(x)J_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_m}\, x)\,dx}, \tag{23}$$

que determina los coeficientes de la serie (21).

La convergencia de la serie (21) se establece por una extensión del teorema 11.3.4, para cubrir este caso. También es posible demostrar que este teorema se cumple para otros conjuntos de funciones de Bessel, que son soluciones de problemas adecuados con valores en la frontera, para los polinomios de Legendre y para las soluciones de varios otros problemas singulares de Sturm-Liouville de bastante interés.

[8] Ver, por ejemplo, el capítulo 5 del libro de Yosida.

Es necesario hacer resaltar que los problemas singulares mencionados aquí no necesariamente son típicos. En general, los problemas singulares con valores en la frontera se caracterizan por espectros continuos, en vez de por conjuntos discretos de eigenvalores. Por lo tanto, los conjuntos correspondientes de eigenfunciones no son numerables y no existen desarrollos en serie del tipo descrito en el teorema 11.3.4; se sustituyen por representaciones integrales adecuadas.

Problemas

1. Encuentre una solución formal del problema no homogéneo con valores en la frontera

$$-(xy')' = \mu xy + f(x),$$

$$y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 0, \qquad y(1) = 0,$$

en donde f es una función continua dada sobre $0 \leq x \leq 1$ y μ no es un eigenvalor del problema homogéneo correspondiente.
Sugerencia: aplique un desarrollo en serie semejante a los de la sección 11.4.

2. Considere el problema con valores en la frontera

$$-(xy')' = \lambda xy,$$

$$y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 0, \qquad y'(1) = 0.$$

a) Demuestre que $\lambda_0 = 0$ es un eigenvalor de este problema correspondiente a la eigenfunción $\phi_0(x) = 1$. Si $\lambda > 0$, demuestre formalmente que las eigenfunciones se expresan por $\phi_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$, en donde $\sqrt{\lambda_n}$ es la n-ésima raíz positiva (en orden creciente) de la ecuación $J_0'(\sqrt{\lambda}) = 0$. Es posible demostrar que existe una sucesión infinita de esas raíces.
b) Demuestre que si $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

c) Encuentre una solución formal del problema no homogéneo

$$-(xy')' = \mu xy + f(x),$$

$$y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 0, \qquad y'(1) = 0,$$

en donde f es una función continua dada sobre $0 \leq x \leq 1$ y μ no es un eigenvalor del problema homogéneo correspondiente.

3. Considere el problema

$$-(xy')' + (k^2/x)y = \lambda xy,$$

$$y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 0, \qquad y(1) = 0,$$

en donde k es un entero positivo.
a) Use la sustitución $t = \sqrt{\lambda}\,x$ para demostrar que la ecuación diferencial anterior se reduce a la ecuación de Bessel de orden k (ver el problema 9 de la sección 5.9). Una solución es $J_k(t)$; una segunda solución linealmente independiente, denotada por $Y_k(t)$, es no acotada cuando $t \to 0$.

b) Demuestre formalmente que los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ del problema dado son los cuadrados de los ceros positivos de $J_k(\sqrt{\lambda})$, y que las eigenfunciones correspondientes son $\phi_n(x) = J_k(\sqrt{\lambda_n}x)$. Es posible demostrar que existe una sucesión infinita de esos ceros.

c) Demuestre que las eigenfunciones $\phi_n(x)$ satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

d) Determine los coeficientes del desarrollo formal en serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x).$$

e) Encuentre una solución formal del problema no homogéneo.

$$-(xy')' + (k^2/x)y = \mu xy + f(x),$$

$$y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 0, \qquad y(1) = 0,$$

en donde f es una función continua dada sobre $0 \leq x \leq 1$, y μ no es un eigenvalor del problema homogéneo correspondiente.

4. Considere la ecuación de Legendre (ver los problemas 20 a 22 de la sección 5.3)

$$-[(1-x^2)y']' = \lambda y$$

sujeta a las condiciones en la frontera

$$y(0) = 0, \qquad y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 1.$$

Las eigenfunciones de este problema son los polinomios impares de Legendre $\phi_1(x) = P_1(x) = x$, $\phi_2(x) = P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \ldots, \phi_n(x) = P_{2n-1}(x), \ldots$ correspondientes a los eigenvalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4 \cdot 3, \ldots, \lambda_n = 2n(2n-1), \ldots$

a) Demuestre que

$$\int_0^1 \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

b) Encuentre una solución formal del problema no homogéneo

$$-[(1-x^2)y']' = \mu y + f(x),$$

$$y(0) = 0, \qquad y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 1,$$

en donde f es una función continua dada sobre $0 \leq x \leq 1$, y μ no es un eigenvalor del problema homogéneo correspondiente.

5. La ecuación

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0 \tag{i}$$

es una ecuación de Chebyshev; ver el problema 10 de la sección 5.3.

a) Demuestre que la ecuación (i) puede escribirse en la forma

$$-[(1-x^2)^{1/2}y']' = \lambda(1-x^2)^{-1/2}y, \qquad -1 < x < 1. \tag{ii}$$

b) Considere las condiciones en la frontera

$$y, y' \text{ acotadas cuando } x \to -1, \qquad y, y' \text{ acotadas cuando } x \to 1 \tag{iii}$$

Demuestre que el problema con valores en la frontera (ii), (iii) es autoadjunto.

c) Es posible demostrar que el problema con valores en la frontera (ii), (iii) tiene los eigenvalores $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \ldots \lambda_n = n^2, \ldots$. Las eigenfunciones correspondientes son los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 1 - 2x^2, \ldots$. Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{(1-x^2)^{1/2}}\,dx = 0, \qquad m \neq n. \tag{iv}$$

Observe que esta es una integral impropia convergente.

*11.6 Otras consideraciones sobre el método de separación de variables: un desarrollo en serie de Bessel

En este capítulo el interés es extender el método de separación de variables desarrollado en el capítulo 10 hacia una clase más amplia de problemas: a problemas que comprenden ecuaciones diferenciales más generales, condiciones en la frontera más generales o regiones geométricas diferentes. En la sección 11.4 se indicó cómo tratar con una clase de ecuaciones diferenciales o condiciones en la frontera más generales. Aquí, la atención se concentra en problemas planteados en varias regiones geométricas, destacando aquellos que llevan a problemas singulares se Sturm-Liouville, cuando se separan las variables.

Por su relativa sencillez, así como por la considerable importancia física de muchos problemas a los que es aplicable, el método de separación de variables merece un lugar importante en la teoría y aplicación de las ecuaciones diferenciales parciales.

Sin embargo, este método en realidad tiene ciertas limitaciones que no deben olvidarse. En primer lugar, el problema debe ser lineal, de modo que sea posible hacer intervenir el principio de superposición para construir soluciones adicionales al formar combinaciones lineales de las soluciones fundamentales de un problema homogéneo apropiado.

Como cuestión práctica, también debe ser posible resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias, obtenidas después de separar las variables, de manera razonablemente conveniente. En algunos problemas a los que en principio es posible aplicar el método de separación de variables, éste tiene un valor práctico muy limitado, debido a la falta de información acerca de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen.

Además, la geometría de la región que interviene en el problema se sujeta a restricciones más bien estrictas. Por una parte, es necesario usar un sistema de coordenadas en el que se puedan separar las variables y sustituir la ecuación diferencial parcial por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para la ecuación de Laplace existen alrededor de una docena de esos sistemas de coordenadas; para la mayoría de los lectores de este libro, probablemente sólo sean conocidas las coordenadas rectangulares, cilíndricas circulares y esféricas. Por otra parte, la frontera de la región de interés debe constar de curvas o superficies coordenadas; es decir de curvas o superficies sobre las que una de las variables permanezca constante. Por tanto, al nivel elemental, se está limitado a regiones acotadas por rectas o arcos circulares, en dos dimensiones, o por planos, cilindros circulares, conos circulares o esferas, en tres dimensiones.

En problemas tridimensionales, la separación de variables en el operador de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ da la ecuación $X'' + \lambda X = 0$, en coordenadas rectangulares, a la ecuación de Bessel, en coordenadas cilíndricas y a la ecuación de Legendre, en coordenadas esféricas. Este hecho es en gran parte la causa de intenso estudio que se ha realizado de estas ecuaciones y de las funciones definidas por ellas. También vale la pena hacer notar que dos de las tres situaciones más importantes llevan a problemas singulares, en vez de regulares, de Sturm-Liouville. Por tanto, los problemas singulares de ninguna manera son excepcionales e incluso pueden ser más interesantes que los regulares. El resto de esta sección se dedicará a un ejemplo que comprende un desarrollo de una función dada como una serie de funciones de Bessel.

Las vibraciones de una membrana circular elástica. En la sección 10.6 [ecuación (7)] se hizo notar que las vibraciones transversales de una membrana elástica delgada se rigen por la ecuación bidimensional de onda.

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_w. \tag{1}$$

Para estudiar el movimiento de una membrana circular es conveniente escribir la ecuación (1) en coordenadas polares:

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) = u_{tt}. \tag{2}$$

Se supondrá que la membrana tiene radio unitario, que está fija rígidamente alrededor de su circunferencia y que, inicialmente, ocupa una posición desplazada independiente de la variable angular θ, a partir de la cual se libera en el instante $t = 0$. Debido a la simetría circular de las condiciones iniciales y en la frontera, es natural suponer también que u es independiente de θ; es decir, que u es una función sólo de r y t. En este caso, la ecuación diferencial (2) queda

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = u_{tt}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0. \tag{3}$$

La condición en la frontera en $r = 1$ es

$$u(1, t) = 0, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

y las condiciones iniciales son

$$u(r, 0) = f(r), \qquad 0 \leq r \leq 1, \tag{5}$$

$$u_t(r, 0) = 0, \qquad 0 \leq r \leq 1, \tag{6}$$

en donde $f(r)$ describe la configuración inicial de la membrana. Para ser coherentes, también se requiere que $f(1) = 0$. Por último, se expresa de manera explícita el requisito de que $u(r, t)$ debe estar acotada para $0 \leq r \leq 1$.

Si se supone que $u(r, t) = R(r)T(t)$ y se sustituye $u(r, t)$ en la ecuación (3), se obtiene

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \sigma. \tag{7}$$

Como en el capítulo 10, se considerarán todos los casos posibles para la constante de separación σ. Se encuentra que, para obtener soluciones acotadas no triviales que satisfagan las condiciones homogéneas en la frontera y las iniciales es necesario tener $\sigma < 0$. De donde, se hace $\sigma = -\lambda^2$ con $\lambda > 0$. Entonces, la ecuación (7) da

$$r^2R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0, \tag{8}$$

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0. \tag{9}$$

Por tanto,

$$T(t) = k_1 \operatorname{sen} \lambda at + k_2 \cos \lambda at. \tag{10}$$

Si se introduce la nueva variable independiente $\xi = \lambda r$ en (8), se obtiene

$$\xi^2 \frac{d^2R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + \xi^2 R = 0, \tag{11}$$

que es la ecuación de Bessel de orden cero. De este modo,

$$R = c_1 J_0(\xi) + c_2 Y_0(\xi), \tag{12}$$

en donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de primera y segunda clases, respectivamente, de orden cero (ver la sección 11.5). En términos de r se tiene

$$R = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r). \tag{13}$$

La condición de que $u(r, t)$ sea acotada requiere que R permanezca acotada cuando $r \to 0$. Como $Y_0(\lambda r) \to \infty$ cuando $r \to 0$, es necesario elegir $c_2 = 0$. Entonces, la condición en la frontera (4) requiere que

$$J_0(\lambda) = 0. \tag{14}$$

Como consecuencia, se obtienen los valores permisibles de la constante de separación a partir de las raíces de la ecuación trascendente (14). Recuérdese por lo visto en la sección 11.5, que $J_0(\lambda)$ tiene un conjunto infinito de ceros positivos discretos, que se denotan por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$, en orden de magnitud creciente. Además, las funciones $J_0(\lambda_n r)$ son las eigenfunciones de un problema singular de Sturm-Liouville y es posible utilizarlas como la base de un desarrollo en serie para la función dada f. Las soluciones fundamentales de este problema, que satisfacen la ecuación diferencial parcial (3), la condición en la frontera (4) y la condición de ser acotadas, son

$$u_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen} \lambda_n at, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

$$v_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

A continuación se supondrá que $u(r, t)$ se puede expresar como una combinación lineal infinita de las soluciones fundamentales (15), (16):

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [k_n u_n(r, t) + c_n v_n(r, t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [k_n J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen} \lambda_n at + c_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at]. \end{aligned} \tag{17}$$

Las condiciones iniciales requieren que

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) = f(r) \tag{18}$$

y

$$u_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a k_n J_0(\lambda_n r) = 0. \tag{19}$$

Por la ecuación (23) de la sección 11.5 se obtiene

$$k_n = 0, \qquad c_n = \frac{\int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr}{\int_0^1 r[J_0(\lambda_n r)]^2\, dr}; \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial parcial (3) que satisface las condiciones en la frontera (4) y las condiciones iniciales (5) y (6), se expresa por

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n a t \tag{21}$$

con los coeficientes c_n definidos por la ecuación (20).

Problemas

1. Considere la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en el paralelogramo cuyos vértices son (0, 0), (2, 0), (3, 2) y (1, 2). Suponga que, sobre el lado $y = 2$, la condición en la frontera es $u(x, 2) = f(x)$ para $1 \le x \le 3$ y que sobre los otros tres lados $u = 0$ (ver la figura 11.6.1).
   a) Demuestre que no hay soluciones no triviales de la ecuación diferencial parcial de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ que también satisfagan las condiciones homogéneas en la frontera.
   b) Sean $\xi = x - \frac{1}{2}y$, $\eta = y$. Demuestre que el paralelogramo dado en el plano xy se transforma en el cuadrado $0 \le \xi \le 2$, $0 \le \eta \le 2$ en el plano $\xi\eta$. Demuestre que la ecuación diferencial se transforma en

   $$\tfrac{5}{4}u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 0.$$

   ¿Cómo se transforman las condiciones en la frontera?
   c) Demuestre que en el plano $\xi\eta$ la ecuación diferencial no tiene soluciones de la forma

   $$u(\xi, \eta) = U(\xi)V(\eta).$$

   Por tanto, en el plano xy la forma de la frontera impide realizar una solución por el método de separación de variables, mientras que en el plano $\xi\eta$ la región es aceptable, pero las variables en la ecuación diferencial ya no pueden separarse.
2. Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ en una membrana elástica circular vibrante de radio uno que satisface la condición en la frontera

   $$u(1, t) = 0, \qquad t \ge 0,$$

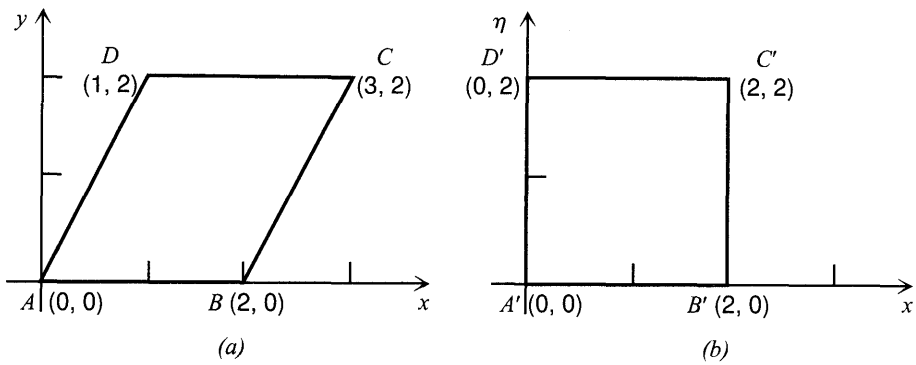


FIGURA 11.6.1 Región del problema 1.

y las condiciones iniciales

$$u(r, 0) = 0, \qquad u_t(r, 0) = g(r), \qquad 0 \leq r \leq 1,$$

en donde $g(1) = 0$.

Sugerencia: la ecuación diferencial que debe ser satisfecha es la ecuación (3) del texto.

3. Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ en una membrana elástica circular vibrante de radio uno que satisface la condición en la frontera

$$u(1, t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

y las condiciones iniciales

$$u(r, 0) = f(r), \qquad u_t(r, 0) = g(r), \qquad 0 \leq r \leq 1,$$

en donde $f(1) = g(1) = 0$.

4. La ecuación de onda en coordenadas polares es

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$

Demuestre que si $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, entonces R, Θ y T satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - n^2)R = 0,$$
$$\Theta'' + n^2\Theta = 0,$$
$$T'' + \lambda^2a^2T = 0.$$

5. En las coordenadas cilíndricas circulares r, θ, z definidas por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z,$$

la ecuación de Laplace toma la forma

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0.$$

a) Demuestre que si $u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, entonces R, Θ y Z satisfacen las ecuaciones ordinarias

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - n^2)R = 0,$$
$$\Theta'' + n^2\Theta = 0,$$
$$Z'' - \lambda^2Z = 0.$$

b) Demuestre que si $u(r, \theta, z)$ es independiente de θ, entonces la primera ecuación del inciso a) queda

$$r^2R'' + rR' + \lambda^2r^2R = 0,$$

la segunda se omite por completo y la tercera permanece sin cambio.

6. Halle la temperatura de estado estable en una barra seminfinita $0 < z < \infty$, $0 \leq r < 1$, si la temperatura es independiente de θ y tiende a cero cuando $z \to \infty$. Suponga que la temperatura $u(r, z)$ satisface las condiciones en la frontera

$$u(1, z) = 0, \qquad z > 0,$$
$$u(r, 0) = f(r), \qquad 0 \leq r \leq 1.$$

Sugerencia: consulte el problema 5.

7. La ecuación

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2v = 0$$

es una generalización de la ecuación de Laplace y, algunas veces, se le da el nombre de Helmholtz (1821-1894).

a) En coordenadas polares, la ecuación de Helmholtz queda

$$v_{rr} + (1/r)v_r + (1/r^2)v_{\theta\theta} + k^2v = 0.$$

Si $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, demuestre que R y Θ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$r^2R'' + rR' + (k^2r^2 - \lambda^2)R = 0, \qquad \Theta'' + \lambda^2\Theta = 0.$$

b) Encuentre la solución de la ecuación de Helmholtz en el disco $r < c$, que permanece acotada en todos los puntos en el disco, que es periódica en θ con periodo 2π y que satisface la condición en la frontera $v(c, \theta) = f(\theta)$, en donde f es una función dada sobre $0 \leq \theta < 2\pi$.

Sugerencia: la ecuación para R es una ecuación de Bessel. Ver el problema 3 de la sección 11.5.

8. Considere el flujo del calor en un cilindro infinitamente largo de radio uno: $0 \leq r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Suponga que la superficie del cilindro se mantiene a la temperatura cero y que la distribución inicial de temperaturas es una función sólo de la variable radial r. Entonces la temperatura u es una función sólo de r y t y satisface la ecuación de conducción del calor

$$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r] = u_t, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0,$$

y las siguientes condiciones inicial y en la frontera:

$$u(r, 0) = f(r), \qquad 0 \leq r \leq 1,$$
$$u(1, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Demuestre que

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t}$$

en donde $J_0(\lambda_n) = 0$. Encuentre una fórmula para los c_n.

9. En las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ ($\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$) definidas por las ecuaciones

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \rho \cos\phi,$$

la ecuación de Laplace toma la forma

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_\rho + (\csc^2\phi)\, u_{\theta\theta} + u_{\phi\phi} + (\cot\phi)\, u_\phi = 0.$$

a) Demuestre que si $u(\rho, \theta, \phi) = \mathrm{P}(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, entonces P, Θ y Φ satisfacen ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\rho^2 \mathrm{P}'' + 2\rho \mathrm{P}' - \mu^2 \mathrm{P} = 0,$$

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0,$$

$$(\operatorname{sen}^2\phi)\Phi'' + (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\Phi' + (\mu^2 \operatorname{sen}^2\phi - \lambda^2)\Phi = 0.$$

La primera de estas ecuaciones es del tipo de Euler, mientras que la tercera está relacionada con la ecuación de Legendre.

b) Demuestre que si $u(\rho, \theta, \phi)$ es independiente de θ, entonces la primera ecuación del inciso a) permanece sin cambio, la segunda se omite y la tercera queda

$$(\operatorname{sen}^2\phi)\Phi'' + (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\Phi' + (\mu^2 \operatorname{sen}^2\phi)\Phi = 0.$$

c) Demuestre que si se define una nueva variable independiente s por $s = \cos\phi$, entonces la ecuación para Φ del inciso b) queda

$$(1 - s^2)\frac{d^2\Phi}{ds^2} - 2s\frac{d\Phi}{ds} + \mu^2\Phi = 0, \qquad -1 \leq s \leq 1.$$

Observe que ésta es la ecuación de Legendre.

10. Encuentre la temperatura de estado estable $u(\rho, \phi)$ en una esfera de radio unitario si la temperatura es independiente de θ y satisface la condición en la frontera

$$u(1, \phi) = f(\phi), \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Sugerencia: consulte el problema 9 y los problemas 20 a 28 de la sección 5.3. Use el hecho de que las únicas soluciones de la ecuación de Legendre que son finitas en ± 1 son los polinomios de Legendre.

*11.7 Series de funciones ortogonales: convergencia en la media

En la sección 11.3 se afirmó que con ciertas restricciones una función dada f puede desarrollarse en una serie de eigenfunciones de un problema con valores en la frontera de Sturm-Liouville y que la serie converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$ en cada punto del intervalo

abierto. En ciertas condiciones algo más restrictivas, la serie converge a $f(x)$ en cada punto del intervalo cerrado. Este tipo de convergencia se denomina convergencia puntual. En esta sección se describe un tipo distinto de convergencia que es especialmente útil para series de funciones ortogonales, como las eigenfunciones.

Suponga que se da el conjunto de funciones $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ que son continuas sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y satisfacen la condición de ortonormalidad

$$\int_0^1 r(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{1}$$

en donde r es una función de peso no negativa. Supóngase también que se quiere aproximar una función dada f, definida sobre $0 \leq x \leq 1$, mediante una combinación lineal de $\phi_1, \ldots \phi_n$. Es decir, si

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(x), \tag{2}$$

se desea elegir los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ de modo que la función S_n sea la mejor aproximación para f sobre $0 \leq x \leq 1$. El primer problema que se debe enfrentar al realizar esto es enunciar con precisión qué se entiende por "mejor aproximación de f sobre $0 \leq x \leq 1$". Hay varios significados razonables que puede asociarse a esta frase.

1. Es posible elegir n puntos $x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y requerir que $S_n(x)$ tenga el mismo valor que $f(x)$ en cada uno de estos puntos. Los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ se encuentran al resolver el conjunto de ecuaciones algebraicas lineales

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(x_j) = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Este procedimiento se conoce como **método de colocación**. Tiene la ventaja de que es muy fácil escribir las ecuaciones (3); basta con evaluar las funciones relativas en los puntos $x_1, \ldots, x_n$. Si estos puntos se eligen bien y si n es bastante grande, entonces es de suponer que $S_n(x)$ no sólo será igual a $f(x)$ en los puntos elegidos, sino que también estará razonablemente cerca de ella en los demás puntos. Sin embargo, la colocación adolece de varias deficiencias. Una es que si se agrega una función base más ϕ_{n+1}, entonces se requiere un punto más x_{n+1} y es necesario volver a calcular *todos* los coeficientes. Por tanto, no es conveniente para mejorar la exactitud de una aproximación por colocación mediante la inclusión de términos adicionales. Además, los a_i dependen de la ubicación de los puntos $x_1, \ldots, x_n$ y no es evidente cómo elegir de la mejor manera estos puntos.

2. Alternativamente, es posible considerar la diferencia $f(x) - S_n(x)$ e intentar hacerla lo más pequeña posible. La dificultad aquí es que $f(x) - S_n(x)$ es una función de x, así como los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, y no es evidente qué criterio debe aplicarse al seleccionar los a_i. La elección de los a_i que haga pequeño $f(x) - S_n(x)$ en un punto puede

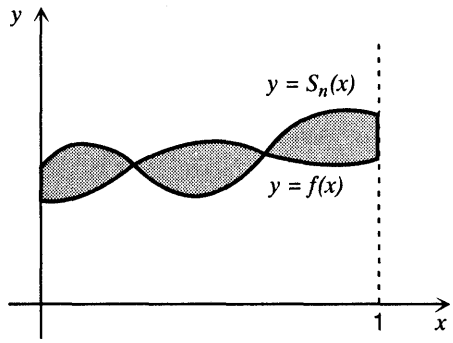


FIGURA 11.7.1 Aproximación de $f(x)$ por $S_n(x)$.

hacerlo grande en el otro. Una manera de proceder es considerar en vez de ello la mínima cota superior[9] de $|f(x) - S_n(x)|$ para x en $0 \leq x \leq 1$ y, después, elegir $a_1, \ldots, a_n$ de modo que se haga lo más pequeña posible esta cantidad. Es decir, si

$$E_n(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname*{lub}_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - S_n(x)|, \tag{4}$$

entonces elíjase $a_1, \ldots, a_n$ de modo que se minimice E_n. Este enfoque es intuitivamente atrayente y a menudo se aplica en cálculos teóricos. Sin embargo, en la práctica, suele ser muy difícil, si no imposible, escribir una fórmula explícita para $E_n(a_1, \ldots, a_n)$. Además, este procedimiento también comparte una de las desventajas de la colocación; a saber, al agregar un término adicional a $S_n(x)$, es necesario volver a calcular todos los coeficientes precedentes. Por tanto, con frecuencia no es útil en los problemas prácticos.

3. Otra manera de proceder es considerar

$$I_n(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 r(x)|f(x) - S_n(x)|\,dx. \tag{5}$$

Si $r(x) = 1$, entonces I_n es el área entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = S_n(x)$ (ver la figura 11.7.1). Entonces se pueden determinar los coeficientes a_i de modo que se minimice I_n. Para evitar las complicaciones que resultan de los cálculos con valores absolutos, es mejor considerar

$$R_n(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 r(x)[f(x) - S_n(x)]^2\,dx \tag{6}$$

como medida de calidad de la aproximación de la combinación lineal $S_n(x)$ para $f(x)$. Aunque es evidente que R_n es semejante en ciertos sentidos a I_n, carece de la simple interpretación geométrica de esta última. A pesar de ello, matemáticamente es mucho más fácil trabajar con R_n que con I_n. La cantidad R_n se llama **error cuadrático medio**

[9] La mínima cota superior (mcs) es una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior. La mcs de una función acotada siempre existe y es igual a su máximo si la función tiene uno. Sin embargo, recuérdese que una función discontinua puede no tener un máximo. En los problemas 2 a 6 se dan algunos ejemplos.

de la aproximación S_n para f. Si se eligen los a_i de modo que se minimice R_n, entonces se dice que S_n se aproxima a f en el sentido cuadrático medio.

Para elegir $a_1, \ldots, a_n$ a fin de minimizar R_n, es necesario satisfacer las condiciones necesarias.

$$\partial R_n/\partial a_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Al escribir la ecuación (7) y observar que $\partial S_n(x; a_1, \ldots, a_n)/\partial a_i$ es igual a $\phi_i(x)$, se obtiene

$$-\frac{\partial R_n}{\partial a_i} = 2\int_0^1 r(x)[f(x) - S_n(x)]\phi_i(x)\,dx = 0. \tag{8}$$

Si se sustituye $S_n(x)$ por su expresión de la (2) y se aplica la relación de ortogonalidad (1) se llega a

$$a_i = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_i(x)\,dx, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Los coeficientes definidos por la (9) se llaman coeficientes de Fourier de f con respecto al conjunto ortonormal $\phi_1\ \phi_2, \ldots, \phi_n$ y la función de peso r. Como las condiciones (7) sólo son necesarias y no suficientes para que R_n sea un mínimo se requiere un razonamiento separado para demostrar que R_n en realidad se minimiza si se eligen los a_i mediante la (9). Este razonamiento se describe en el problema 7.

Nótese que los coeficientes (9) son los mismos que los de la serie de eigenfunciones cuya convergencia, en ciertas condiciones, se enunció en el teorema 11.3.4. Por tanto, $S_n(x)$ es la n-ésima suma parcial de esta serie y constituye la mejor aproximación cuadrática media a $f(x)$ que es posible con las funciones $\phi_1, \ldots \phi_n$. De aquí en adelante se supondrá que los coeficientes a_i de $S_n(x)$ se expresan por la ecuación (9).

La ecuación (9) es notable en otros dos aspectos importantes. En primer lugar, proporciona una fórmula para cada a_i *por separado*, en vez de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales para los $a_1, \ldots, a_n$, como en el método de colocación, por ejemplo. Esto se debe a la ortogonalidad de las funciones base $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Además, la fórmula para los a_i es *independiente* de n, el número de términos en $S_n(x)$. El significado práctico de esto es el siguiente: Supóngase que, para obtener una mejor aproximación para f, se desea usar una aproximación con más términos, por ejemplo k términos, en donde $k > n$. Entonces, no es necesario volver a calcular los n primeros coeficientes de $S_n(x)$. Todo lo que se requiere es calcular, a partir de (9), los coeficientes $a_{n+1}, \ldots, a_k$ que surgen debido a las funciones base adicionales $\phi_{n+1}, \ldots, \phi_k$.

Por supuesto, si f, r y las ϕ_n son funciones complicadas, puede ser necesario evaluar las integrales por procedimientos numéricos rutinarios.

Supóngase ahora que existe una sucesión infinita de funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$, que son continuas y ortonormales sobre el intervalo $0 \le x \le 1$. Supóngase además que, cuando n crece sin cota, el error cuadrático medio R_n tiende a cero. En este caso, se dice que la serie infinita

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\phi_i(x)$$

converge en el **sentido cuadrático medio** (o, de modo más sencillo, en la **media**) a $f(x)$. La convergencia en la media es en esencia un tipo distinto de convergencia al de la convergencia puntual que se ha considerado hasta ahora. Una serie puede converger en la media sin conver-

ger en cada punto. Esto es geométricamente plausible porque el área entre dos curvas, que se comporta de la misma manera que el error cuadrático medio, puede ser cero aun cuando las funciones no sean las mismas en todos los puntos; pueden diferir sobre cualquier conjunto finito de puntos, por ejemplo, sin afectar el error cuadrático medio. Es menos evidente, pero también es cierto, que aun si una serie infinita converge en todo punto, puede no hacerlo en la media. De hecho, el error cuadrático medio puede incluso volverse no acotado. Un ejemplo de este fenómeno se da en el problema 1.

Supóngase ahora que se quiere conocer qué clase de funciones, definidas sobre $0 \leq x \leq 1$, se pueden representar como una serie infinita del conjunto ortonormal ϕ_i, $i = 1, 2 \ldots$. La respuesta depende de qué tipo de convergencia se requiere. Se dice que el conjunto $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es **completo** con respecto a la convergencia cuadrática media para un conjunto de funciones $\mathcal{F}$, si para cada función f en $\mathcal{F}$, la serie

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x), \tag{10}$$

con coeficientes dados por la ecuación (9), converge en la media. Existe una definición semejante para la compleción con respecto a la convergencia puntual.

Ahora los teoremas relacionados con la convergencia de series como la de la ecuación (10) se pueden volver a enunciar en términos de la idea de compleción. Por ejemplo, el teorema 11.3.4 se puede reenunciar como sigue: las eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville

$$-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \qquad 0 < x < 1, \tag{11}$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0, \tag{12}$$

son completas con respecto a la convergencia puntual ordinaria para el conjunto de funciones que son continuas sobre $0 \leq x \leq 1$ y tienen una derivada seccionalmente continua allí.

Si la convergencia puntual se sustituye por convergencia en la media, entonces el teorema 11.3.4 puede generalizarse considerablemente. Antes de enunciar este teorema acompañante del 11.3.4, es necesario definir qué se entiende por una función cuadráticamente integrable. Se dice que una función f es **cuadráticamente integrable** sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ si tanto f como f^2 son integrables[10] sobre ese intervalo. El siguiente teorema es semejante al 11.3.4, excepto en que comprende la convergencia en la media.

Teorema 11.7.1 Las eigenfunciones ϕ_i del problema de Sturm-Liouville (11), (12) son completas con respecto a la convergencia en la media para el conjunto de funciones que son cuadráticamente integrables sobre $0 \leq x \leq 1$. En otras palabras, dada cualquier función cuadráticamente integrable f, la serie (10), cuyos coeficientes están dados por la ecuación (9), converge a $f(x)$ en el sentido cuadrático medio.

[10] Para la integral de Riemann usada en cálculo elemental, las hipótesis de que f y f^2 sean integrables son independientes: es decir, existen funciones tales que f es integrable pero f^2 no lo es e inversamente (ver el problema 8). Una integral generalizada, conocida como integral de Lebesgue, puede definirse con la propiedad (entre otras) de que si f^2 es integrable, entonces necesariamente f también es integrable. El término *cuadráticamente integrable* se volvió de uso común en relación con este tipo de integración.

Es significativo que la clase de funciones especificadas en el teorema 11.7.1 sea tan grande. La clase de funciones cuadráticamente integrables contiene algunas funciones con muchas discontinuidades, incluyendo algunos tipos de discontinuidades infinitas, así como algunas funciones que no son diferenciables en ningún punto. Todas estas funciones tienen desarrollos convergentes en la media en las eigenfunciones del problema con valores en la frontera (11), (12). Sin embargo, en muchos casos, estas series no convergen puntualmente, por lo menos no en todos los puntos. Por tanto, la convergencia en la media está asociada de manera más natural con series de funciones ortogonales, como las eigenfunciones, que la convergencia puntual ordinaria.

La teoría de las series de Fourier que se analizó en el capítulo 10 es precisamente un caso especial de la teoría general de los problemas de Sturm-Liouville. Por ejemplo, las funciones $\phi_n(x) = \sqrt{2}\ \text{sen}\ n\pi x$ son las eigenfunciones normalizadas del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$. Por tanto, si f es una función dada cuadráticamente integrable sobre $0 \leq x \leq 1$ entonces, según el teorema 11.7.1, la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\, n\pi x, \tag{13}$$

en donde

$$b_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\,\text{sen}\, n\pi x\,dx, \tag{14}$$

converge en la media. La serie (13) es precisamente la serie de senos de Fourier que se estudió en la sección 10.4. Si f satisface las condiciones adicionales expresadas en el teorema 11.3.4, entonces esta serie converge puntualmente, así como en la media. De manera semejante, la serie de cosenos de Fourier corresponde al problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(1) = 0$.

El teorema 11.7.1 puede extenderse para abarcar problemas autoadjuntos con valores en la frontera que tengan condiciones periódicas en la frontera, como el problema

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{15}$$

$$y(-l) - y(l) = 0, \qquad y'(-l) - y'(l) = 0, \tag{16}$$

que se consideró en el ejemplo 4 de la sección 11.3. Las eigenfunciones del problema (15), (16) son $\phi_n(x) = \cos(n\pi x/l)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $\psi_n(x) = \text{sen}(n\pi x/l)$, para $n = 1, 2, \ldots$. Si f es una función dada cuadráticamente integrable sobre $-l \leq x \leq l$, entonces su desarrollo en términos de las eigenfunciones ϕ_n y ψ_n es de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l} \right), \tag{17}$$

en donde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Este desarrollo es exactamente la serie de Fourier para f que se analizó en las secciones 10.2 y 10.3. Según la generalización del teorema 11.7.1, la serie (17) converge en la media para cualquier función cuadráticamente integrable f, aun cuando f pueda no satisfacer las condiciones del teorema 10.3.1, que aseguran la convergencia puntual.

Problemas

1. En este problema se demuestra que la convergencia puntual de una sucesión $S_n(x)$ no incluye convergencia en la media e inversamente.
   a) Sea $S_n(x) = n\sqrt{x}e^{-nx^2/2}$, $0 \le x \le 1$. Demuestre que $S_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada x en $0 \le x \le 1$. Demuestre también que

$$R_n = \int_0^1 [0 - S_n(x)]^2\, dx = \frac{n}{2}(1 - e^{-n}),$$

   de donde, que $R_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, la convergencia puntual no incluye convergencia en la media.
   b) Sean $S_n(x) = x^n$ para $0 \le x \le 1$ y $f(x) = 0$ para $0 \le x \le 1$. Demuestre que

$$R_n = \int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \frac{1}{2n+1},$$

   de donde, $S_n(x)$ converge a $f(x)$ en la media. Demuestre también que $S_n(x)$ no converge a $f(x)$ puntualmente en todo $0 \le x \le 1$. Por tanto, la convergencia en la media no implica convergencia puntual.

En cada uno de los problemas 2 al 6 encuentre la mínima cota superior de la función dada sobre el intervalo dado. También determine si la función tiene un máximo sobre el intervalo.

2. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

3. $f(x) = x, \quad 0 < x < 1$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}, \quad 0 \le x < \infty$

5. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x < 1 \\ x - 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

7. Suponga que las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n$ satisfacen la relación de ortonormalidad (1) y que una función f dada se va a aproximar por $S_n(x) = c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$, en donde los coeficientes c_i no son necesariamente los de la ecuación (9). Demuestre que el error cuadrático medio R_n dado por la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$R_n = \int_0^1 r(x)f^2(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)^2,$$

   en donde los a_i son los coeficientes de Fourier dados por (9). Demuestre que R_n se minimiza si $c_i = a_i$ para cada i.

8. En este problema se demuestra con ejemplos que la integrabilidad (de Riemann) de f y f^2 son independientes.

   a) Sea $f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

   Demuestre que $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe como integral impropia, pero que $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ no existe.

   b) Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ -1, & x \text{ irracional} \end{cases}$

   Demuestre que $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ existe, pero que $\int_0^1 f(x)\,dx$ no existe.

9. Suponga que se desea construir un conjunto de polinomios $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . , $f_k(x)$, . . . , en donde el grado de $f_k(x)$ es k, que sean ortonormales sobre el intervalo $0 \le x \le 1$. Es decir, el conjunto de polinomios debe satisfacer

$$(f_j, f_k) = \int_0^1 f_j(x) f_k(x)\,dx = \delta_{jk}.$$

   a) Encuentre $f_0(x)$ al elegir el polinomio de grado cero tal que $(f_0, f_0) = 1$.
   b) Encuentre $f_1(x)$ al determinar el polinomio de grado uno tal que $(f_0, f_1) = 0$ y $(f_1, f_1) = 1$.
   c) Encuentre $f_2(x)$.
   d) La condición de normalización $(f_k, f_k) = 1$ es algo complicada en su aplicación. Sean $g_0(x)$, $g_1(x)$, . . . , $g_k(x)$, . . . la sucesión de polinomios que son ortogonales sobre $0 \le x \le 1$ y que están normalizados por la condición $g_k(1) = 1$. Halle $g_0(x)$, $g_1(x)$ y $g_2(x)$, y compárelos con $f_0(x)$, $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

10. Suponga que se desea construir un conjunto de polinomios $P_0(x)$, $P_1(x)$, . . . , $P_k(x)$, . . . , en donde $P_k(k)$ es de grado k, que sean ortogonales sobre el intervalo $0 \le x \le 1$; ver el problema 9. Además, suponga que $P_k(x)$ está normalizado por la condición $P_k(x) = 1$. Encuentre $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$. Observe que estos son los cuatro primeros polinomios de Legendre (ver el problema 22 de la sección 5.3).

11. En este problema se desarrollan algunos resultados más asociados con la convergencia en la media. Sean $R_n(a_1, \ldots, a_n)$, $S_n(x)$ y a_i definidos por las ecuaciones (6), (2) y (9), respectivamente.

   a) Demuestre que

$$R_n = \int_0^1 r(x) f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

   Sugerencia: sustituya $S_n(x)$ de la ecuación (6) por su expresión e integre, si se aplica la relación de ortogonalidad (1).

   b) Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le \int_0^1 r(x) f^2(x)\,dx$. Este resultado se conoce como desigualdad de Bessel.

   c) Demuestre que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ converge.

   d) Demuestre que $\lim_{n \to \infty} R_n = \int_0^1 r(x) f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$.

e) Demuestre que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x)$ converge a $f(x)$ en la media si y sólo si

$$\int_0^1 r(x) f^2(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

Este resultado se conoce como ecuación de Parseval.
En los problemas 12 a 14 sean $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$, las eigenfunciones normalizadas del problema de Sturm-Liouville (11), (12).

12. Demuestre que si a_n es el n-ésimo coeficiente de Fourier de una función cuadráticamente integrable f, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Sugerencia: aplique la desigualdad de Bessel, problema 11 b).
13. Demuestre que la serie

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \cdots + \phi_n(x) + \cdots$$

no puede ser la serie de eigenfunciones de ninguna función cuadráticamente integrable.
Sugerencia: ver el problema 12.
14. Demuestre que la serie

$$\phi_1(x) + \frac{\phi_2(x)}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{n}} + \cdots$$

no es la serie de eigenfunciones de ninguna función cuadráticamente integrable.
Sugerencia: aplique la desigualdad de Bessel, problema 11 b).
15. Demuestre que la ecuación de Parseval del problema 11 e) se obtiene formalmente al elevar al cuadrado la serie (10) correspondiente a f, multiplicar por la función de peso r e integrar término a término.

BIBLIOGRAFÍA

Los libros siguientes se mencionaron en el texto en relación con ciertos teoremas sobre los problemas de Sturm-Liouville:

Birkhoff, G, y Rota, G. C., *Ordinary Differential Equations* (4a ed.) (New York: Wiley).

Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (New York: Wiley).

Weinberger, H., *A First Course in Partial Differential Equations* (New York: Wiley, 1965).

Yosida, K., *Lectures on Differential Integral Equations* (New York: Wiley-Interscience).

Los siguientes libros son fuentes convenientes de datos numéricos y gráficos sobre las funciones de Bessel y de Legendre:

Abramowitz, M., y Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover). publicado originalmente por la National Bureau of Standards, Washington, D. C., 1964.

Jahnke, E. y Emde, F., *Tables of Functions with Formulae and Curves* (Leipzig: Teubner, 1938); reimpreso por Dover, New York.

Los siguientes libros también contienen mucha información acerca de los problemas de Sturm-Liouville:

Cole, R. H., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Irvington).

Hochstadt, H., *Differential Equations: A Modern Approach* (New York: Holt, 1964); reimpreso por Dover, New York.

Miller, R. K. y Michel, A. N., *Ordinary Differential Equations* (New York: Academic Press).

Tricomi, F. G., *Differential Equations* (New York: Hafner).

Respuestas a los problemas

CAPÍTULO 1 Sección 1.1, página 17

1. Segundo orden, lineal
2. Segundo orden, no lineal
3. Cuarto orden, lineal
4. Primer orden, no lineal
5. Segundo orden, no lineal
6. Tercer orden, lineal

15. $r = -2$
16. $r = \pm 1$
17. $r = 2, -3$
18. $r = 0, 1, 2$
19. $r = -1, -2$
20. $r = 1, 4$
21. Segundo orden, lineal
22. Segundo orden, lineal
23. Segundo orden, lineal
24. Segundo orden, no lineal
25. Cuarto orden, lineal
26. Segundo orden, no lineal
33. $y \to -1/2$ cuando $x \to \infty$
34. $y \to \infty$, -2 o $-\infty$, dependiendo del valor inicial de y
35. y es asintótica a $x - 3$ cuando $x \to \infty$
36. $y \to 0$ cuando $x \to \infty$
37. $y \to \infty$, 0 o $-\infty$, dependiendo del valor inicial de y
38. $y \to \infty$ o $-\infty$, dependiendo del valor inicial de y
39. $y \to 4$, 0 o $-\infty$, dependiendo del valor inicial de y
40. $y \to \infty$, 5 o 0, dependiendo del valor inicial de y

CAPÍTULO 2 Sección 2.1, página 31

1. $y = ce^{-3x} + (x/3) - (1/9) + e^{-2x}$
2. $y = ce^{2x} + x^3e^{2x}/3$
3. $y = ce^{-x} + 1 + x^2e^{-x}/2$
4. $y = (c/x) + (3\cos 2x)/4x + (3\operatorname{sen} 2x)/2$
5. $y = ce^x + 2xe^x$
6. $y = (c - x\cos x + \operatorname{sen} x)/x^2$
7. $y = x^2e^{-x^2} + ce^{-x^2}$
8. $y = (\arctan x + c)/(1 + x^2)^2$
9. $y = 3e^x + 2(x - 1)e^{2x}$
10. $y = (x^2 - 1)e^{-2x}/2$
11. $y = (3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1)/12x^2$
12. $y = (\operatorname{sen} x)/x^2$
13. $y = (x + 2)e^{2x}$
14. $y = x^{-2}[(\pi^2/4) - 1 - x\cos x + \operatorname{sen} x]$
15. $y = -(1 + x)e^{-x}/x^4, \quad x \neq 0$
16. $y = (x - 1 + 2e^{-x})/x, \quad x \neq 0$
17. $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
18. $y \to 1$ cuando $x \to \infty$
19. $y \to 0$ cuando $x \to \infty$
20. $y \to 0$ cuando $x \to \infty$
21. $y = \operatorname{arccosh} x$
26. Ver el problema 2.
27. Ver el problema 4.

Sección 2.2, página 40

1. $y = (c + \operatorname{sen} x)/x - \cos x$
2. $y = (c - \cos x)/x^3$
3. $y = (c - 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x)\cos x$
4. $y = [c + (x - 1)e^x]/x^2$
5. $y = (3x^2 - 4x + 6 + x^{-2})/12, \quad x > 0$
6. $y = x^{-1}(e^x + 1 - e), \quad x > 0$
7. $y = (2x + 1 - \pi)/\operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi$
8. $y = x^{-2}(\operatorname{sen} x - x\cos x), \quad x > 0$
9. $y = (2x + \pi)\csc x - 2\cos x, \quad -\pi < x < 0$
10. $y = (x^3 + x + 1)/x(x + 2), \quad -2 < x < 0$
11. $y = e^{-x}\int_0^x \frac{e^t}{1 + t^2}\,dt, \quad -\infty < x < \infty$
12. $y = -\frac{1}{3}(1 - x^2) + \frac{7}{3}(1 - x^2)^{-1/2}, \quad |x| < 1$

13. $y = cx^{-2} + x^{-1}$; $\lim_{x\to 0} y = \infty$ para toda c 14. $y = cx + x^2$; $\lim_{x\to 0} y = 0$ para toda c
15. $y = cx + 2x^{3/2}$; $\lim_{x\to 0} y = 0$ para toda c, pero $y'', y''', \ldots$, todas $\to \pm\infty$ cuando $x \to 0$

16. $y = \dfrac{c + \operatorname{sen} x}{x}$; $\lim_{x\to 0} y = \begin{cases} \pm\infty, & c \neq 0 \\ 1, & c = 0 \end{cases}$ 17. $0 < x < 3$

18. $\pi/2 < x < 3\pi/2$ 19. $-\infty < x < -2$ 20. $1 < x < \pi$
21. cuando $x \to \infty$: $y \to \infty$ si $y_0 > -2$, $y \to -2$ si $y_0 = -2$, $y \to -\infty$ si $y_0 < -2$
22. 0.671 23. b) $-\sqrt{\pi}/2$

24. a) $y_1(x) = \dfrac{1}{\mu(x)}$; $y_2(x) = \dfrac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)\,ds$

26. a) $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$ para $0 \le x \le 1$; $y = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2x}$ para $x > 1$
b) $y = e^{-2x}$ para $0 \le x \le 1$; $y = e^{-(x+1)}$ para $x > 1$
28. $y = \pm[5x/(2 + 5cx^5)]^{1/2}$ 29. $y = r/(k + cre^{-rx})$
30. $y = \pm[\epsilon/(\sigma + c\epsilon e^{-2\epsilon x})]^{1/2}$
31. $y = \pm\left\{\mu(t)\Big/\left[2\int_{t_0}^{t} \mu(s)\,ds + c\right]\right\}^{1/2}$, en donde $\mu(t) = \exp(2\Gamma \operatorname{sen} t + 2Tt)$

Sección 2.3, página 47

1. $3y^2 - 2x^3 = c$; $y \neq 0$ 2. $3y^2 - 2\ln 1 + x^3 = c$; $x \neq -1$, $y \neq 0$
3. $y^{-1} + \cos x = c$ si $y \neq 0$; también $y = 0$; en todas partes
4. $\arctan y - x - x^2/2 = c$; en todas partes
5. $2\tan 2y - 2x - \operatorname{sen} 2x = c$ si $\cos 2y \neq 0$; también $y = \pm(2n + 1)\pi/4$ para cualquier entero n; en todas partes
6. $y = \operatorname{sen}[\ln x + c]$ si $x \neq 0$ y $y < 1$; también $y = \pm 1$; $x \neq 0$ y $y < 1$
7. $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c$; $y + e^y \neq 0$ 8. $3y + y^3 - x^3 = c$; en todas partes
9. $y = [2(1 - x)e^x - 1]^{1/2}$, $-1.68 < x < 0.77$ aproximadamente
10. $r = 2/(1 - 2\ln\theta)$, $0 < \theta < \sqrt{e}$
11. $y = -[2\ln(1 + x^2) + 4]^{1/2}$, $-\infty < x < \infty$
12. $y = [3 - 2\sqrt{1 + x^2}]^{-1/2}$, $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5}$ 13. $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 15}$, $x > \frac{1}{2}\sqrt{15}$
14. $y = -\sqrt{(x^2 + 1)/2}$, $-\infty < x < \infty$
15. $y = [\pi - \operatorname{arcsen}(3\cos^2 x)]/3$, $|x - \pi/2| < 0.6155$
16. $y = \tan(2x + x^2)$, $|x + 1| < \sqrt{1 + \pi/2} \cong 1.6034$
17. $y^3 - 3y^2 - x - x^3 + 2 = 0$, $|x| < 1$
18. $y^3 - 4y - x^3 = -1$, $|x^3 - 1| < 16/3\sqrt{3}$ o $-1.28 < x < 1.60$
19. $2y^3 - 3(\operatorname{arcsen} x)^2 = c$

20. $y = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{bc - ad}{c^2}\ln|cx + d| + k$; $c \neq 0$, $cx + d \neq 0$

21. $x = \dfrac{c}{a}y + \dfrac{ad - bc}{a^2}\ln|ay + b| + k$; $a \neq 0$, $ay + b \neq 0$

22. $|y + 2x|^3|y - 2x| = c$

Sección 2.4, página 54

1. $2x + 5y > 0$ o $2x + 5y < 0$ 2. $x^2 + y^2 < 1$
3. En todas partes 4. $x + y > 0$ o $x + y < 0$

5. $1 - x^2 + y^2 > 0$, o $1 - x^2 + y^2 < 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$
6. En todas partes
7. $y \neq 0$, $y \neq 3$
8. $x \neq n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y \neq -1$
9. $y = \pm\sqrt{y_0^2 - 4x^2}$ $y_0 \neq 0$; $|x| < |y_0|/2$
10. $y = [(1/y_0) - x^2]^{-1}$ si $y_0 \neq 0$; $y = 0$ si $y_0 = 0$; el intervalo es $|x| < 1/\sqrt{y_0}$ si $y_0 > 0$; $-\infty < x < \infty$ si $y_0 \leq 0$
11. $y = y_0/\sqrt{2xy_0^2 + 1}$ si $y_0 \neq 0$; $y = 0$ si $y_0 = 0$; el intervalo es $-1/2y_0^2 < x < \infty$ si $y_0 \neq 0$; $-\infty < x < \infty$ si $y_0 = 0$
12. $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\ln(1 + x^3) + y_0^2}$; $-[1 - \exp(-3y_0^2/2)]^{1/3} < x < \infty$
13. a) No b) Sí haga $x_0 = 1/2$ en la ecuación (7) del texto. c) $|y| \leq (4/3)^{3/2} \cong 1.5396$
14. a) $y_1(x)$ es solución para $x \geq 2$; $y_2(x)$ es solución para toda x
    b) f_y no es continua en $(2, -1)$

Sección 2.5, página 60

1. a) 13.20 años b) 29.6 mg
2. $-11.7 \ln 2/\ln \frac{2}{3} \cong 20.0$ días
3. $1620 \ln \frac{4}{3}/\ln 2 \cong 672.4$ años
4. a) $Q(t) = 35.36 + 64.64 \exp(-0.02828t)$, Q en mg, t en días b) 35.36 mg
   c) 171.9 días d) 2.828 mg/día
5. a) 0.0001245 años^{-1} b) $Q_0 \exp(-0.0001245t)$, t en años c) 12,927 años
6. a) $(\ln 2)/r$ años b) 9.90 años c) 8.66%
7. a) $k(e^{rt} - 1)/r$ b) $k \cong \$3930$ c) 9.77%
8. a) \$549,119 b) \$864,268
9. $k = \$3086.64$ por año; \$1259.92
10. a) \$89,034.79 b) \$102,965.21
11. a) \$99,498.08 b) \$188,501.92
12. a) $(k/r) + [S_0 - (k/r)]e^{rt}$ b) rS_0 c) $(1/r)\ln[k/(k - k_0)]$ años
    d) $T \cong 8.66$ años e) $rS_0e^{rT}/(e^{rT} - 1)$ f) \$119,716
13. $p = (6.0 \times 10^8)\exp(0.005135t)$; D.C. 2376
14. $t = \ln \frac{13}{8}/\ln \frac{13}{12}$ min $\cong 6.07$ min
15. 1 hr, 58 min
16. 11:12 P.M.
17. $r = 3 - 2t$ mm, $0 < t < \frac{3}{2}$
18. $Q(t) = 120\gamma[1 - \exp(-t/60)]$; 120γ
19. $t = 100 \ln 100$ min $\cong 460.5$ min
20. $Q = 50e^{-0.2}(1 - e^{-0.2})$lb $\cong 7.42$ lb
21. $Q = 200 + t - [100(200)^2/(200 + t)^2]$ lb, $t < 300$; $c = 121/125$ lb/gal; $\lim_{t \to \infty} c = 1$ lb/gal
22. a) $x = 0.04[1 - \exp(-t/12{,}000)]$ b) $\tau \cong 36$ min
23. a) $c = k + (P/r) + [c_0 - k - (P/r)]e^{-rt/V}$; $\lim_{t \to \infty} c = k + (P/r)$
    b) $T = (V \ln 2)/r$; $T = (V \ln 10)/r$
    c) Superior, $T = 431$ años; Michigan, $T = 71.4$ años; Erie, $T = 6.05$ años; Ontario, $T = 17.6$ años

Sección 2.6, página 71

1. $N = 0$ es inestable
2. $N = -a/b$ es estable, $N = 0$ es inestable
3. $N = 1$ es estable, $N = 0$ y $N = 2$ son inestables
4. $N = 0$ es inestable
5. $N = 0$ es estable
6. $N = 0$ es estable
7. c) $N = [N_0 + (1 - N_0)kt]/[1 + (1 - N_0)kt]$
8. $N = 1$ es semiestable
9. $N = -1$ es estable, $N = 0$ es semiestable, $N = 1$ es inestable
10. $N = -1$ y $N = 1$ son estables, $N = 0$ es inestable

11. $N = 0$ es estable, $N = b^2/a^2$ es inestable
12. $N = 2$ es estable, $N = 0$ es semiestable, $N = -2$ es inestable
13. $N = 0$ y $N = 1$ son semiestables
15. a) $\tau = (1/r)\ln 4$; 55.452 años b) $T = (1/r)\ln[\beta(1-\alpha)/(1-\beta)\alpha]$; 175.78 años
16. a) $N = 0$ es inestable, $N = K$ es estable
    b) Cóncava hacia arriba para $0 < N \leq K/e$, cóncava hacia abajo para $K/e \leq N < K$
17. a) $N(t) = K\exp\{[\ln(N_0/K)]e^{-rt}\}$ b) $N(2) \simeq 0.7153\,K \simeq 57.6 \times 10^6$ kg
    c) $\tau \simeq 2.215$ años
18. c) $Y = EN_2 = KE[1-(E/r)]$ d) $Y_m = Kr/4$ para $E = r/2$
19. a) $N_{1,2} = K[1 \mp \sqrt{1-(4h/rK)}]/2$
20. a) $y = 0$ es inestable, $y = 1$ es estable b) $y = y_0[y_0 + (1-y_0)e^{-\alpha t}]$
21. a) $y = y_0 e^{-\beta t}$ b) $x = x_0\exp[-\alpha y_0(1-e^{-\beta t})/\beta]$ c) $x_0\exp(-\alpha y_0/\beta)$
22. b) $z = 1/[v + (1-v)e^{\beta t}]$ c) 0.0927
24. a) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \min(p, q)$; $x(t) = \dfrac{pq[e^{\alpha(q-p)t}-1]}{qe^{\alpha(q-p)t}-p}$ b) $\lim_{t\to\infty} x(t) = p$; $x = \dfrac{p^2\alpha t}{p\alpha t + 1}$

Sección 2.7, página 87

1. a) 50.4 m b) 5.25 s 2. a) 47.3 m b) 5.14 s
3. a) $x_m = v_0^2/2g$ b) $t_m = v_0/g$ c) $t = 2v_0/g$
4. $v = (mg/k) + (v_0 - mg/k)e^{-kt/m}$; $v_l = mg/k$
5. $t = (m\ln 10)/k$
6. a) $v = 5(1-e^{-0.2t})$ pie/s b) $v_l = 5$ pie/s
7. a) 176.7 pie/s b) 1074.5 pie/s c) 15 pie/s d) 256.6 s
8. $2\dfrac{m}{k}(\sqrt{v_0} - \sqrt{v}) + 2\dfrac{m^2g}{k^2}\ln\left|\dfrac{mg - k\sqrt{v_0}}{mg - k\sqrt{v}}\right| = t$; $v_l = \left(\dfrac{mg}{k}\right)^2$
9. $v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\dfrac{e^{2\sqrt{kg/m}t}-1}{e^{2\sqrt{kg/m}t}+1}$; $v_l = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ 10. $v_l = \left(\dfrac{mg}{k}\right)^{1/r}$
11. a) $x_m = -\dfrac{m^2g}{k^2}\ln\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right) + \dfrac{mv_0}{k}$ b) $t_m = \dfrac{m}{k}\ln\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right)$
12. a) $v = -(mg/k) + [v_0 + (mg/k)]\exp(-kt/m)$ b) $v = v_0 - gt$; sí
    c) $v = 0$ para $t > 0$
13. a) $v_l = 2a^2g(\rho - \rho')/9\mu$ b) $e = 4\pi a^3 g(\rho - \rho')/3E$
14. a) 11.58 m/s b) 13.45 m c) $k \geq 0.2394$ kg/s
15. a) $v = R\sqrt{2g/(R+x)}$ b) 50.6 h 16. $v_e = \left(\dfrac{2gR}{1+\xi}\right)^{1/2}$; altitud $\cong$ 1536 millas

Sección 2.8, página 95

1. $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$
2. No es exacta
3. $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$
4. $x^2y^2 + 2xy = c$
5. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$
6. No es exacta
7. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$; también $y = 0$
8. No es exacta
9. $e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y = c$
10. $y\ln x + 3x^2 - 2y = c$
11. No es exacta
12. $x^2 + y^2 = c$

13. $y = [x + \sqrt{28 - 3x^2}]/2, \quad |x| < \sqrt{28/3}$
14. $y = [x - (24x^3 + x^2 - 8x - 16)^{1/2}]/4, \quad x > 0.986$
15. $b = 3; \quad x^2y^2 + 2x^3y = c$
16. $b = 1; \quad e^{2xy} + x^2 = c$
17. $\int N(x, y)\, dy + \int \left[M(x, y) - \int N_x(x, y)\, dy \right] dx$
19. $x^2 + 2\ln|y| - y^{-2} = c$; también $y = 0$
20. $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$
21. $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$
22. $x^2e^x \operatorname{sen} y = c$
24. $\mu(t) = \exp \int R(t)\, dt$, en donde $t = xy$
25. $\mu(x) = e^{3x}; \quad (3x^2y + y^3)e^{3x} = c$
26. $\mu(x) = e^{-x}; \quad y = ce^x + 1 + e^{2x}$
27. $\mu(y) = y; \quad xy + y \cos y - \operatorname{sen} y = c$
28. $\mu(y) = e^{2y}/y; \quad xe^{2y} - \ln|y| = c$; también $y = 0$
29. $\mu(y) = \operatorname{sen} y; \quad e^x \operatorname{sen} y + y^2 = c$
30. $\mu(y) = y^2; \quad x^4 + 3xy + y^4 = c$
31. $\mu(x, y) = xy; \quad x^3y + 3x^2 + y^3 = c$

Sección 2.9, página 103

1. $y = cx + x\ln|x|$
2. $y = cx^2$
3. $\arctan(y/x) - \ln|x| = c$
4. $x^2 + y^2 - cx^3 = 0$
5. $|y - x| = c|y + 3x|^5$
6. $|y + x|\,|y + 4x|^2 = c$
7. $-2x/(x + y) = \ln c|x + y|$
8. $x/(x + y) + \ln|x| = c$
9. a) $|y - x| = c|y + x|^3$ b) $|y - x + 3| = c|y + x + 1|^3$
10. $|y + x + 4|\,|y + 4x + 13|^2 = c$
11. $-2(x - 2)/(x + y - 3) = \ln c|x + y - 3|$
12. $x^2y^2 + 2x^3y = c$
15. a) No b) Sí c) Sí d) No

Sección 2.10, página 107

1. $y = (c/x^2) + (x^3/5)$
2. $\arctan(y/x) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = c$
3. $x^2 + xy - 3y - y^3 = 0$
4. $x = ce^y + ye^y$
5. $x^2y + xy^2 + x = c$
6. $y = x^{-1}(1 - e^{1-x})$
7. $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$
8. $y = (4 + \cos 2 - \cos x)/x^2$
9. $x^2y + x + y^2 = c$
10. $(y^2/x^3) + (y/x^2) = c$
11. $x^3/3 + xy + e^y = c$
12. $y = ce^{-x} + e^{-x}\ln(1 + e^x)$
13. $2(y/x)^{1/2} - \ln|x| = c$
14. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$
15. $y = c/\cosh^2(x/2)$
16. $(2/\sqrt{3})\arctan[(2y - x)/\sqrt{3}x] - \ln|x| = c$
17. $y = ce^{3x} - e^{2x}$
18. $y = cx^{-2} - x$
19. $3y - 2xy^3 - 10x = 0$
20. $e^x + e^{-y} = c$
21. $e^{-y/x} + \ln|x| = c$
22. $y^3 + 3y - x^3 + 3x = 2$
23. $\dfrac{1}{y} = -x\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{x^2}\, dx + cx$; también $y = 0$
24. $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y = c$
25. $x^2/y + \arctan(y/x) = c$
26. $x^2 + 2x^2y - y^2 = c$
27. $\operatorname{sen} x \cos 2y - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = c$
28. $2xy + xy^3 - x^3 = c$
29. $2\operatorname{arcsen}(y/x) - \ln|x| = c$
30. $xy^2 - \ln|y| = 0$
31. $x + \ln|x| + x^{-1} + y - 2\ln|y| = c$; también $y = 0$
32. $x^3y^2 + xy^3 = -4$
33. b) $x = \int G'(p)/p\, dp$
34. $x + e^{-y} = c$
36. a) $y = x + (c - x)^{-1}$ b) $y = x^{-1} + 2x(c - x^2)^{-1}$ c) $y = \operatorname{sen} x + (c \cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x)^{-1}$
37. a) $v' - [x(t) + b]v = b$ b) $v = [b \int \mu(t)\, dt + c]/\mu(t), \quad \mu(t) = \exp[-(at^2/2) - bt]$
38. a) $dy/dx = 2y/x$ b) $dy/dx = -x/2y$ c) $x^2 + 2y^2 = c$
39. a) $y^2 - x^2 = c$ b) $x^2 + (y - c)^2 = c^2$ c) $x - y = c(x + y)^3$ d) $x^2 - 2cy = c^2; \ c > 0$

40. a) $y - 3x = c$ b) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan(y/x) = c$, or $r = ke^{-\theta}$
41. $y - b = c(x - a)$ 42. $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ 43. $x = cy^2$
44. En seis meses; \$4 millones. Al cabo de sólo un año, la fortuna se vuelve acotada.
45. b) $(h/a)\sqrt{k/\alpha\pi}$; sí c) $k/\alpha \leq \pi a^2$ 46. b) $k^2/2g(\alpha a)^2$
47. b) $W = [W_0^{1/3} + (\alpha t/3)]^3$
48. Aproximadamente 2.14 años a partir de ahora.

Sección 2.11, página 111

1. $dw/ds = (s + 1)^2 + (w + 2)^2$, $w(0) = 0$ 2. $dw/ds = 1 - (w + 3)^3$, $w(0) = 0$
3. $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k x^k}{k!}$; $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = e^{2x} - 1$
4. $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$; $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = e^{-x} - 1$
5. $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}$ 6. $\phi_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{3k-1}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}$
7. $\phi_1(x) = \frac{x^3}{3}$; $\phi_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9}$; $\phi_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9} + \frac{2x^{11}}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{x^{15}}{(7 \cdot 9)^2 \cdot 15}$
8. $\phi_1(x) = x$; $\phi_2(x) = x - \frac{x^4}{4}$; $\phi_3(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^7}{4 \cdot 7} - \frac{3x^{10}}{16 \cdot 10} + \frac{x^{13}}{64 \cdot 13}$

Sección 2.12, página 121

1. $y_n = (-1)^n(0.9)^n y_0$; $y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ 2. $y_n = y_0/(n + 1)$; $y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$
3. $y_n = y_0\sqrt{(n + 2)(n + 1)/2}$; $y_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$
4. $y_n = \begin{cases} y_0 & \text{si } n = 4k \text{ o } n = 4k - 1; \\ -y_0, & \text{si } n = 4k - 2 \text{ o } n = 4k - 3; \end{cases}$ y_n no tiene límite cuando $n \to \infty$
5. $y_n = (0.5)^n(y_0 - 12) + 12$; $y_n \to 12$ cuando $n \to \infty$
6. $y_n = (-1)^n(0.5)^n(y_0 - 4) + 4$; $y_n \to 4$ cuando $n \to \infty$
7. 7.25% 8. \$2283.63 9. \$258.14
10. a) \$804.62 b) \$877.57 c) \$1028.61
11. 30 años; \$804.62/mes; \$289 663.20 en total 20 años; \$899.73/mes; \$215 935.20 en total
12. \$103,624.62 13. 9.73% 16. b) $u_n \to -\infty$ as $n \to \infty$
19. a) 4.7263 b) 1.223% c) 3.5643 e) 3.5699

CAPÍTULO 3 Sección 3.1, página 135

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$ 2. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$ 3. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/3}$
4. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^x$ 5. $y = c_1 + c_2e^{-5x}$ 6. $y = c_1e^{3x/2} + c_2e^{-3x/2}$
7. $y = c_1 \exp[(9 + 3\sqrt{5})x/2] + c_2 \exp[(9 - 3\sqrt{5})x/2]$
8. $y = c_1 \exp(1 + \sqrt{3})x + c_2 \exp(1 - \sqrt{3})x$ 9. $y = e^x$; $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
10. $y = \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$; $y \to 0$ cuando $x \to \infty$ 11. $y = 12e^{x/3} - 8e^{x/2}$; $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$
12. $y = -1 - e^{-3x}$; $y \to -1$ cuando $x \to \infty$

13. $y = \frac{1}{10}e^{-9(x-1)} + \frac{9}{10}e^{x-1}$; $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
14. $y = -\frac{1}{2}e^{(x+2)/2} + \frac{3}{2}e^{-(x+2)/2}$; $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$
15. $\alpha = -2$ 16. $\beta = -1$
17. $y = c_1x^{-1} + c_2 + \ln x$ 18. $y = c_1 \ln x + c_2 + x$
19. $y = (1/k)\ln|(k-x)/(k+x)| + c_2$ si $c_1 = k^2 > 0$; $y = (2/k)\arctan(x/k) + c_2$ si $c_1 = -k^2 < 0$; $y \doteq -2x^{-1} + c_2$ si $c_1 = 0$; también
20. $y = \pm\frac{2}{3}(x - 2c_1)\sqrt{x + c_1} + c_2$; también $y = c$ *Sugerencia*: $\mu(v) = v^{-3}$ es un factor integrante.
21. $y = c_1e^{-x} + c_2 - xe^{-x}$
22. $c_1^2y = c_1x - \ln|1 + c_1x| + c_2$ si $c_1 \neq 0$; $y = \frac{1}{2}x^2 + c_2$ si $c_1 = 0$; también $y = c$
23. $y^2 = c_1x + c_2$ 24. $y = c_1\,\text{sen}(x + c_2) = k_1 \,\text{sen}\, x + k_2 \cos x$
25. $\frac{1}{3}y^3 - 2c_1y + c_2 = 2x$; también $y = c$ 26. $x + c_2 = \pm\frac{2}{3}(y - 2c_1)(y + c_1)^{1/2}$
27. $y\ln|y| - y + c_1y + x = c_2$; también $y = c$ 28. $e^y = (x + c_2)^2 + c_1$
29. $y = \frac{4}{3}(x + 1)^{3/2} - \frac{1}{3}$ 30. $y = 2(1 - x)^{-2}$
31. $y = 3\ln x - \frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) - 5\arctan x + 2 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{5}{4}\pi$
32. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ 33. $y'' - y = 0$ 34. $y'' + y = 0$
35. $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0$
36. $y'' - 2y' + y = 0$ 37. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ 38. $y'' - y = 0$

Sección 3.2, página 144

1. $-\frac{7}{2}e^{x/2}$ 2. 1 3. e^{-4x} 4. x^2e^x
5. $-e^{2x}$ 6. 0 7. $0 < x < \infty$ 8. $-\infty < x < 1$
9. $0 < x < 4$ 10. $0 < x < \infty$ 11. $0 < x < 3$ 12. $2 < x < 3\pi/2$

14. La ecuación es no lineal 15. La ecuación es no homogénea
16. No 17. $3xe^{2x} + ce^{2x}$ 18. $xe^x + cx$ 19. $5W(f, g)$
20. $-4(x\cos x - \text{sen}\, x)$
21. $y_1(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^x$, $y_2(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$
22. $y_1(x) = -\frac{1}{2}e^{-3(x-1)} + \frac{3}{2}e^{-(x-1)}$, $y_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-3(x-1)} + \frac{1}{2}e^{-(x-1)}$

23. Sí 24. Sí 25. Sí 26. Sí

28. Sí, $y = c_1e^{-x^2/2}\int_{x_0}^{x} e^{t^2/2}\,dt + c_2e^{-x^2/2}$ 29. No

30. Sí, $y = \dfrac{1}{\mu(x)}\left[c_1\int_{x_0}^{x}\dfrac{\mu(t)}{t}\,dt + c_2\right]$, $\mu(x) = \exp\left[-\int\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{x}\right)dx\right]$

31. Sí, $y = c_1x^{-1} + c_2x$ 33. $x^2\mu'' + 3x\mu' + (1 + x^2 - \nu^2)\mu = 0$
34. $(1 - x^2)\mu'' - 2x\mu' + \alpha(\alpha + 1)\mu = 0$ 35. $\mu'' - x\mu = 0$

37. Las ecuaciones de Legendre y de Airy son autoadjuntas.

Sección 3.3, página 154

1. Independiente 2. Dependiente 3. Independiente
4. Dependiente 5. Dependiente 6. Independiente
7. Independiente; W no siempre es cero 8. Independiente; W no siempre es cero
9. $W(c_1y_1, c_2y_2) = c_1c_2W(y_1, y_2) \neq 0$ 10. $W(y_3, y_4) = -2W(y_1, y_2)$
11. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 13. cx^2e^x 14. $c|\cos x|$

16. 2/25 17. $3\sqrt{e} \cong 4.946$

21. Si x_0 es un punto de inflexión, y $y = \phi(x)$ es una solución; entonces, a partir de la ecuación diferencial $p(x_0)\phi'(x_0) + q(x_0)\phi(x_0) = 0$.

Sección 3.4, página 160

1. $e \cos 2 + ie \operatorname{sen} 2 \cong -1.1312 + 2.4717i$
2. $e^2 \cos 3 - ie^2 \operatorname{sen} 3 \cong -7.3151 - 1.0427i$ 3. -1
4. $e^2 \cos(\pi/2) - ie^2 \operatorname{sen}(\pi/2) = -e^2 i \cong -7.3891i$
5. $2\cos(\ln 2) - 2i\operatorname{sen}(\ln 2) \cong 1.5385 - 1.2779i$
6. $\pi^{-1}\cos(2 \ln \pi) + i\pi^{-1}\operatorname{sen}(2 \ln \pi) \cong -0.20957 + 0.23959i$
7. $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$
8. $y = c_1 e^x \cos \sqrt{5}x + c_2 e^x \operatorname{sen} \sqrt{5}x$
9. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$
10. $y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$
11. $y = c_1 e^{-3x} \cos 2x + c_2 e^{-3x} \operatorname{sen} 2x$
12. $y = c_1 \cos(3x/2) + c_2 \operatorname{sen}(3x/2)$
13. $y = c_1 e^{-x} \cos(x/2) + c_2 e^{-x} \operatorname{sen}(x/2)$
14. $y = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{-4x/3}$
15. $y = c_1 e^{-x/2} \cos x + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} x$
16. $y = c_1 e^{-2x} \cos(3x/2) + c_2 e^{-2x} \operatorname{sen}(3x/2)$
17. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$; oscilación estable
18. $y = e^{-2x} \cos x + 2e^{-2x} \operatorname{sen} x$; oscilación decreciente
19. $y = -e^{x-\pi/2} \operatorname{sen} 2x$; oscilación creciente
20. $y = (1 + 2\sqrt{3})\cos x - (2 - \sqrt{3})\operatorname{sen} x$; oscilación estable
21. $y = 3e^{-x/2} \cos x + \frac{5}{2}e^{-x/2} \operatorname{sen} x$; oscilación decreciente
22. $y = \sqrt{2}e^{-(x-\pi/4)} \cos x + \sqrt{2}e^{-(x-\pi/4)} \operatorname{sen} x$; oscilación decreciente
29. Sí; $y = c_1 \cos z + c_2 \operatorname{sen} z$, $z = \int e^{-x^2/2}\, dx$ 30. No
31. Sí, $y = c_1 e^{-x^2/4} \cos(\sqrt{3}x^2/4) + c_2 e^{-x^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{3}x^2/4)$
33. $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)$
34. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$
35. $y = c_1 x^{-1} \cos(\frac{1}{2} \ln x) + c_2 x^{-1} \operatorname{sen}(\frac{1}{2} \ln x)$
36. $y = c_1 x^6 + c_2 x^{-1}$

Sección 3.5, página 168

1. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$
2. $y = c_1 e^{-x/3} + c_2 x e^{-x/3}$
3. $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x/2}$
4. $y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$
5. $y = c_1 e^x \cos 3x + c_2 e^x \operatorname{sen} 3x$
6. $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$
7. $y = c_1 e^{-x/4} + c_2 e^{-4x}$
8. $y = c_1 e^{-3x/4} + c_2 x e^{-3x/4}$
9. $y = c_1 e^{2x/5} + c_2 x e^{2x/5}$
10. $y = c_1 e^{-x/2} \cos(x/2) + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen}(x/2)$
11. $y = 2e^{2x/3} - \frac{7}{3}xe^{2x/3}$
12. $y = 2xe^{3x}$
13. $y = -e^{-x/3} \cos 3x + \frac{5}{9}e^{-x/3} \operatorname{sen} 3x$
14. $y = 7e^{-2(x+1)} + 5xe^{-2(x+1)}$
18. $y_2(x) = x^{-1}$
19. $y_2(x) = x^{-2}$
20. $y_2(x) = x^{-1} \ln x$
21. $y_2(x) = xe^x$
22. $y_2(x) = \cos x^2$
23. $y_2(x) = x$
24. $y_2(x) = x^{1/4} e^{-2\sqrt{x}}$
25. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$
27. $y = c_1 e^{-\delta x^2/2} \int_0^x e^{\delta s^2/2}\, ds + c_2 e^{-\delta x^2/2}$
28. $y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x y_1^{-2}(t) \exp\left[-\int_{t_0}^t p(s)\, ds \right] dt$
29. $y_2(x) = x^{-1} \ln x$
30. $y_2(x) = \cos x^2$
31. $y_2(x) = x$
32. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$
34. b) $y_0 + (a/b)y_0'$
36. $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$
37. $y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1/2} \ln x$

Sección 3.6, página 177

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - e^{2x}$ 2. $y = c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{17}\operatorname{sen} 2x - \frac{12}{17}\cos 2x$
3. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + \frac{3}{16}xe^{-x} + \frac{3}{8}x^2e^{-x}$
4. $y = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$
5. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{162}(9x^2 - 6x + 1)e^{3x} + \frac{2}{3}$
6. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x^2e^{-x}$
7. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x/2} + x^2 - 6x + 14 - \frac{3}{10}\operatorname{sen} x - \frac{9}{10}\cos x$
8. $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}x\cos 2x - \frac{5}{9}\operatorname{sen} 2x$
9. $u = c_1\cos\omega_0 x + c_2\operatorname{sen}\omega_0 x + (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}\cos\omega x$
10. $u = c_1\cos\omega_0 x + c_2\operatorname{sen}\omega_0 x + (1/2\omega_0)x\operatorname{sen}\omega_0 x$
11. $y = c_1e^{-x/2}\cos(\sqrt{15}\,x/2) + c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}(\sqrt{15}\,x/2) + \frac{1}{6}e^x - \frac{1}{4}e^{-x}$
12. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{6}xe^{2x} + \frac{1}{8}e^{-2x}$ 13. $y = e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$
14. $y = \frac{7}{10}\operatorname{sen} 2x - \frac{19}{40}\cos 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$
15. $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{1}{6}x^3e^x + 4$ 16. $y = e^{3x} + \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x} - xe^{2x}$
17. $y = 2\cos 2x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$
18. $y = e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{sen} 2x + xe^{-x}\operatorname{sen} 2x$
19. $Y(x) = x(A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4) + x(B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{-3x} + D\operatorname{sen} 3x + E\cos 3x$
20. $Y(x) = A_0x + A_1 + x(B_0x + B_1)\operatorname{sen} x + x(D_0x + D_1)\cos x$
21. $Y(x) = e^x(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + (D_0x + D_1)e^{2x}\operatorname{sen} x + (E_0x + E_1)e^{2x}\cos x$
22. $Y(x) = Ae^{-x} + x(B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{-x}\cos x + x(D_0x^2 + D_1x + D_2)e^{-x}\operatorname{sen} x$
23. $Y(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2 + x^2(B_0x + B_1)e^{2x} + (D_0x + D_1)\operatorname{sen} 2x + (E_0x + E_1)\cos 2x$
24. $Y(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)\operatorname{sen} 2x + x(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos 2x$
25. $Y(x) = (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^x\operatorname{sen} 2x + (B_0x^2 + B_1x + B_2)e^x\cos 2x + e^{-x}(D\cos x + E\operatorname{sen} x) + Fe^x$
26. $Y(x) = x(A_0x + A_1)e^{-x}\cos 2x + x(B_0x + B_1)e^{-x}\operatorname{sen} 2x + (D_0x + D_1)e^{-2x}\cos x + (E_0x + E_1)e^{-2x}\operatorname{sen} x$
27. $y = c_1\cos\lambda x + c_2\operatorname{sen}\lambda x + \sum_{m=1}^{N}[a_m/(\lambda^2 - m^2\pi^2)]\operatorname{sen} m\pi x$
28. $y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ -(1 + \pi/2)\operatorname{sen} t - (\pi/2)\cos t + (\pi/2)e^{\pi - t}, & t > \pi \end{cases}$
29. $y = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{10}e^{-t}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t, & 0 \le t \le \pi/2 \\ -\frac{1}{5}(1 + e^{\pi/2})e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{10}(1 + e^{\pi/2})e^{-t}\operatorname{sen} 2t, & t > \pi/2 \end{cases}$
30. No 33. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x}$

Sección 3.7, página 189

1. $Y(x) = e^x$ 2. $Y(x) = -\frac{2}{3}xe^{-x}$ 3. $Y(x) = \frac{3}{2}x^2e^{-x}$ 4. $Y(x) = 2x^2e^{x/2}$
5. $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - (\cos x)\ln(\tan x + \sec x)$
6. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + (\operatorname{sen} 3x)\ln(\tan 3x + \sec 3x) - 1$
7. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x}\ln x$
8. $y = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4}(\operatorname{sen} 2x)\ln\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2}x\cos 2x$
9. $y = c_1\cos(x/2) + c_2\operatorname{sen}(x/2) + x\operatorname{sen}(x/2) + 2[\ln\cos(x/2)]\cos(x/2)$
10. $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}e^x\ln(1 + x^2) + xe^x\arctan x$
11. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \int[e^{3(x-t)} - e^{2(x-t)}]g(t)\,dt$
12. $y = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen} 2(x - t)]g(t)\,dt$
13. $Y(x) = \frac{1}{2} + x^2\ln x$ 14. $Y(x) = -2x^2$ 15. $Y(x) = \frac{1}{2}(x - 1)e^{2x}$
16. $Y(x) = -\frac{1}{2}(2x - 1)e^{-x}$ 17. $Y(x) = \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$ 18. $Y(x) = -\frac{2}{3}x^{1/2}\cos x$

19. $Y(x) = \int \frac{xe^t - te^x}{(1-t)^2 e^t}\, g(t)\, dt$ 20. $Y(x) = x^{-1/2} \int t^{-3/2} \operatorname{sen}(x-t) g(t)\, dt$

23. b) $y = y_0 \cos x + y_0' \operatorname{sen} x + \int_{x_0}^{x} \operatorname{sen}(x-t) g(t)\, dt$

24. $y = (b-a)^{-1} \int_{x_0}^{x} [e^{b(x-t)} - e^{a(x-t)}] g(t)\, dt$

25. $y = \mu^{-1} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-t)} \operatorname{sen} \mu(x-t) g(t)\, dt$ 26. $y = \int_{x_0}^{x} (x-t) e^{a(x-t)} g(t)\, dt$

29. $y = c_1 x + c_2 x^2 + 4x^2 \ln x$ 30. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-5} + \frac{1}{12} x$

31. $y = c_1(1+x) + c_2 e^x + \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}$ 32. $y = c_1 e^x + c_2 x - \frac{1}{2}(2x-1)e^{-x}$

Sección 3.8, página 197

1. $u = 5\cos(2t - \delta)$, $\delta = \arctan(4/3) \cong 0.9273$ 2. $u = 2\cos(t - 2\pi/3)$
3. $u = 2\sqrt{5}\cos(3t - \delta)$, $\delta = -\arctan(1/2) \cong -0.4636$
4. $u = \sqrt{13}\cos(\pi t - \delta)$, $\delta = \pi + \arctan(3/2) \cong 4.1244$
5. $u = \frac{1}{4}\cos 8t$ pie, t en s, $\omega = 8$ rad/s, $T = \pi/4$s, $R = 1/4$ pie
6. $u = \frac{5}{7}\operatorname{sen} 14t$ cm, t en s; $t = \pi/14$s
7. $u = (1/4\sqrt{2})\operatorname{sen} 8\sqrt{2}t - \frac{1}{12}\cos 8\sqrt{2}t$ pie, t en s; $\omega = 8\sqrt{2}$ rad/s, $T = \pi/4\sqrt{2}$s
   $R = \sqrt{11/288}$ pie, $\delta = \pi - \arctan(3/\sqrt{2}) \cong 2.0113$
8. $Q = 10^{-6}\cos 2000t$ coulomb, t en s
9. $u = e^{-10t}(2\cos 4\sqrt{6}t + (5/\sqrt{6})\operatorname{sen} 4\sqrt{6}t)$ cm, t en s; $\mu = 4\sqrt{6}$ rad/s
   $T_d = \pi/2\sqrt{6}$s, $T_d/T = 7/2\sqrt{6} \cong 1.4289$
10. $u = (1/8\sqrt{31})e^{-2t}\operatorname{sen} 2\sqrt{31}t$ pie, t en s; $t = \pi/2\sqrt{31}$s
11. $u \cong 0.057198e^{-0.15t}\cos(3.87008t - 0.50709)$m, t en s; $\mu = 3.87008$ rad/s
    $\mu/\omega_0 = 3.87008/\sqrt{15} \cong 0.99925$
12. $Q = 10^{-6}(2e^{-500t} - e^{-1000t})$coulomb; t en s
13. $u = (7/\sqrt{6})e^{-10t}\cos(4\sqrt{6}t - \delta)$cm, t en s; $\delta = \arctan(5/2\sqrt{6}) \cong 0.7956$, $\tau \geq 0.3912$ s
14. $u = (1/8\sqrt{31})e^{-2t}\cos(2\sqrt{31}t - \pi/2)$ pie; t en s; $\tau \geq (\ln 100)/2 \cong 2.3026$ s
15. $\gamma = \sqrt{20/9} \cong 1.4907$
18. $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, $r\cos\theta = B$, $r\operatorname{sen}\theta = -A$; $R = r$; $\delta = \theta + (4n+1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
19. $\gamma = 8$ lb s/pie 20 $R = 10^3$ ohm 22. $u_0' < -\gamma u_0/2m$
24. $2\pi/\sqrt{31}$ 25. $\gamma = 5$ lb s/pie 26. $\gamma\tau = c$, en donde c es una constante
28. $\rho l u'' + \rho_0 g u = 0$, $T = 2\pi\sqrt{\rho l/\rho_0 g}$

Sección 3.9, página 210

1. $-2\operatorname{sen} 8t \operatorname{sen} t$ 2. $2\operatorname{sen}(t/2)\cos(13t/2)$ 3. $2\cos(3\pi t/2)\cos(\pi t/2)$
4. $2\operatorname{sen}(7t/2)\cos(t/2)$ 5. $u'' + 256u = 16\cos 3t$, $u(0) = \frac{1}{6}$, $u'(0) = 0$, u en pie, t en s
6. $u'' + 10u' + 98u = 2\operatorname{sen}(t/2)$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0.08$, u en m, t en s
7. a) $u = \frac{151}{1482}\cos 16t + \frac{16}{247}\cos 3t$ b) $\omega = 16$ rad/s
8. a) $u = (160/153281)[-\cos(t/2) + \frac{391}{20}\operatorname{sen}(t/2)]$ b) $\omega = 4\sqrt{3}$ rad/s
9. $u = \frac{64}{45}(\cos 7t - \cos 8t) = \frac{128}{45}\operatorname{sen}(t/2)\operatorname{sen}(15t/2)$ pie, t en s

10. $u = (\cos 8t + \operatorname{sen} 8t - 8t\cos 8t)/4$ pie, t en s; $1/8$, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$s
11. a) $\frac{8}{901}(30\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$ pie, t en s b) $m = 4$ slugs
12. $u = (\sqrt{2}/6)\cos(3t - 3\pi/4)$m, t en s

13. Sea $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a) $u = \left[u_0 - \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]\cos\omega_0 t + \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$

b) $u = \dfrac{u_0'}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t + \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$

c) $u = \left[u_0 - \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]\cos\omega_0 t + \dfrac{u_0'}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t + \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$

14. a) $u = e^{-\gamma t/2m}(c_1\cos\mu t + c_2\operatorname{sen}\mu t) + (F_0/\Delta^2)[m(\omega_0^2 - \omega^2)\operatorname{sen}\omega t - \gamma\omega\cos\omega t]$,
$\mu = (4km - \gamma^2)^{1/2}/2m$, $\omega_0^2 = k/m$, $\Delta^2 = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$

b) $c_1 = u_0 + \dfrac{\gamma\omega F_0}{\Delta^2}$, $c_2 = \dfrac{\gamma u_0}{2m\mu} + \dfrac{F_0\omega}{\mu\Delta^2}\left[\dfrac{\gamma^2}{2m} - m(\omega_0^2 - \omega^2)\right]$

c) $c_1 = \dfrac{\gamma\omega F_0}{\Delta^2}$, $c_2 = \dfrac{u_0'}{\mu} + \dfrac{F_0\omega}{\mu\Delta^2}\left[\dfrac{\gamma^2}{2m} - m(\omega_0^2 - \omega^2)\right]$

d) $c_1 = u_0 + \dfrac{\gamma\omega F_0}{\Delta^2}$, $c_2 = \dfrac{u_0'}{\mu} + \dfrac{\gamma u_0}{2m\mu} + \dfrac{F_0\omega}{\mu\Delta^2}\left[\dfrac{\gamma^2}{2m} - m(\omega_0^2 - \omega^2)\right]$

17. $u = \begin{cases} (F_0/m)(t - \operatorname{sen} t), & 0 \le t \le \pi \\ (F_0/m)[(2\pi - t) - 3\operatorname{sen} t], & \pi < t \le 2\pi \\ -4(F_0/m)\operatorname{sen} t, & 2\pi < t < \infty \end{cases}$

18. $Q(t) = 10^{-6}(e^{-4000t} - 4e^{-1000t} + 3)$ coulomb, t en s, $Q(0.001) \cong 1.52 \times 10^{-6}$;
$Q(0.01) \cong 3 \times 10^{-6}$; $Q(t) \to 3 \times 10^{-6}$ cuando $t \to \infty$

CAPÍTULO 4 Sección 4.1, página 219

1. $-\infty < x < \infty$ 2. $x > 0$ o $x < 0$
3. $x > 1$, o $0 < x < 1$, o $x < 0$ 4. $x > 0$
5. $\ldots, -3\pi/2 < x < -\pi/2, \quad -\pi/2 < x < 1, \quad 1 < x < \pi/2, \quad \pi/2 < x < 3\pi/2, \ldots$
6. $-\infty < x < -2, \quad -2 < x < 2, \quad 2 < x < \infty$
7. $y''' = -\cos x$ 8. $y''' + y' = 0$ 9. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
10. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ 11. $y''' + y' = 1$ 12. $y^{iv} - y'' = 0$
13. 1 14. 1 15. $-6e^{-2x}$ 16. e^{-2x}
17. $6x$ 18. $6/x$ 19. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{10}(5) - \frac{1}{2}\cos 2x$
21. a) $a_0[n(n-1)(n-2)\cdots 1] + a_1[n(n-1)\cdots 2]\,x + \cdots + a_n x^n$
b) $(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n)\,e^{rx}$
c) $e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}$; sí, $W(e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}) \neq 0$, $-\infty < x < \infty$
25. $y = c_1e^x + c_2x + c_3xe^x$ 26. $y = c_1x^2 + c_2x^3 + c_3(x+1)$

Sección 4.2, página 225

1. $\sqrt{2}e^{i[(\pi/4) + 2m\pi]}$ 2. $2\,e^{i[(2\pi/3) + 2m\pi]}$ 3. $3\,e^{i(\pi + 2m\pi)}$
4. $e^{i[(3\pi/2) + 2m\pi]}$ 5. $2e^{i[(11\pi/6) + 2m\pi]}$ 6. $\sqrt{2}e^{i[(5\pi/4) + 2m\pi]}$
7. $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ 8. $2^{1/4}e^{-\pi i/8}, 2^{1/4}e^{7\pi i/8}$
9. $1, i, -1, -i$ 10. $(\sqrt{3} + i)/\sqrt{2}, -(\sqrt{3} + i)/\sqrt{2}$

11. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}$
12. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$
13. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-x}$
14. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x}$
15. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + e^{\sqrt{3}x/2}(c_3 \cos \frac{1}{2}x + c_4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x) + e^{-\sqrt{3}x/2}(c_5 \cos \frac{1}{2}x + c_6 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x)$
16. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$
17. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4e^{-x} + c_5xe^{-x} + c_6x^2e^{-x}$
18. $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \operatorname{sen} x$
19. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$
20. $y = c_1 + c_2e^{2x} + e^{-x}(c_3 \cos \sqrt{3}x + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}x)$
21. $y = e^x[(c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4x) \operatorname{sen} x] + e^{-x}[(c_5 + c_6x) \cos x + (c_7 + c_8x) \operatorname{sen} x]$
22. $y = (c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4x) \operatorname{sen} x$
23. $y = 2 - 2 \cos x + \operatorname{sen} x$
24. $y = \cos x$
25. $y = 2x - 3$
26. $y = e^{(x-\pi/2)} + \operatorname{sen} x$
27. $y = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) + \frac{1}{2}(\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x)$
28. b) $u_1 = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos \sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{6}t$

29. Estable
30. No estable
31. No estable
32. No estable
33. No estable
34. Estable

Sección 4.3, página 232

1. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} + 3$
2. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x - 3x - \frac{1}{4}x \operatorname{sen} x$
3. $y = c_1e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}xe^{-x} + 4(x - 1)$
4. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + \cos x$
5. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x} - \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{16}x^2$
6. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x + 3 + \frac{1}{9} \cos 2x$
7. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + e^{x/2}\left(c_5 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \dfrac{x^4}{24}$
8. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + \frac{1}{20} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{40} \cos 2x$
9. $y = \frac{3}{16}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{8}x^2$
10. $y = (x - 4) \cos x - (\frac{3}{2}x + 4) \operatorname{sen} x + 3x + 4$
11. $y = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + 3x) - xe^x$
12. $Y(x) = x(A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3) + Bx^2e^x$
13. $Y(x) = x(A_0x + A_1)e^{-x} + B \cos x + C \operatorname{sen} x$
14. $Y(x) = Ax^2e^x + B \cos x + C \operatorname{sen} x$
15. $Y(x) = Ax^2 + (B_0x + B_1)e^x + x(C \cos 2x + D \operatorname{sen} 2x)$
16. $Y(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2) + (B_0x + B_1) \cos x + (C_0x + C_1) \operatorname{sen} x$
17. $Y(x) = Ae^x + (B_0x + B_1)e^{-x} + xe^{-x}(C \cos x + D \operatorname{sen} x)$
18. $t_0 = a_0, \quad t_n = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$

Sección 4.4, página 236

1. $Y(x) = -\ln \cos x - (\operatorname{sen} x) \ln(\sec x + \tan x)$
2. $Y(x) = -x^2/2$
3. $Y(x) = e^{4x}/30$
4. $Y(x) = x^4/15$
5. $Y(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [e^{x-t} - \operatorname{sen}(x - t) - \cos(x - t)]g(t)\,dt$
6. $Y(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [\operatorname{senh}(x - t) - \operatorname{sen}(x - t)]g(t)\,dt$
7. $Y(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} e^{(x-t)}(x - t)^2g(t)\,dt; \quad Y(x) = -xe^x \ln|x|$

8. $Y(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{t^2} - 2\frac{x^2}{t^3} + \frac{x^3}{t^4}\right)g(t)\,dt$

CAPÍTULO 5 Sección 5.1, página 241

1. $\rho = 1$
2. $\rho = 2$
3. $\rho = \infty$
4. $\rho = \frac{1}{2}$
5. $\rho = \frac{1}{2}$
6. $\rho = 1$
7. $\rho = 3$
8. $\rho = e$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\rho = \infty$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\rho = \infty$
11. $1 + (x-1)$, $\rho = \infty$
12. $1 - 2(x+1) + (x+1)^2$, $\rho = \infty$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$, $\rho = 1$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $\rho = 1$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\rho = 1$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-2)^n$, $\rho = 1$
17. $y' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots + (n+1)^2x^n + \cdots$
    $y'' = 2^2 + 3^2 \cdot 2x + 4^2 \cdot 3x^2 + 5^2 \cdot 4x^3 + \cdots + (n+2)^2(n+1)x^n + \cdots$
18. $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$
    $= \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$
    $y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$
    $= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$
24. $a_n = (-2)^n a_0/n!$, $n = 1, 2, \ldots$; a_0e^{-2x}

Sección 5.2, página 248

1. $a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$
   $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x$
   $y_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{senh} x$
2. $a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}$
   $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$
   $y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
3. $(n+2)a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$
   $y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$
   $y_2(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$

4. $a_{n+4} = -\dfrac{k^2 a_n}{(n+4)(n+3)}; \qquad a_2 = a_3 = 0$

$$y_1(x) = 1 - \frac{k^2x^4}{3\cdot 4} + \frac{k^4x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{k^6x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdots(4m+3)(4m+4)}$$

$$y_2(x) = x - \frac{k^2x^5}{4\cdot 5} + \frac{k^4x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{k^6x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots$$

$$= x\left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots(4m+4)(4m+5)}\right]$$

Sugerencia: Haga $n = 4m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

5. $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + a_n = 0, \quad n \geq 1; \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_0$
$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots$

6. $a_{n+2} = -\dfrac{(n^2 - 2n + 4)a_n}{2(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 2; \quad a_2 = -a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{4}a_1$

$y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \cdots, \qquad y_2(x) = x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 - \frac{19}{1920}x^7 + \cdots$

7. $a_{n+2} = -a_n/(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1\cdot 3} - \frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

8. $a_{n+2} = -[(n+1)^2 a_{n+1} + a_n + a_{n-1}]/(n+1)(n+2), \quad n = 1, 2, \ldots$
$a_2 = -(a_0 + a_1)/2$
$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \cdots$
$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$

9. $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-2)(n-3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$y_1(x) = 1 - 3x^2, \quad y_2(x) = x - x^3/3$

10. $4(n+2)a_{n+2} - (n-2)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad y_2(x) = x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240} - \frac{x^7}{2240} - \cdots - \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

11. $3(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{5}{432}x^6 + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n} + \cdots$$

$$y_2(x) = x + \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{135}x^5 + \frac{16}{945}x^7 + \cdots + \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3^n\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots$$

12. $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + (n-1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad y_2(x) = x$$

13. $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{32}x^4 - \frac{7}{384}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^7}{210} + \cdots + (-1)^n \frac{4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{2^n(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots$$

14. $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{8}(x-2)^3 + \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$
$y_2(x) = (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + \frac{9}{64}(x-2)^4 + \cdots$

15. $y = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

16. $y = -1 + 3x + x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \cdots$

17. $y = 4 - x - 4x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots$

18. $y = -3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \cdots$

19. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{18}(x-1)^6 + \cdots$
$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + \frac{1}{28}(x-1)^7 + \cdots$

21. a) $y_1(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-4)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8)}{6!}x^6 + \cdots$

$$y_2(x) = x - \frac{\lambda-2}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5!}x^5 - \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)}{7!}x^7 + \cdots$$

b) $1,\ x,\ 1 - 2x^2,\ x - \frac{2}{3}x^3,\ 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4,\ x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$
c) $1,\ 2x,\ 4x^2 - 2,\ 8x^3 - 12x,\ 16x^4 - 48x^2 + 12,\ 32x^5 - 160x^3 + 120x$

22. b) $y = x - x^3/6 + \cdots$

Sección 5.3, página 259

1. $\phi''(0) = -1, \quad \phi'''(0) = 0, \quad \phi^{iv}(0) = 3$
2. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -2, \quad \phi^{iv}(0) = 0$
3. $\phi''(1) = 0, \quad \phi'''(1) = -6, \quad \phi^{iv}(1) = 42$
4. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -a_0, \quad \phi^{iv}(0) = -4a_1$
5. $\rho = \infty, \ \rho = \infty$
6. $\rho = 1, \ \rho = 3, \ \rho = 1$
7. $\rho = 1, \ \rho = \sqrt{3}$
8. $\rho = 1$
9. a) $\rho = \infty$ b) $\rho = \infty$ c) $\rho = \infty$ d) $\rho = \infty$ e) $\rho = 1$
f) $\rho = \sqrt{2}$ g) $\rho = \infty$ h) $\rho = 1$ i) $\rho = 1$ j) $\rho = 2$
k) $\rho = \sqrt{3}$ l) $\rho = 1$ m) $\rho = \infty$ n) $\rho = \infty$

10. a) $y_1(x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}x^2 - \frac{(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{4!}x^4 - \frac{(4^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{6!}x^6 - \cdots$
$$- \frac{[(2m-2)^2-\alpha^2]\cdots(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{(2m)!}x^{2m} - \cdots$$

$$y_2(x) = x + \frac{1-\alpha^2}{3!}x^3 + \frac{(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{5!}x^5 + \cdots$$
$$+ \frac{[(2m-1)^2-\alpha^2]\cdots(1-\alpha^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

b) $y_1(x)$ o $y_2(x)$ termina con x^n cuando $\alpha = n$ es par o impar.
c) $n = 0, \ y = 1; \quad n = 1, \ y = x; \quad n = 2, \ y = 1 - 2x^2; \quad n = 3, \ y = x - \frac{4}{3}x^3$

11. $y_1(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6} + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6} + \cdots$

12. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots, \quad \rho = \infty$

13. No es posible especificar condiciones iniciales arbitrarias en $x = 0$; por tanto, $x = 0$ es un punto singular.

14. $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$

15. $y = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2 \cdot 4} + \dfrac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \cdots$

16. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots$

17. $y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1 - x}$

18. $y = a_0\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 2!\left(\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots\right)$
$= a_0 e^x + 2\left(e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}\right) = ce^x - 2 - 2x - x^2$

19. $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2^2 2!} - \dfrac{x^6}{2^3 3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + \cdots\right)$
$+ \left(x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{2 \cdot 4} + \dfrac{x^5}{3 \cdot 5} + \cdots\right)$
$= a_0 e^{-x^2/2} + \left(x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{2 \cdot 4} + \dfrac{x^5}{3 \cdot 5} + \cdots\right)$

21. $1,\ 1 - 3x^2,\ 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4;\quad x,\ x - \frac{5}{3}x^3,\ x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$

22. $1,\ x,\ (3x^2 - 1)/2,\ (5x^3 - 3x)/2,\ (35x^4 - 30x^2 + 3)/8,\ (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$

23. b) P_1, 0; P_2, ± 0.57735; P_3, 0, ± 0.77460; P_4, ± 0.33998, ± 0.86114; P_5, 0, ± 0.53847, ± 0.90618

Sección 5.4, página 266

1. $x = 0$, regular
2. $x = 0$, regular; $x = 1$, irregular
3. $x = 0$, irregular; $x = 1$, regular
4. $x = 0$, irregular; $x = \pm 1$, regular
5. $x = 1$, regular; $x = -1$, irregular
6. $x = 0$, regular
7. $x = -3$, regular
8. $x = 0, -1$, regular; $x = 1$, irregular
9. $x = 1$, regular; $x = -2$, irregular
10. $x = 0, 3$, regular
11. $x = 1, -2$, regular
12. $x = 0$, regular
13. $x = 0$, irregular
14. $x = 0$, regular
15. $x = 0$, regular
16. $x = 0, \pm n\pi$, regular
17. $x = 0, \pm n\pi$, regular
18. $x = 0$, irregular; $x = \pm n\pi$, regular
19. $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2 \cdot 5} + \dfrac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} - \cdots\right)$
22. Punto singular regular
23. Punto singular irregular
24. Punto singular irregular
25. Punto singular irregular

Sección 5.5, página 271

1. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$
2. $y = c_1|x + 1|^{-1/2} + c_2|x + 1|^{-3/2}$
3. $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x|$
4. $y = c_1 x^{-1} \cos(2 \ln|x|) + c_2 x^{-1} \operatorname{sen}(2 \ln|x|)$

5. $y = c_1x + c_2x\ln|x|$ 6. $y = c_1(x-1)^{-3} + c_2(x-1)^{-4}$
7. $y = c_1|x|^{(-5+\sqrt{29})/2} + c_2|x|^{(-5-\sqrt{29})/2}$
8. $y = c_1|x|^{3/2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln|x|) + c_2|x|^{3/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln|x|)$
9. $y = c_1x^3 + c_2x^3\ln|x|$
10. $y = c_1(x-2)^{-2}\cos(2\ln|x-2|) + c_2(x-2)^{-2}\operatorname{sen}(2\ln|x-2|)$
11. $y = c_1|x|^{-1/2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{15}\ln|x|) + c_2|x|^{-1/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{15}\ln|x|)$
12. $y = c_1x + c_2x^4$ 13. $y = 2x^{3/2} - x^{-1}$
14. $y = 2x^{-1/2}\cos(2\ln x) - x^{-1/2}\operatorname{sen}(2\ln x)$
15. $y = 2x^2 - 7x^2\ln|x|$ 16. $y = x^{-1}\cos(2\ln x)$ 17. $\alpha < 1$
18. $\beta > 0$ 19. $\gamma = 2$ 20. $\alpha > 1$
21. a) $\alpha < 1$ y $\beta > 0$ b) $\alpha < 1$ y $\beta \geq 0$, o $\alpha = 1$ y $\beta > 0$ c) $\alpha > 1$ y $\beta > 0$
d) $\alpha > 1$ y $\beta \geq 0$, o $\alpha = 1$ y $\beta > 0$ e) $\alpha = 1$ y $\beta > 0$
24. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$ 25. $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x + \frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{4}$
26. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-5} + \frac{1}{12}x$ 27. $y = c_1x + c_2x^2 + 3x^2\ln x + \ln x + \frac{3}{2}$
28. $y = c_1\cos(2\ln x) + c_2\operatorname{sen}(2\ln x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(\ln x)$
29. $y = c_1x^{-3/2}\cos(\frac{3}{2}\ln x) + c_2x^{-3/2}\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\ln x)$
31. $x > 0$: $c_1 = k_1$, $c_2 = k_2$; $x < 0$: $c_1(-1)^{r_1} = k_1$, $c_2 = k_2$
32. $y = c_1x^{1/2-i(1+\sqrt{3}/2)} + c_2x^{1/2-i(1-\sqrt{3}/2)}$
$= c_1x^{1/2}\{\cos[(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})\ln x] - i\operatorname{sen}[(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})\ln x]\}$
$+ c_2x^{1/2}\{\cos[(1-\frac{1}{2}\sqrt{3})\ln x - i\operatorname{sen}[(1-\frac{1}{2}\sqrt{3})\ln x]\}$
33. $y = c_1x^{2i} + c_2x^{-i}$
$= c_1[\cos(2\ln x) + i\operatorname{sen}(2\ln x)] + c_2[\cos(\ln x) - i\operatorname{sen}(\ln x)]$
34. $y = c_1x^{1+i} + c_2x^{-1-i}$
$= c_1x[\cos(\ln x) + i\operatorname{sen}(\ln x)] + c_2x^{-1}[\cos(\ln x) - i\operatorname{sen}(\ln x)]$

Sección 5.6, página 280

1. $r(2r-1) = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[2(n+r)-1]}$; $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!\,5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)} + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!\,3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} + \cdots$$

2. $r^2 - \frac{1}{9} = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)^2 - \frac{1}{9}}$; $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = -\frac{1}{3}$

$$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\cdots(m+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = x^{-1/3}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(m-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$

Sugerencia: Haga $n = 2m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

3. $r(r-1) = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

$$y_1(x) = x\left[1 - \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n + \cdots\right]$$

4. $r^2 = 0$; $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2}$; $r_1 = r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \cdots + \frac{x^n}{(n!)^2} + \cdots$$

5. $r(3r-1) = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[3(n+r)-1]}$; $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = 0$

$$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!7}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!7\cdot 13}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!7\cdot 13\cdots(6m+1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{1}{1!5}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!5\cdot 11}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!5\cdot 11\cdots(6m-1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots$$

Sugerencia: Haga $n = 2m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

6. $r^2 - 2 = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2 - 2}$; $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$

$$y_1(x) = x^{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1+2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = x^{-\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1-2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})\cdots(n-2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$$

7. $r^2 = 0$; $(n+r)a_n = a_{n-1}$; $r_1 = r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

8. $2r^2 + r - 1$; $(2n+2r-1)(n+r+1)a_n + 2a_{n-2} = 0$; $r_1 = 1/2$, $r_2 = -1$

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{7} + \frac{x^4}{2!7\cdot 11} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!7\cdot 11\cdots(4m+3)} + \cdots\right)$$

$$y_2(x) = x^{-1}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!5} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!5\cdot 9\cdots(4m-3)} + \cdots\right)$$

9. $r^2 - 4r + 3 = 0$; $(n+r-3)(n+r-1)a_n - (n+r-2)a_{n-1} = 0$; $r_1 = 3$, $r_2 = 1$

$$y_1(x) = x^3\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} + \cdots + \frac{2x^n}{n!(n+2)} + \cdots\right)$$

10. $r^2 - r + (1/4) = 0$; $(n + r - \frac{1}{2})^2 a_n + a_{n-2} = 0$; $r_1 = r_2 = 1/2$

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} + \cdots\right)$$

11. $r^2 = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \cdot 1^2}(x-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)[1 \cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]}{(2 \cdot 1^2)(2 \cdot 2^2)}(x-1)^2 + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\alpha(\alpha+1)[1 \cdot 2 - \alpha(\alpha+1)] \cdots [n(n-1) - \alpha(\alpha+1)]}{2^n (n!)^2}(x-1)^n + \cdots$$

12. a) $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$ en ambas $x = \pm 1$

b) $y_1(x) =$

$$|x-1|^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+2\alpha)\cdots(2n-1+2\alpha)(1-2\alpha)\cdots(2n-1-2\alpha)}{2^n(2n+1)!}(x-1)^n\right]$$

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)(-\alpha)(1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}(x-1)^n$$

13. $r^2 = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0; \quad a_n = \dfrac{(n-1-\lambda)a_{n-1}}{n^2}$

$$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{(1!)^2}x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2 + \cdots + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}x^n + \cdots$$

Para $\lambda = n$, los coeficientes de todos los términos después de x^n son cero.

16. b) $[(n-1)^2 - 1]b_n = -b_{n-2}$ y es posible determinar b_2.

Sección 5.7, página 286

1. $x = 0; \quad r(r-1) = 0; \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0$
2. $x = 0; \quad r^2 - 3r + 2 = 0; \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 1$
3. $x = 0; \quad r(r-1) = 0; \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0$
   $x = 1; \quad r(r+5) = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -5$
4. Ninguno
5. $x = 0; \quad r^2 + 2r - 2 = 0; \quad r_1 = -1 + \sqrt{3} \cong 0.732, r_2 = -1 - \sqrt{3} \cong -2.73$
6. $x = 0; \quad r(r - \frac{3}{4}) = 0; \quad r_1 = \frac{3}{4}, \quad r_2 = 0$
   $x = -2; \quad r(r - \frac{5}{4}) = 0; \quad r_1 = \frac{5}{4}, \quad r_2 = 0$
7. $x = 0; \quad r^2 + 1 = 0; \quad r_1 = i, \quad r_2 = -i$
8. $x = -1; \quad r^2 - 7r + 3 = 0; \quad r_1 = (7 + \sqrt{37})/2 \cong 6.54, r_2 = (7 - \sqrt{37})/2 \cong 0.459$
9. $x = 1; \quad r^2 + r = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -1$
10. $x = -2; \quad r^2 - (5/4)r = 0; \quad r_1 = 5/4, \quad r_2 = 0$
11. $x = 2; \quad r^2 - 2r = 0; \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 0$
    $x = -2, \quad r^2 - 2r = 0; \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 0$
12. $x = 0; \quad r^2 - (5/3)r = 0; \quad r_1 = 5/3, \quad r_2 = 0$
    $x = -3; \quad r^2 - (r/3) - 1 = 0; \quad r_1 = (1 + \sqrt{37})/6 \cong 1.18, \quad r_2 = (1 - \sqrt{37})/6 \cong -0.847$

13. $y_1(x) = x - \dfrac{x^3}{4!} + \dfrac{x^5}{6!} + \cdots$

14. $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$
    $y_1(x) = (x-1)^{1/2}[1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{53}{480}(x-1)^2 + \cdots], \quad \rho = 1$

15. c) *Sugerencia*: $(n-1)(n-2) + (1+\alpha+\beta)(n-1) + \alpha\beta = (n-1+\alpha)(n-1+\beta)$
    d) *Sugerencia*: $(n-\gamma)(n-1-\gamma) + (1+\alpha+\beta)(n-\gamma) + \alpha\beta = (n-\gamma+\alpha)(n-\gamma+\beta)$

Sección 5.9, página 295

1. $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)!}$

$$y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$$

2. $y_1(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$, $\quad y_2(x) = y_1(x)\ln x - \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2} x^n$

3. $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2} x^n$, $\quad y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n H_n}{(n!)^2} x^n$

4. $y_1(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^n$

$$y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \frac{1}{x^2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$$

5. $y_1(x) = x^{3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{3}{2})(2+\frac{3}{2})\cdots(m+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$

$$y_2(x) = x^{-3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{3}{2})(2-\frac{3}{2})\cdots(m-\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$$

Sugerencia: Haga $n = 2m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Para $r = -\frac{3}{2}$, $a_1 = 0$ y a_3 es arbitraria.

CAPÍTULO 6 Sección 6.1, página 309

1. Seccionalmente continua
2. Ninguna
3. Continua
4. Seccionalmente continua
5. a) $1/s^2$, $s > 0$ b) $2/s^3$, $s > 0$ c) $n!/s^{n+1}$, $s > 0$
6. $s/(s^2 + a^2)$, $s > 0$
7. $\frac{s}{s^2 - b^2}$, $s > |b|$
8. $\frac{b}{s^2 - b^2}$, $s > |b|$
9. $\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$, $s - a > |b|$
10. $\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$, $s - a > |b|$
11. $\frac{b}{s^2 + b^2}$, $s > 0$
12. $\frac{s}{s^2 + b^2}$, $s > 0$
13. $\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$, $s > a$
14. $\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$, $s > a$
15. $\frac{1}{(s-a)^2}$, $s > a$
16. $\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$, $s > 0$
17. $\frac{s^2 + a^2}{(s-a)^2(s+a)^2}$, $s > |a|$
18. $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
19. $\frac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}$, $s > 0$
20. $\frac{2a(3s^2 + a^2)}{(s^2 - a^2)^3}$, $s > |a|$
21. Converges
22. Converges
23. Diverges
24. Converges
26. c) $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$; $\Gamma(11/2) = 945\sqrt{\pi}/32$

Sección 6.2, página 316

1. $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$
2. $2t^2e^t$
3. $\frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{-4t}$
4. $\frac{9}{5}e^{3t} + \frac{6}{5}e^{-2t}$
5. $2e^{-t}\cos 2t$
6. $2\cosh 2t - \frac{3}{2}\operatorname{senh} 2t$
7. $2e^t\cos t + 3e^t\operatorname{sen} t$
8. $3 - 2\operatorname{sen} 2t + 5\cos 2t$
9. $-2e^{-2t}\cos t + 5e^{-2t}\operatorname{sen} t$
10. $2e^{-t}\cos 3t - \frac{5}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t$
11. $y = \frac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t})$
12. $y = 2e^{-t} - e^{-2t}$
13. $y = e^t\operatorname{sen} t$
14. $y = e^{2t} - te^{2t}$
15. $y = 2e^t\cosh\sqrt{3}t - (2/\sqrt{3})e^t\operatorname{senh}\sqrt{3}t$
16. $y = 2e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$
17. $y = te^t - t^2e^t + \frac{2}{3}t^3e^t$
18. $y = \cosh t$
19. $y = \cos\sqrt{2}t$
20. $y = (\omega^2 - 4)^{-1}[(\omega^2 - 5)\cos\omega t + \cos 2t]$
21. $y = \frac{1}{5}(\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4e^t\cos t - 2e^t\operatorname{sen} t)$
22. $y = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^t\cos t + 7e^t\operatorname{sen} t)$
23. $y = 2e^{-t} + te^{-t} + 2t^2e^{-t}$
24. $Y(s) = \dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$
25. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)} - \dfrac{e^{-s}(s+1)}{s^2(s^2+1)}$
26. $Y(s) = (1 - e^{-s})/s^2(s^2+4)$
29. $1/(s-a)^2$
30. $2b(3s^2 - b^2)/(s^2 + b^2)^3$
31. $n!/s^{n+1}$
32. $n!/(s-a)^{n+1}$
33. $2b(s-a)/[(s-a)^2 + b^2]^2$
34. $[(s-a)^2 - b^2]/[(s-a)^2 + b^2]^2$
36. a) $Y' + s^2Y = s$ b) $s^2Y'' + 2sY' - [s^2 + \alpha(\alpha+1)]Y = -1$

Sección 6.3, página 327

7. $F(s) = 2e^{-2s}/s^3$
8. $F(s) = e^{-s}(s^2+2)/s^3$
9. $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2} - \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2}(1 + \pi s)$
10. $F(s) = \dfrac{1}{s}(e^{-s} + 2e^{-3s} - 6e^{-4s})$
11. $F(s) = s^{-2}[(1-s)e^{-2s} - (1+s)e^{-3s}]$
12. $F(s) = (1 - e^{-s})/s^2$
13. $f(t) = t^3e^{2t}$
14. $f(t) = \frac{1}{3}u_2(t)[e^{t-2} - e^{-2(t-2)}]$
15. $f(t) = 2u_2(t)e^{t-2}\cos(t-2)$
16. $f(t) = u_2(t)\operatorname{senh} 2(t-2)$
17. $f(t) = u_1(t)e^{2(t-1)}\cosh(t-1)$
18. $f(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) - u_4(t)$
20. $f(t) = 2(2t)^n$
21. $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos t$
22. $f(t) = \frac{1}{6}e^{t/3}(e^{2t/3} - 1)$
23. $f(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}u_2(t/2)$
24. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s}),\quad s > 0$
25. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}),\quad s > 0$
26. $F(s) = \dfrac{1}{s}[1 - e^{-s} + \cdots + e^{-2ns} - e^{-(2n+1)s}] = \dfrac{1 - e^{-(2n+2)s}}{s(1+e^{-s})},\quad s > 0$
27. $F(s) = \dfrac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-ns} = \dfrac{1/s}{1+e^{-s}},\quad s > 0$
29. $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1/s}{1+e^{-s}},\quad s > 0$
30. $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s}}{s(1+e^{-s})},\quad s > 0$
31. $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})},\quad s > 0$
32. $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 + e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})},\quad s > 0$
33. a) $\mathscr{L}\{f(t)\} = s^{-1}(1 - e^{-s}),\quad s > 0$ b) $\mathscr{L}\{g(t)\} = s^{-2}(1 - e^{-s}),\quad s > 0$
c) $\mathscr{L}\{h(t)\} = s^{-2}(1 - e^{-s})^2,\quad s > 0$

34. b) $\mathcal{L}\{p(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s}}{s^2(1 + e^{-s})}, \quad s > 0$

Sección 6.4, página 335

1. $y = 1 - \cos t + \operatorname{sen} t - u_{\pi/2}(t)[1 - \operatorname{sen} t]$
2. $y = e^{-t}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}u_{\pi}(t)[1 + e^{-(t-\pi)}\cos t + e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen} t]$
   $- \frac{1}{2}u_{2\pi}(t)[1 - e^{-(t-2\pi)}\cos t - e^{-(t-2\pi)}\operatorname{sen} t]$
3. $y = \frac{1}{6}[1 - u_{2\pi}(t)](2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$
4. $y = \frac{1}{6}(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) - \frac{1}{6}u_{\pi}(t)(2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)$
5. $y = 1 - u_1(t)[1 - e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}]$
6. $y = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}]$
7. $y = \cos t + u_{\pi}(t)(1 + \cos t)$
8. $y = h(t) - u_{\pi/2}(t)h(t - \pi/2), \quad h(t) = \frac{4}{25}(-4 + 5t + 4e^{-t/2}\cos t - 3e^{-t/2}\operatorname{sen} t)$
9. $y = t - u_1(t)[t - 1 - \operatorname{sen}(t-1)]$
10. $y = h(t) + u_{\pi}(t)h(t - \pi), \quad h(t) = \frac{4}{17}[-4\cos t + \operatorname{sen} t + 4e^{-t/2}\cos t + e^{-t/2}\operatorname{sen} t]$
11. $y = \cos 2t + u_{\pi}(t)h(t - \pi) - u_{2\pi}(t)h(t - 2\pi), \quad h(t) = (1 - \cos 2t)/4$
12. $y = u_1(t)h(t - 1) - u_2(t)h(t - 2), \quad h(t) = -1 + (\cos t + \cosh t)/2$
13. $y = h(t) - u_{\pi}(t)h(t - \pi), \quad h(t) = (3 - 4\cos t + \cos 2t)/12$
14. $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_{n\pi}(t)[1 - \cos(t - n\pi)]$

Sección 6.5, página 339

1. $y = e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t - u_{\pi}(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen} t$
2. $y = \frac{1}{2}u_{\pi}(t)\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2}u_{2\pi}(t)\operatorname{sen} 2t$
3. $y = 2te^{-t} + u_{2\pi}(t)[1 - e^{-(t-2\pi)} - (t - 2\pi)e^{-(t-2\pi)}]$
4. $y = \cosh t + 2u_1(t)\operatorname{senh}(t-1)$
5. $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{1}{4}e^{-t}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{4}(\operatorname{sen} t - \cos t) + \frac{1}{2}\sqrt{2}u_{\pi}(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}\sqrt{2}(t - \pi)$
6. $y = \cos \omega t - \omega^{-1}u_{\pi/\omega}(t)\operatorname{sen}\omega t$
7. $y = [1 + u_{\pi}(t)]\operatorname{sen} t$
8. $y = u_{\pi/4}(t)\operatorname{sen} 2(t - \pi/4)$
9. $y = u_{\pi/2}(t)[1 - \cos(t - \pi/2)] + u_{\pi}(t)\operatorname{sen}(t - \pi) - u_{3\pi/2}(t)[1 - \cos(t - 3\pi/2)]$
10. $y = u_{\pi/6}(t)\operatorname{sen} 2(t - \pi/6)$
11. $y = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{3}{5}e^{-t}\operatorname{sen} t + u_{\pi/2}(t)e^{-(t-\pi/2)}\operatorname{sen}(t - \pi/2)$
12. $y = u_1(t)[\operatorname{senh}(t-1) - \operatorname{sen}(t-1)]/2$

Sección 6.6, página 344

3. $\operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$ es negativa cuando $t = 2\pi$, por ejemplo.
4. $F(s) = 2/s^2(s^2 + 4)$
5. $F(s) = 1/(s+1)(s^2+1)$
6. $F(s) = 1/s^2(s-1)$
7. $F(s) = s/(s^2+1)^2$
8. $f(t) = \frac{1}{6}\int_0^t (t - \tau)^3 \operatorname{sen}\tau\, d\tau$
9. $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos 2\tau\, d\tau$
10. $f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t - \tau)e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen} 2\tau\, d\tau$
11. $f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t - \tau)g(\tau)\, d\tau$
12. $y = \dfrac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{1}{\omega}\int_0^t \operatorname{sen}\omega(t - \tau)g(\tau)\, d\tau$
13. $y = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}(t - \tau)\operatorname{sen}\alpha\tau\, d\tau$

14. $y = \frac{1}{8}\int_0^t e^{-(t-\tau)/2}\,\text{sen}\,2(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

15. $y = e^{-t/2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\,\text{sen}\,t + \int_0^t e^{-(t-\tau)/2}\text{sen}(t-\tau)[1-u_\pi(\tau)]\,d\tau$

16. $y = 2e^{-2t} + te^{-2t} + \int_0^t (t-\tau)e^{-2(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau$

17. $y = 2e^{-t} - e^{-2t} + \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\cos\alpha\tau\,d\tau$

18. $y = \frac{1}{2}\int_0^t [\text{senh}(t-\tau) - \text{sen}(t-\tau)]g(\tau)\,d\tau$

19. $y = \frac{4}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{6}\int_0^t [2\text{sen}(t-\tau) - \text{sen}\,2(t-\tau)]g(\tau)\,d\tau$

20. $\Phi(s) = \dfrac{F(s)}{1+K(s)}$

21. c) $\phi(t) = \frac{1}{3}(4\,\text{sen}\,2t - 2\,\text{sen}\,t)$ d) $u(t) = \frac{1}{3}(2\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,2t)$

CAPÍTULO 7 Sección 7.1, página 353

1. $x_1' = x_2,\quad x_2' = -2x_1 - 0.5x_2$
2. $x_1' = x_2,\quad x_2' = -2x_1 - 0.5x_2 + 3\,\text{sen}\,t$
3. $x_1' = x_2,\quad x_2' = -(1 - 0.25t^{-2})x_1 - t^{-1}x_2$
4. $x_1' = x_2,\quad x_2' = x_3,\quad x_3' = x_4,\quad x_4' = x_1$
5. $x_1' = x_2,\quad x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + g(t);\quad x_1(0) = u_0,\quad x_2(0) = u_0'$
6. $y_1' = v_2,\quad y_2' = -(k_1 + k_2)y_1/m_1 + k_2y_3/m_1 + F(t)/m_1,$
   $y_3' = y_4,\ y_4' = k_2y_1/m_2 - (k_2 + k_3)y_3/m_2 + F_2(t)/m_2$
7. a) $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t},\ x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$
   b) $c_1 = 5/2,\ c_2 = -1/2$ en la solución de a).
   c) La gráfica tiende al origen en el primer cuadrante tangente a la recta $x_1 = x_2$.
8. $x_1 = \frac{11}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t},\quad x_2 = \frac{11}{6}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t}.$
   La gráfica es asintótica a la recta $x_1 = 2x_2$ en el primer cuadrante.
9. $x_1 = -\frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t},\quad x_2 = \frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}.$
   La gráfica es asintótica a la recta $x_1 = x_2$ en el tercer cuadrante.
10. $x_1 = -7e^{-t} + 6e^{-2t},\quad x_2 = -7e^{-t} + 9e^{-2t}.$
    La gráfica tiende al origen en el tercer cuadrante tangente a la recta $x_1 = x_2$.
11. $x_1 = 3\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t, x_2 = -3\,\text{sen}\,2t + 4\cos 2t.$
    La gráfica es un círculo con centro en el origen, radio 5, que se recorre en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
12. $x_1 = -2e^{-t/2}\cos 2t + 2e^{-t/2}\,\text{sen}\,2t, x_2 = 2e^{-t/2}\cos 2t + 2e^{-t/2}\,\text{sen}\,2t.$
    La gráfica es una espiral, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que tiende al origen.
13. $LRCI'' + LI' + RI = 0$

Sección 7.2, página 361

1. a) $\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -15 & 6 & -12 \\ 7 & -18 & -1 \\ -26 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 9 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -8 & -9 & 11 \\ 14 & 12 & -5 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 1-i & -7+2i \\ -1+2i & 2+3i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3+4i & 6i \\ 11+6i & 6-5i \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3+5i & 7+5i \\ 2+i & 7+2i \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 8+7i & 4-4i \\ 6-4i & -4 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ c), d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 3-2i & 2-i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3+2i & 1-i \\ 2+i & -2-3i \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3+2i & 2+i \\ 1-i & -2-3i \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 10 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

6. a) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & -3 \\ 11 & 20 & 17 \\ -4 & 3 & -12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & -8 & -11 \\ 9 & 15 & 6 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

8. a) $4i$ b) $12-8i$ c) $2+2i$ d) 16

10. $\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

14. Singular

15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

17. Singular

18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ 5 & \frac{11}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

22. a) $\begin{pmatrix} 7e^{t} & 5e^{-t} & 10e^{2t} \\ -e^{t} & 7e^{-t} & 2e^{2t} \\ 8e^{t} & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2e^{2t}-2+3e^{3t} & 1+4e^{-2t}-e^{t} & 3e^{3t}+2e^{t}-e^{4t} \\ 4e^{2t}-1-3e^{3t} & 2+2e^{-2t}+e^{t} & 6e^{3t}+e^{t}+e^{4t} \\ -2e^{2t}-3+6e^{3t} & -1+6e^{-2t}-2e^{t} & -3e^{3t}+3e^{t}-2e^{4t} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} e^{t} & -2e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^{t} & -e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^{t} & -3e^{-t} & 4e^{2t} \end{pmatrix}$ d) $(e-1)\begin{pmatrix} 1 & 2e^{-1} & \frac{1}{2}(e+1) \\ 2 & e^{-1} & -\frac{1}{2}(e+1) \\ -1 & 3e^{-1} & e+1 \end{pmatrix}$

Sección 7.3, página 371

1. $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{7}{3},\ x_3 = -\frac{1}{3}$
2. No hay solución
3. $x_1 = -c, x_2 = c + 1, x_3 = c$, en donde c es arbitraria
4. $x_1 = c, x_2 = -c\, x_3 = -c$, en donde c es arbitraria
5. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
6. Linealmente independiente
7. $\mathbf{x}^{(1)} - 5\mathbf{x}^{(2)} + 2\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$
8. $2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} + 4\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$
9. Linealmente independiente
10. $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$
12. $3\mathbf{x}^{(1)}(t) - 6\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{x}^{(3)}(t) = \mathbf{0}$
13. Linealmente independiente

15. $\lambda_1 = 2,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = 4,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

16. $\lambda_1 = 1 + 2i,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = 1 - 2i,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$

17. $\lambda_1 = -3,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = -1,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

18. $\lambda_1 = 0,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

19. $\lambda_1 = 2,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = -2,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

20. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

21. $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = 1 + 2i,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix};\quad \lambda_3 = 1 - 2i,\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

22. $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \lambda_3 = 3,\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

23. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

24. $\lambda_1 = -1,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = -1,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \lambda_3 = 8,\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

25. a) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - i & 1 + i \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

Sección 7.4, página 383

2. c) $W(t) = c \exp \int [p_{11}(t) + p_{22}(t)]\, dt$
6. a) $W(t) = t^2$

b) $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son linealmente independientes en cada punto, excepto en $t = 0$; son linealmente independientes sobre todo intervalo.

c) Por lo menos uno de los coeficientes debe ser discontinuo en $t = 0$.

d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. a) $W(t) = t(t-2)e^t$

b) $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son linealmente independientes en cada punto, excepto en $t = 0$ y $t = 2$; son linealmente independientes sobre todo intervalo.

c) Debe haber por lo menos un coeficiente discontinuo en $t = 0$ y $t = 2$.

d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2-2t}{t^2-2t} & \dfrac{t^2-2}{t^2-2t} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Sección 7.5, página 388

1. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

2. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}e^{-2t}$

3. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t}$

4. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t/2} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

7. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-2t}$

8. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{-3t}$

9. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}e^{t}$

10. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{2t}$

11. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}2+i\\-1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-it}$

12. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$

13. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}e^{8t}$

14. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}4\\-5\\-7\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$

15. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}e^{3t}$

16. $\mathbf{x} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{2t} + \frac{7}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t}$

17. $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}e^{3t}$

18. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

19. $\mathbf{x} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} e^{4t}$

21. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

22. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{2} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^{4}$

23. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-2}$

24. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^{2}$

28. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} e^{-3t}\right]$

29. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}\right]$

30. a) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

31. a) $\left(\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL} > 0$

Sección 7.6, página 398

1. $\mathbf{x} = c_1e^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2e^{t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x} = c_1e^{t/2}\begin{pmatrix} 5\cos \frac{3}{2}t \\ 3(\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix} + c_2e^{t/2}\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} \frac{3}{2}t \\ 3(-\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{x} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 3t \\ \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t} + c_2e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_3e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_3e^{-t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - \operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - 3\operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t - 5\operatorname{sen} t \\ -2\cos t - 3\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{x} = c_1t^{-1}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\ln t) \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix} + c_2t^{-1}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 5\cos(\ln t) \\ 2\cos(\ln t) + \operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen}(\ln t) \\ -\cos(\ln t) + 2\operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix}$

13. b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t/2}\begin{pmatrix} \cos t/2 \\ 4\,\mathrm{sen}\, t/2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t/2}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, t/2 \\ -4\cos t/2 \end{pmatrix}$

c) $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{4}$ en la respuesta al inciso b). d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; no

14. b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, t \\ -\mathrm{sen}\, t + \cos t \end{pmatrix}$

c) Úsese $c_1 = 2$ y $c_2 = 3$ en la respuesta al inciso b). d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; no

Sección 7.7, página 405

1. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t\right]$

2. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]$

3. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}\right]$

4. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \end{pmatrix}e^{-t/2}\right]$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

7. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 2 + 4t \end{pmatrix}e^{-3t}$

8. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -33 \end{pmatrix}e^t + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}te^t + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

9. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}t^2e^{2t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}te^{2t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

10. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t\ln t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t\right]$

11. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^{-3} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^{-3}\ln t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}t^{-3}\right]$

12. a) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^t$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}e^t$ d) $\mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

14. b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t/2} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}te^{-t/2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t/2}\right]$

Sección 7.8, página 413

1. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$

2. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-2t} & -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\ 4 - 4e^{-2t} & -2 + 3e^{-2t} \end{pmatrix}$

3. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

4. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \\ -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t - 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ 6. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\operatorname{sen} 2t \\ \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \end{pmatrix}$ 8. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} + 2te^{t} & -4te^{t} \\ te^{t} & e^{t} - 2te^{t} \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ \frac{5}{2}e^{-2t} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ \frac{7}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{2t} \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^{t} + e^{-2t} + e^{3t} \\ -\frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$

14. a) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$

c) $\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + \begin{pmatrix} x_2^0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{\lambda t}$

Sección 7.9, página 420

1. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{t} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}e^{-2t} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}e^{-t}$

3. $\mathbf{x} = \frac{1}{5}(2t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2}\cos 2t + c_1)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$
$+ \frac{1}{5}(-t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{2}\cos 2t + c_2)\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t}$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ln t + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}t^{-1} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}t^{-2}$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-5t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ln t + \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t + \frac{4}{25}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}e^{t}$

8. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{t}$

9. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}e^{t}$

10. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}e^{-4t} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}te^{-t} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{-t}$

11. $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + c_1)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + c_2)\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{x} = [\frac{1}{5}\ln(\operatorname{sen} t) - \ln(-\cos t) - \frac{2}{5}t + c_1]\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$
$+ [\frac{2}{5}\ln(\operatorname{sen} t) - \frac{4}{5}t + c_2]\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

13. a) $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}t & e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t \\ 4e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t & -4e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}t \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{x} = e^{-t/2}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{1}{2}t \\ 4 - 4\cos\frac{1}{2}t \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}t^{-1} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t\ln t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}t^2$

15. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t^2 + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-1} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}t + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}t^4 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

CAPÍTULO 8 Sección 8.1, página 429

1. a) 1.1, 1.22, 1.364, 1.5368 b) 1.105, 1.23205, 1.38578, 1.57179
   c) 1.10775, 1.23873, 1.39793, 1.59144 d) 1.1107, 1.24591, 1.41106, 1.61277
2. a) 1.25, 1.54, 1.878, 2.2736 b) 1.26, 1.5641, 1.92156, 2.34359
   c) 1.26551, 1.57746, 1.94586, 2.38287 d) 1.2714, 1.59182, 1.97212, 2.42554
3. a) 1.1, 1.222, 1.37533, 1.57348 b) 1.10525, 1.23603, 1.40393, 1.62665
   c) 1.10822, 1.24409, 1.42072, 1.65884
4. a) 1.57574, 1.24915, 1.01385, 0.861784 b) 1.5998, 1.29288, 1.07242, 0.930175
   c) 1.61124, 1.31361, 1.10012, 0.962552
5. a) 3.2, 3.40736, 3.62201, 3.84387 b) 3.20186, 3.4111, 3.62765, 3.85144
   c) 3.20279, 3.41299, 3.6305, 3.85525
6. a) 1.1, 1.20958, 1.3281, 1.45523 b) 1.10244, 1.21426, 1.33484, 1.46399
   c) 1.10365, 1.21656, 1.33817, 1.46832
7. a) 2.2, 2.42993, 2.69426, 2.9984 b) 2.2075, 2.44728, 2.72457, 3.04578
   c) 2.21153, 2.45669, 2.74115, 3.07193
8. a) −0.915853, −0.850123, −0.798827, −0.759552
   b) −0.920498, −0.857538, −0.80803, −0.770038
   c) −0.922575, −0.860923, −0.8123, −0.774965
9. a) 7.53999 b) 7.70957
10. a) 1.25225 b) 1.26872
11. a) 5.35218 b) 5.35712
12. a) 2.4683 b) 2.4746
13. a) −0.166134, −0.410872, −0.80466, 4.15867
    b) −0.174652, −0.434238, −0.889140, −3.09810
15. 1.595, 2.4636
18. a) $\phi_3(t) = 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3$; $\phi_2(0.4) = 1.56$, $\phi_3(0.4) = 1.60267$
    b) $\phi_3(t) = 1 + \frac{5}{2}t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4$; $\phi_2(0.4) = 2.29867$, $\phi_3(0.4) = 2.40107$
    c) $\phi_2(t) = 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7$; $\phi_2(0.4) = 1.60832$

Sección 8.2, página 436

1. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{t}_n) - 1]h^2$, $|e_{n+1}| \le \left[1 + 2 \max_{0 \le t \le 1} |\phi(t)|\right]h^2$,
   $e_{n+1} = e^{2\bar{t}_n}h^2$, $|e_1| \le 0.012$, $|e_4| \le 0.022$

2. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{t}_n) - \bar{t}_n]h^2$, $|e_{n+1}| \le \left[1 + 2 \max_{0 \le t \le 1} |\phi(t)|\right]h^2$,
   $e_{n+1} = 2e^{2\bar{t}_n}h^2$, $|e_1| \le 0.024$, $|e_4| \le 0.045$
3. $e_{n+1} = [\bar{t}_n + \bar{t}_n^2\phi(\bar{t}_n) + \phi^3(\bar{t}_n)]h^2$
4. $e_{n+1} = [19 - 15\bar{t}_n\phi^{-1/2}(\bar{t}_n)]h^2/4$
5. $e_{n+1} = \{1 + [\bar{t}_n + \phi(\bar{t}_n)]^{-1/2}\}h^2/4$
6. $e_{n+1} = \{2 - [\phi(\bar{t}_n) + 2\bar{t}_n^2]\exp[-\bar{t}_n\phi(\bar{t}_n)] - \bar{t}_n \exp[-2\bar{t}_n\phi(\bar{t}_n)]\}h^2/2$
7. a) $\phi(t) = 1 + (1/5\pi)\text{sen}\,5\pi t$ b) 1.2, 1.0, 1.2
   c) 1.1, 1.1, 1.0, 1.0 d) $h < 1/\sqrt{50\pi} \cong 0.08$
10. a) $y_1(h = 0.2) = 1.4$, $y_2(h = 0.1) = 1.44$; $\phi(0.2) \cong 1.48$, exacto 1.4918
    b) $y_1(h = 0.2) = 1.2$, $y_2(h = 0.1) = 1.22$; $\phi(0.2) \cong 1.24$, exacto 1.246
    c) $y_1(h = 0.2) = 1.5$, $y_2(h = 0.1) = 1.54$; $\phi(0.2) \cong 1.58$, exacto 1.592
    d) $y_1(h = 0.2) = 1.2$, $y_2(h = 0.1) = 1.222$; $\phi(0.2) \cong 1.244$
12. a) 56.75310 b) 62.027322
13. a) 1.05, 1.11, 1.17, 1.24 b) 1.13, 1.27, 1.42, 1.58 c) 1.05, 1.11, 1.17, 1.24
14. a) 0 b) 60 c) −92.16 15. $0.224 \neq 0.225$

Sección 8.3, página 444

1. a) 1.11, 1.2442, 1.40792, 1.60767 b) 1.11, 1.2442, 1.40792, 1.60767
2. a) 1.27, 1.5884, 1.96585, 2.41533 b) 1.27, 1.5884, 1.96585, 2.41533
3. a) 1.111, 1.25153, 1.43606, 1.68801 b) 1.11, 1.249, 1.43098, 1.67834
4. a) 1.62458, 1.33787, 1.13271, 1.00083 b) 1.62324, 1.33557, 1.12988, 0.99791
5. a) 3.20368, 3.41478, 3.6332, 3.85888 b) 3.20375, 3.41491, 3.6334, 3.85914
6. a) 1.10479, 1.21878, 1.34144, 1.47267 b) 1.105, 1.2191, 1.34176, 1.47287
7. a) 2.21496, 2.46469, 2.75524, 3.0942 b) 2.215, 2.46477, 2.75537, 3.09436
8. a) −0.925062, −0.864998, −0.81746, −0.780936
   b) −0.925207, −0.865145, −0.817529, −0.780879
9. a) 7.80463 b) 7.86623 c) 7.88313 10. a) 1.29269 b) 1.28692 c) 1.28558
11. a) 5.36159 b) 5.36194 c) 5.36203 12. a) 2.48181 b) 2.48114 c) 2.48097
17. $e_{n+1} = (38h^3/3)\exp(4\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \le 691.577h^3$ en $0 \le t \le 1$, $|e_1| \le 0.0188964$
18. $e_{n+1} = (2h^3/3)\exp(2\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \le 4.92604h^3$ en $0 \le t \le 1$, $|e_1| \le 0.000814269$
19. $e_{n+1} = (4h^3/3)\exp(2\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \le 9.85207h^3$ en $0 \le t \le 1$, $|e_1| \le 0.00162854$
21. 1.11, 1.2442, 1.40792, 1.60767 22. 1.27, 1.5884, 1.96585, 2.41534
23. 1.1105, 1.25026, 1.43352, 1.68316 24. 1.62387, 1.33666, 1.13122, 0.999295
27. $y_{n+1} = y_n + hy_n' + (h^2/2)y_n'' + (h^3/6)y_n'''$ 28. $\phi(1) \cong 64.586856$, exacto 64.897803
    $y_n''' = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_tf_y + f_y^2f$
    $e_{n+1} = \phi^{iv}(\bar{t}_n)h^4/24$, $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$

Sección 8.4, página 450

1. a) 1.1107, 1.24591, 1.41105, 1.61276 b) 1.1107, 1.24591, 1.41106, 1.61277
2. a) 1.2714, 1.59182, 1.97211, 2.42552 b) 1.2714, 1.59182, 1.97212, 2.42554
3. a) 1.11146, 1.25302, 1.43967, 1.6961 b) 1.11146, 1.25302, 1.43967, 1.69611
4. a) 1.62231, 1.33362, 1.12686, 0.993839 b) 1.6223, 1.33362, 1.12685, 0.993826
5. a) 3.20373, 3.41488, 3.63335, 3.85908 b) 3.20373, 3.41488, 3.63335, 3.85908
6. a) 1.10484, 1.21884, 1.34147, 1.47262 b) 1.10484, 1.21884, 1.34147, 1.47262
7. a) 2.21579, 2.46667, 2.75882, 3.1 b) 2.21579, 2.46667, 2.75882, 3.1

8. a) −0.924517, −0.864125, −0.816377, −0.779706
   b) −0.924517, −0.864125, −0.816377, −0.779706
9. a) 7.88679 b) 7.88889 c) 7.88904 10. a) 1.28539 b) 1.28516 c) 1.28515
11. a) 5.36206 b) 5.36206 c) 5.36206 12. a) 2.48091 b) 2.48091 c) 2.48091
16. b) $\phi(1) \cong 64.885876$, exacto 64.897803

Sección 8.5, página 454

1. b) $\phi_2(t) - \phi_1(t) = 0.001e^t \to \infty$ cuando $t \to \infty$
2. b) $\phi_1(t) = \ln[e^t/(2 - e^t)]$; $\phi_2(t) = \ln[1/(1 - t)]$
3. a) $y = t$ 4. a) $y = t^2$

Sección 8.6, página 460

1. 1.61276, 1.85913 2. 2.42553, 2.96827 3. 1.69613, 2.06701
4. 0.993852, 0.925764 5. 3.85908, 4.09198 6. 1.47262, 1.61262
7. 3.1, 3.50001 8. −0.779693, −0.753135
9. a) 7.88906 b) 7.88907 10. a) 1.2852 b) 1.28515
11. a) 5.36206 b) 5.36206 12. a) 2.4809 b) 2.4809
13. *Sugerencia*: $\phi'(t) \cong y'_n + (y'_n - y'_{n-1})(t - t_n)/h$
15. a) 1.61276 b) 2.42553 c) 1.69604 d) 0.99336

Sección 8.7, página 467

1. a) 1.26, 0.76; 1.7714, 1.4824; 2.58991, 2.3703; 3.82374, 3.60413; 5.64246, 5.38885
   b) 1.32493, 0.758933; 1.93679, 1.57919; 2.93414, 2.66099; 4.48318, 4.22639; 6.84236, 6.56452
   c) 1.32489, 0.759516; 1.9369, 1.57999; 2.93459, 2.66201; 4.48422, 4.22784; 6.8444, 6.56684
2. a) 1.451, 1.232; 2.16133, 1.65988; 3.29292, 2.55559; 5.16361, 4.7916; 8.54951, 12.0464
   b) 1.51844, 1.28089; 2.37684, 1.87711; 3.85039, 3.44859; 6.6956, 9.50309; 15.0987, 64.074
   c) 1.51855, 1.2809; 2.3773, 1.87729; 3.85247, 3.45126; 6.71282, 9.56846; 15.6384, 70.3792
3. a) 0.582, 1.18; 0.117969, 1.27344; −0.336912, 1.27382; −0.730007, 1.18572; −1.02134, 1.02371
   b) 0.568451, 1.15775; 0.109776, 1.22556; −0.32208, 1.20347; −0.681296, 1.10162; −0.937852, 0.937852
   c) 0.56845, 1.15775; 0.109773, 1.22557; −0.322081, 1.20347; −0.681291, 1.10161; −0.937841, 0.93784
4. a) −0.198, 0.618; −0.378796, 0.28329; −0.51932, −0.0321025; −0.594324, −0.326801; −0.588278, −0.57545
   b) −0.196904, 0.630936; −0.372643, 0.298888; −0.501302, −0.0111429; −0.561270, −0.288943; −0.547053, −0.508303
   c) −0.196935, 0.630939; −0.372687, 0.298866; −0.501345, −0.0112184; −0.561292, −0.28907; −0.547031, −0.508427
5. a) 2.96225, 1.34538; 2.34119, 1.67121; 1.90236, 1.97158; 1.56602, 2.23895; 1.29768, 2.46732

b) 3.06339, 1.34858; 2.44497, 1.68638; 1.9911, 2.00036; 1.63818, 2.27981; 1.3555, 2.5175

c) 3.06314, 1.34899; 2.44465, 1.68699; 1.99075, 2.00107; 1.63781, 2.28057; 1.35514, 2.51827

6. a) 1.42386, 2.18957; 1.82234, 2.36791; 2.21728, 2.53329; 2.61118, 2.68763; 2.9955, 2.83354

b) 1.41513, 2.18699; 1.81208, 2.36233; 2.20635, 2.5258; 2.59826, 2.6794; 2.97806, 2.82487

c) 1.41513, 2.18699; 1.81209, 2.36233; 2.20635, 2.52581; 2.59826, 2.67941; 2.97806, 2.82488

7. Para $h = 0.05$ y 0.025: $x = 10.227$, $y = -4.9294$; estos resultados concuerdan con la solución exacta hasta cinco dígitos.

8. 1.543, 0.0707503; 1.14743, −1.3885 9. 1.99521, −0.662442

CAPÍTULO 9 Sección 9.1, página 473

1. a) $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 2)^T$; $r_2 = 2$, $\xi^{(2)} = (2, 1)^T$ b) Punto silla, inestable
2. a) $r_1 = 2$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 4$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$ b) Nodo impropio, inestable
3. a) $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 1$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$ b) Punto silla, inestable
4. a) $r_1 = r_2 = -3$, $\xi^{(1)} = (1, 1)^T$ b) Nodo impropio, asintóticamente estable
5. a) $r_1 = r_2 = -1 \pm i$; $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$ b) Punto espiral, asintóticamente estable
6. a) $r_1, r_2 = \pm i$; $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$ b) Centro, estable
7. a) $r_1, r_2 = 1 \pm 2i$; $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)} = (1, 1 \mp i)^T$ b) Punto espiral, inestable
8. a) $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$; $r_2 = -1/4$, $\xi^{(2)} = (4, -3)^T$
   b) Nodo impropio, asintóticamente estable
9. a) $r_1 = r_2 = 1$, $\xi^{(1)} = (2, 1)^T$ b) Nodo impropio, inestable
10. a) $r_1, r_2 = \pm 3i$; $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)} = (2, 1 \mp 3i)^T$ b) Centro, estable
11. a) $r_1 = r_2 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$, $\xi^{(2)} = (0, 1)^T$ b) Nodo propio, asintóticamente estable
12. a) $r_1, r_2 = (1 \pm 3i)/2$; $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)} = (5, 3 \mp 3i)^T$ b) Punto espiral, inestable
13. $x_0 = 1, y_0 = 1$; $r_1 = \sqrt{2}, r_2 = -\sqrt{2}$; punto silla inestable
14. $x_0 = -1, y_0 = 0$; $r_1 = -1, r_2 = -3$; nodo impropio, asintóticamente estable
15. $x_0 = -2, y_0 = 1$; $r_1, r_2 = -1 + \sqrt{2}i$; punto espiral, asintóticamente estable
16. $x_0 = \gamma/\delta, y_0 = \alpha/\beta$; $r_1, r_2 = \pm\sqrt{\beta\delta}\,i$; centro estable
17. $c^2 > 4km$, nodo impropio, asintóticamente estable; $c^2 = 4km$, nodo impropio, asintóticamente estable; $c^2 < 4km$, punto espiral, asintóticamente estable.

Sección 9.2, página 486

1. $x = 4e^{-t}$, $y = 2e^{-2t}$; $y = x^2/8$
2. $x = 4e^{-t}$, $y = 2e^{2t}$; $y = 32x^{-2}$; $x = 4e^{-t}$, $y = 0$
3. $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$; $x^2 + y^2 = 16$; $x = -4\,\text{sen}\,t$, $y = 4\cos t$; $x^2 + y^2 = 16$
4. $x = \sqrt{a}\cos t$, $y = -\sqrt{b}\,\text{sen}\,t$; $(x^2/a) + (y^2/b) = 1$
5. $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$
6. $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
7. $(\pm n\pi, 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
8. $(0, 0)$
13. $2x^2 - \alpha x^4 + 2y^2 = c$

Sección 9.3, página 495

1. Punto espiral, asintóticamente estable
2. NP, NI o PEs, inestable
3. Punto espiral, asintóticamente estable
4. Punto espiral, inestable
5. Punto silla, inestable
6. Punto silla, inestable
7. $\mu < 2$, punto espiral, inestable, $\mu = 2$, NP, NI o PEs, inestable; $\mu > 2$, nodo impropio, inestable
8. Punto espiral, inestable
9. C o PEs, indeterminado
10. Nodo impropio, asintóticamente estable
11. (0, 0), NP, NI, o PEs, inestable; (–1, 1), punto silla, inestable
12. (1, 1), NP, NI o PEs, asintóticamente estable; (–1, 1), punto silla, inestable
13. (0, 0), nodo impropio, inestable; $(0, \frac{3}{2})$, nodo impropio, asintóticamente estable; (1, 0), punto silla, inestable; (–1, 2), punto silla, inestable
14. (1, 1), punto espiral, asintóticamente estable; (–1, 1), punto silla, inestable
20. b) Consulte la tabla 9.3.1.
23. a) $dx/dt = y$, $dy/dt = -g(x) - c(x)y$
    b) El sistema lineal es $dx/dt = y$, $dy/dt = -g'(0)x - c(0)y$
    c) Los eigenvalores satisfacen $r^2 + c(0)r + g'(0) = 0$

Sección 9.4, página 508

1. a, b) (0, 0): $r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}$, nodo impropio, inestable
   (0, 2): $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -2$, punto silla, inestable
   $(\frac{3}{2}, 0)$: $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = \frac{7}{8}$, punto silla, inestable
   $(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$: $r_1, r_2 = (-2.2 \pm \sqrt{2.04})/2$, nodo impropio, asintóticamente estable
2. a, b) (0, 0): $r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = 2$, nodo impropio, inestable
   (0, 4): $r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = -2$, nodo impropio, asintóticamente estable
   $(\frac{3}{2}, 0)$: $r_1 = -\frac{1}{4}, r_2 = -\frac{3}{2}$, nodo impropio asintóticamente estable
   (1, 1): $r_1, r_2 = (-3 \pm \sqrt{13})/4$, punto silla, inestable
3. a, b) (0, 0): $r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = 2$, nodo impropio, inestable
   (0, 2): $r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = -2$, nodo impropio, asintóticamente estable
   (3, 0): $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = -\frac{11}{8}$, nodo impropio, asintóticamente estable
   $(\frac{4}{5}, \frac{11}{10})$: $r_1 = 1.80475, r_2 = 0.30475$, punto silla, inestable
4. a, b) (0, 0): $r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = \frac{3}{4}$, nodo impropio, inestable
   $(0, \frac{3}{4})$: $r_1 = \frac{3}{4}, r_2 = -\frac{3}{4}$, punto silla, inestable
   (3, 0): $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = \frac{3}{8}$, punto silla inestable
   $(2, \frac{1}{2})$: $r_1 = -1.18301, r_2 = -0.31699$, nodo impropio, asintóticamente estable
5. a, b) (0, 0): $r_1 = 1, r_2 = \frac{3}{2}$, nodo impropio, inestable
   $(0, \frac{3}{2})$: $r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = -\frac{3}{2}$, nodo impropio, asintóticamente estable
   (1, 0): $r_1 = -1, r_2 = \frac{1}{2}$, punto silla, inestable
6. a, b) (0, 0): $r_1 = 1, r_2 = \frac{5}{2}$, nodo impropio, inestable
   $(0, \frac{5}{3})$: $r_1 = \frac{11}{6}, r_2 = -\frac{5}{2}$, punto silla, inestable
   (1, 0): $r_1 = \frac{11}{4}, r_2 = -1$, punto silla, inestable
   (2, 2): $r_1, r_2 = (-5 \pm \sqrt{3})/2$, nodo impropio, asintóticamente inestable
8. a) Los puntos críticos son $x = 0, y = 0$; $x = \epsilon_1/\sigma_1, y = 0$; $x = 0, y = \epsilon_2/\sigma_2$. El estado mixto (X, Y) no es posible ya que una de dos, X o Y, es negativa, $x \to 0, y \to \epsilon_2/\sigma_2$ cuando $t \to \infty$, sobrevive el *redear*.

b) Igual que en el inciso a), excepto que $x \to \epsilon_1/\sigma_1$, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$, sobrevive el *bluegill*.

9. a) $X = (B - \gamma_1 R)(1 - \gamma_1\gamma_2)$, $Y = (R - \gamma_2 B)/(1 - \gamma_1\gamma_2)$.
   b) Se reduce X, Y aumenta; sí, si B se hace menor que $\gamma_1 R$, entonces $x \to 0$ y $y \to R$ cuando $t \to \infty$.
10. a) $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 \neq 0$; (0, 0), $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$, $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$
    $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 = 0$; (0, 0) y todos los puntos sobre la recta $\sigma_1 x + \alpha_1 y = \epsilon_1$,
    b) $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 > 0$: (0, 0) es nodo inestable; $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ es punto silla;
    $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ es nodo asintóticamente estable.
    $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 < 0$; (0, 0) es nodo inestable; $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ es punto silla;
    $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ es nodo asintóticamente estable.
    c) (0, 0) es nodo inestable; los puntos sobre la recta $\sigma_1 x + \alpha_1 y = \epsilon_1$ son puntos críticos estables, no aislados.

Sección 9.5, página 521

1. a, b) (0, 0): $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, punto silla, inestable
   $(\frac{1}{2}, 3)$: $r_1, r_2 = \pm\sqrt{3}i/2$, centro, estable
2. a, b) (0, 0): $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{1}{4}$, punto silla, inestable
   $(\frac{1}{2}, 2)$: $r_1, r_2 = \pm i/2$, centro, estable
3. a, b) (0, 0): $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{1}{4}$, punto silla, inestable
   (2, 0): $r_1 = \frac{3}{4}$, $r_2 = -1$, punto silla, inestable
   $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$: $r_1, r_2 = (-1 \pm \sqrt{11}\,i)/8$, punto espiral, asintóticamente estable
4. a, b) (0, 0): $r_1 = \frac{9}{8}$, $r_2 = -1$, punto silla, inestable
   $(\frac{9}{8}, 0)$: $r_1 = -\frac{9}{8}$, $r_2 = \frac{1}{8}$, punto silla, inestable
   $(1, \frac{1}{4})$: $r_1, r_2 = (-1 \pm \sqrt{0.5})/2$, nodo impropio, asintóticamente estable
5. a, b) (0, 0): $r_1 = -1$, $r_2 = -\frac{3}{2}$, nodo impropio, asintóticamente estable
   $(\frac{1}{2}, 0)$: $r_1 = \frac{3}{4}$, $r_2 = -1$, punto silla, inestable
   (2, 0): $r_1 = -3$, $r_2 = \frac{1}{2}$, punto silla, inestable
   $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$: $r_1, r_2 = (-3 \pm \sqrt{39}\,i)/8$, punto espiral, asintóticamente estable
6. $t = 0, T, 2T, \ldots$: H es un máx., dP/dt es un máx.
   $t = T/4, 5T\,4, \ldots$: dH/dt es un mín., P es un máx.
   $t = T/2, 3T/2, \ldots$: H es un mín., dP/dt es un mín.
   $t = 3T/4, 7T/4, \ldots$: dH/dt es un máx., P es un mín.
7. a) $\sqrt{c\alpha}/\sqrt{a\gamma}$ b) $\sqrt{3}$
   d) La razón de la amplitud de la presa a la amplitud del depredador aumenta muy lentamente a medida que el punto inicial se aleja del punto de equilibrio.
8. a) $4\pi/\sqrt{3} \cong 7.2552$
   c) El periodo aumenta lentamente a medida que el punto inicial se aleja del punto de equilibrio.
10. Atrapar zorros en medio ciclo, cuando $dP/dt > 0$; atrapar conejos en medio ciclo, cuando $dH/dt > 0$; atrapar zorros y conejos en un cuarto de ciclo cuando, $dP/dt > 0$ y $dH/dt > 0$; no atrapar ninguna de las dos especies en un cuarto de ciclo, cuando $dP/dt < 0$ y $dH/dt < 0$.
11. $dH/dt = aH - \alpha HP - \beta H$, $dP/dt = -cP + \gamma HP - \delta P$, en donde β y δ son constantes de proporcionalidad. El nuevo centro es $H = (c + \delta)/\gamma > c/\gamma$ y $P = (a - \beta)/\alpha < a/\alpha$, de modo que ¡el valor de equilibrio de la presa se aumenta y el valor de equilibrio del depredador se disminuye!

12. Sea $A = a/\sigma - c/\gamma > 0$. Los puntos críticos son (0, 0), $(a/\sigma, 0)$ y $(c/\gamma, \sigma A/\alpha)$, en donde (0, 0) es un punto silla, $(a/\sigma, 0)$ es un punto silla y $(c/\gamma, \sigma A/\alpha)$ es un nodo asintóticamente estable, si $(c\sigma/\gamma)^2 - 4c\sigma A \geq 0$, o un punto espiral asintóticamente estable, si $(c\sigma/\gamma)^2 - 4c\sigma A < 0$. $(H, P) \to (c/\gamma, \sigma A/\alpha)$ cuando $t \to \infty$.

Sección 9.7, página 541

1. $r = 1$, $\theta = t + t_0$, ciclo límite estable
2. $r = 1$, $\theta = -t + t_0$, ciclo límite semiestable
3. $r = 1$, $\theta = t + t_0$, ciclo límite estable; $r = 3$, $\theta = t + t_0$, solución periódica inestable
4. $r = 1$, $\theta = -t + t_0$, solución periódica inestable; $r = 2$, $\theta = -t + t_0$, , ciclo límite estable
5. $r = (2n - 1)$, $\theta = t + t_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ciclo límite estable;
   $r = 2n$, $\theta = t + t_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, solución periódica inestable
6. $r = 2$, $\theta = -t + t_0$, ciclo límite semiestable;
   $r = 3$, $\theta = -t + t_0$, solución periódica inestable
8. a) En contra del sentido del movimiento de las manecillas del reloj
   b) $r = 1$, $\theta = t + t_0$, ciclo límite estable; $r = 2$, $\theta = t + t_0$, ciclo límite semiestable;
   $r = 3$, $\theta = t + t_0$, solución periódica inestable
9. $r = \sqrt{2}$, $\theta = -t + t_0$, solución periódica inestable
14. a) $\mu = 0.2$, $T \cong 6.29$; $\mu = 1$, $T \cong 6.66$; $\mu = 5$, $T \cong 11.60$
15. a) $x' = y, y' = -x + \mu y - \mu y^3$ 3
    b) $0 < \mu < 2$, punto espiral inestable; $\mu \geq 2$, nodo impropio inestable
    c) $A \cong 2.16$, $T \cong 6.65$
    d) $\mu = 0.2, A \cong 1.99$, $T \cong 6.31$; $\mu = 0.5, A \cong 2.03$, $T \cong 6.39$;
    $\mu = 2, A \cong 2.60$, $T \cong 7.65$; $\mu = 5, A \cong 4.36$, $T \cong 11.60$

Sección 9.8, página 552

1. b) $\lambda = \lambda_1$, $\xi^{(1)} = (0, 0, 1)^T$; $\lambda = \lambda_2$, $\xi^{(2)} = (20, 9 - \sqrt{81 + 40r}, 0)^T$;
   $\lambda = \lambda_3$, $\xi^{(3)} = (20, 9 + \sqrt{81 + 40r}, 0)^T$
   c) $\lambda_1 \cong -2.6667$, $\xi^{(1)} = (0, 0, 1)^T$; $\lambda_2 \cong -22.8277$, $\xi^{(2)} \cong (20, -25.6554, 0)^T$;
   $\lambda_3 \cong 11.8277$, $\xi^{(3)} \cong (20, 43.6554, 0)^T$
2. c) $\lambda_1 \cong -13.8546$; $\lambda_2, \lambda_3 \cong 0.0939556 \pm 10.1945i$
5. a) $dV/dt = -2\sigma[rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2]$

CAPÍTULO 10 Sección 10.1, página 563

1. $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$ — $\alpha^2 = 0.000114$ m^2/sec
   $u(x, 0) = 20$, $0 \leq x \leq 1$ — x en metros
   $u(0, t) = 60$, $u(1, t) = 20$, $t > 0$ — t en segundos
2. $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, $0 < x < 2$, $t > 0$ — $\alpha^2 = 0.000171$ m^2/sec
   $u(x, 0) = 30 + 50x - 20x^2$, $0 \leq x \leq 2$ — x en metros
   $u(0, t) = 30$, $u(2, t) = 50$, $t > 0$ — t en segundos
4. $u(x, t) = e^{-400\pi^2 t} \operatorname{sen} 2\pi x - 2e^{-2500\pi^2 t} \operatorname{sen} 5\pi x$

5. $u(x, t) = 2e^{-\pi^2 t/16}\operatorname{sen}(\pi x/2) - e^{-\pi^2 t/4}\operatorname{sen}\pi x + 4e^{-\pi^2 t}\operatorname{sen} 2\pi x$
6. (longitud)$^{-2}$
7. $xX'' - \lambda X = 0, \quad T' + \lambda T = 0$
8. $X'' - \lambda x X = 0, \quad T' + \lambda t T = 0$
9. $X'' - \lambda(X' + X) = 0, \quad T' + \lambda T = 0$
10. $[p(x)X']' + \lambda r(x)X = 0, \quad T'' + \lambda T = 0$
11. No separables
12. $X'' + (x + \lambda)X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0$
15. a) $aw_{xx} - bw_t + (c - b\delta)w = 0$ b) $\delta = c/b$ si $b \neq 0$
16. $X'' + \mu^2 X = 0, \quad Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0, \quad T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0$
17. $r^2R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0, \quad \Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \quad T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0$

Sección 10.2, página 572

1. $T = 2$
2. $T = 1$
3. No periódica
4. $T = 1$
5. No periódica
6. $T = 2\pi/5$
7. $T = 2\pi/m, \quad m \neq 0$
8. No periódica
9. $T = 2$
10. $T = 4$
12. $\int_0^x$ puede no ser periódica; por ejemplo, sea $f(t) = 1 + \cos t$.

14. $f(x) = \dfrac{2l}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/l]}{2n-1}$

16. $f(x) = \dfrac{2l}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$

17. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} n\pi x$

18. $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n}$

19. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/2]}{2n-1}$

20. $f(x) = -\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen} nx}{n}\right]$

21. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$

22. $f(x) = \dfrac{3l}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2l\cos[(2n-1)\pi x/l]}{(2n-1)^2\pi^2} + \frac{(-1)^{n+1}\, l\operatorname{sen}(n\pi x/l)}{n\pi}\right]$

23. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

24. $f(x) = 2l - x$ en $l < x < 2l$; $f(x) = -2l - x$ en $-3l < x < -2l$
25. $f(x) = x - 1$ en $1 < x < 2$; $f(x) = x - 8$ en $8 < x < 9$
26. $f(x) = -l - x$ en $-l < x < 0$

Sección 10.3, página 582

1. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}$

2. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x + \dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx\right]$

3. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

4. $f(x) = s + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n\pi s}{n}\cos n\pi x$

5. $f(x) = \dfrac{l}{2} + \dfrac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)\pi x/l]}{(2n-1)^2}$

6. $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x$

7. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$

8. $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x + b_n \operatorname{sen} n\pi x)$;

$a_0 = \dfrac{1}{3}, \quad a_n = \dfrac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad b_n = \begin{cases} -1/n\pi, & n \text{ par} \\ 1/n\pi - 4/n^3\pi^3, & n \text{ impar} \end{cases}$

9. $y = (\omega \operatorname{sen} nt - n \operatorname{sen}\omega t)/\omega(\omega^2 - n^2), \quad \omega^2 \neq n^2$
$y = (\operatorname{sen} nt - nt\cos nt)/2n^2, \quad \omega^2 = n^2$

10. $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\omega \operatorname{sen} nt - n \operatorname{sen}\omega t)/\omega(\omega^2 - n^2), \quad \omega \neq 1, 2, 3, \ldots$

$y = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} b_n(m \operatorname{sen} nt - n \operatorname{sen} mt)/m(m^2 - n^2) + b_m(\operatorname{sen} mt - mt\cos mt)/2m^2, \ \omega = m$

11. $y = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\omega^2 - (2n-1)^2}\left[\dfrac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)t - \dfrac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right]$

12. $y = \cos\omega t + \dfrac{1}{2\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi t - \cos\omega t}{(2n-1)^2[\omega^2 - (2n-1)^2]}$

Sección 10.4, página 588

1. Impar
2. Impar
3. Ninguna
4. Impar
5. Par
6. Par
7. Ninguna
8. Par
9. Par
10. Par
11. Ninguna
12. Ninguna
13. 0
14. $\frac{2}{5}$
15. $2\pi(-1)^{n+1}/n$
16. 0
17. 0
18. 0

20. $f(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1 - \cos(n\pi/2)}{n^2}\cos(n\pi x/2)$

$f(x) = \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n\pi/2) - \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2}\operatorname{sen}(n\pi x/2)$

21. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}$

22. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\left(-\cos n\pi + \dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2}$

23. $f(x) = 1$

24. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$

25. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} - 2\cos n\pi\right)\operatorname{sen}\frac{nx}{3}$

26. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n}$

27. $f(x) = \frac{l}{2} + \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/l]}{(2n-1)^2}$

28. $f(x) = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x/l)}{n}$

29. $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right]\cos\frac{nx}{2}$

30. $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nx}{n}$

35. 2.895

36. b) 3.061

40. Desarrollar $f(x)$ antisimétricamente hacia $(l, 2l]$; es decir, de modo que $f(2l - x) = -f(x)$ para $0 \le x < l$. Luego, extender esta función como una función par hacia $(-2l, 0)$.

Sección 10.5, página 597

1. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2}\operatorname{sen}(n\pi x/l)$; $\alpha^2 = 1.14\ \text{cm}^2/\text{s}$, $l = 100\ \text{cm}$

   a) $c_n = 100(1 - \cos n\pi)/n\pi$ b) $c_n = 400\operatorname{sen}(n\pi/2)/n^2\pi^2$

   c) $c_n = 100[\cos(n\pi/4) - \cos(3n\pi/4)]/n\pi$

2. $u(x, t) = \frac{400}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/400}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{20}$

   a) $u(10, 30) \cong 35.9°\text{C}$ b) $u(10, 30) \cong 67.2°\text{C}$ c) $u(10, 30) \cong 97.4°\text{C}$

3. $t \cong 400(\alpha\pi)^{-2}\ln(400/25\pi)$ a) $t \cong 38.6\ \text{s}$ b) $t \cong 76.7\ \text{s}$ c) $t \cong 550\ \text{s}$

4. a) $\tau \cong 0.49108$ b) $\tau \cong 0.49108$ c) $\tau \cong 0.49108l^2/\alpha^2$

5. a) $u(x, t) = \frac{60x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{50}{n\pi} + \frac{70}{n\pi}\cos n\pi\right)e^{-0.86n^2\pi^2 t/l^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$

   b) $u(5, 30) \cong 12.6°\text{C}$; $u(5, 60) \cong 13.7°\text{C}$

   c) $u(5, 30) \cong 14.1°\text{C}$; 12%; tercer término $\cong -0.005°\text{C}$

   d) $t \cong 160\ \text{s}$

6. a) $f(x) = 2x$, $0 \le x \le 50$; $f(x) = 200 - 2x$, $50 < x \le 100$

   b) $u(x, t) = 20 - \frac{x}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-1.14n^2\pi^2 t/(100)^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}$,

   $$c_n = \frac{1}{50}\int_0^{100}\left[f(x) - \left(20 - \frac{x}{5}\right)\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}\,dx = \frac{800}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{40}{n\pi}$$

7. $u(x, t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$,

   $$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -4/(n^2 - 1)\pi, & n \text{ impar} \end{cases} \qquad \lim_{t\to\infty} u(x, t) = 2/\pi$$

9. $v(x) = 0$

10. $v(x) = T$

11. b) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4l^2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$, $c_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx$

12. $u(x,t)=T+\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4l^2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$,

$c_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l [f(x)-T]\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx$

13. $v(x)=T(1+x)/(1+l)$

14. $u(x)=\begin{cases} T\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{\xi}{\xi+(l/a)-1}\right], & 0\le x\le a \\ T\left[1-\dfrac{l-x}{a}\dfrac{1}{\xi+(l/a)-1}\right], & a\le x\le l \end{cases}$ en donde $\xi=\kappa_2 A_2/\kappa_1 A_1$

15. e) $u_n(x,t)=e^{-\lambda_n^2\alpha^2 t}\operatorname{sen}\lambda_n x$

Sección 10.6, página 608

1. $u(x,t)=\dfrac{4Al}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}\cos\dfrac{n\pi at}{l}$

2. $u(x,t)=\dfrac{2Al}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\dfrac{3n\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}\cos\dfrac{n\pi at}{l}$

3. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi at}{l}$, $c_n=\dfrac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}\,dx$

4. $u(x,t)=\dfrac{4Al^2}{a\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi at}{l}$

6. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\dfrac{(2n-1)\pi at}{2l}$, $c_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx$

9. $\phi(x+at)$ representa una onda que se desplaza en la dirección x negativa con velocidad $a>0$.

10. a) 248 pie/s b) 49.6 πn rad/s c) Las frecuencias aumentan; los modos permanecen sin cambio.

11. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\beta_n t\operatorname{sen}(n\pi x/l)$, $\beta_n^2=(n\pi a/l)^2+\alpha^2$, $c_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/l)\,dx$

17. $r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-\mu^2)R=0$, $\Theta''+\mu^2\Theta=0$, $T''+\lambda^2a^2T=0$

Sección 10.7, página 620

1. a) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi y}{a}$, $c_n=\dfrac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

b) $u(x,y)=\dfrac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\operatorname{sin}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi y}{a}$

2. $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi(b-y)}{a}$, $c_n=\dfrac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a h(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

3. $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$, en donde $v(x, y)$ se halló en el problema 2 y $w(x, y)$ se expresa por la ecuación (12) del texto.

5. $u(r, \theta) = \dfrac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta)$;

$$c_n = \frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad k_n = \frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta$$

6. $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \operatorname{sen} n\theta, \quad c_n = \dfrac{2}{\pi a^n}\int_0^{\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta$

7. $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{n\pi/\alpha}\operatorname{sen}(n\pi\theta/\alpha), \quad c_n = (2/\alpha)a^{-n\pi/\alpha}\int_0^{\alpha} f(\theta)\operatorname{sen}(n\pi\theta/\alpha)\, d\theta$

8. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\pi y/a}\operatorname{sen}(n\pi x/a), \quad c_n = \dfrac{2}{a}\int_0^{a} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/a)\, dx$

10. b) $u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh(n\pi x/b)\cos(n\pi y/b), \quad c_n = \dfrac{2/n\pi}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)}\int_0^{b} f(y)\cos(n\pi y/b)\, dy$

11. $u(r, \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta), \quad c_n = \dfrac{1}{n\pi a^{n-1}}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\, d\theta,$

$k_n = \dfrac{1}{n\pi a^{n-1}}\int_0^{2\pi} g(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta$; La condición necesaria es $\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta = 0$.

12. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh(n\pi x/b)\operatorname{sen}(n\pi y/b), \quad c_n = \dfrac{2/b}{\cosh(n\pi a/b)}\int_0^{b} f(y)\operatorname{sen}(n\pi y/b)\, dy$

13. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}[(2n-1)\pi x/2b]\operatorname{sen}[(2n-1)\pi y/2b]$,

$$c_n = \frac{2/b}{\operatorname{senh}[(2n-1)\pi a/2b]}\int_0^{b} f(y)\operatorname{sen}[(2n-1)\pi y/2b]\, dy$$

14. $u(x, y) = c_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi x/a)\operatorname{senh}(n\pi y/a)$,

$$c_0 = \frac{1}{ab}\int_0^{a} f(x)\, dx, \quad c_n = \frac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^{a} f(x)\cos(n\pi x/a)\, dx$$

CAPÍTULO 11 Sección 11.1, página 639

1. Homogéneo
2. No homogéneo
3. No homogéneo
4. Homogéneo
5. No homogéneo
6. Homogéneo
8. $\mu(x) = e^{-x^2}$
9. $\mu(x) = 1/x$
10. $\mu(x) = e^{-x}$
11. $\mu(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$
12. $a^2X'' + (\lambda - k)X = 0, \quad T'' + cT' + \lambda T = 0$

Sección 11.2, página 643

1. $\lambda_n = [(2n-1)\pi/2]^2$; $\phi_n(x) = \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/2]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
2. $\lambda_n = [(2n-1)\pi/2]^2$; $\phi_n(x) = \cos[(2n-1)\pi x/2]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. $\lambda_0 = 0$; $\phi_0(x) = 1$; $\lambda_n = n^2\pi^2$; $\phi_n(x) = \cos n\pi x$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
4. $\lambda_n = -[(2n-1)\pi/2]^2$; $\phi_n(x) = \text{sen}[(2n-1)\pi x/2]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
5. $\lambda_0 = 0$; $\phi_0(x) = 1 - x$

   Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\phi_n(x) = \text{sen}\,\mu_n x - \mu_n \cos \mu_n x$ y $\lambda_n = -\mu_n^2$ en donde las μ_n son las raíces de $\mu = \tan \mu$.

   $\lambda_1 \cong -20.19$; $\lambda_n \cong -(2n+1)^2\pi^2/4$ para n grande
6. $\phi_n(x) = \text{sen}\sqrt{\lambda_n}x$ en donde $\sqrt{\lambda_n}$ son las raíces de $\sqrt{\lambda} = -\tan\sqrt{\lambda}\,\pi$; $\lambda_1 \cong 0.6204$;
   $\lambda_n \cong (2n-1)^2/4$ para n grande
7. $\phi_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x$ en donde $\sqrt{\lambda_n}$ son las raíces de $\sqrt{\lambda} = \cot\sqrt{\lambda}$; $\lambda_1 \cong 0.7402$;
   $\lambda_n \cong (n-1)^2\pi^2$ para n grande
8. $\phi_n(x) = \text{sen}\,\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x$ en donde $\sqrt{\lambda_n}$ son las raíces de
   $(\lambda - 1)\text{sen}\,\sqrt{\lambda} - 2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$; $\lambda_1 \cong 1.7071$; $\lambda_n \cong (n-1)^2\pi^2$ para n grande
9. a) $s(x) = e^x$ b) $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\phi_n(x) = e^x \text{sen}\,n\pi x$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
10. Eigenvalores positivos $\lambda = \lambda_n$, en donde $\sqrt{\lambda_n}$ son las raíces de $\sqrt{\lambda} = \frac{2}{3}\tan 3\lambda l$; las eigenfunciones correspondientes son $\phi_n(x) = e^{-2x}\text{sen}\,3\sqrt{\lambda_n}x$, si $l = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = 0$ es un eigenvalor, $\phi_0(x) = xe^{-2x}$ es una eigenfunción; si $l \neq \frac{1}{2}$, $\lambda = 0$ no es eigenvalor. Si $l \leq \frac{1}{2}$ no hay eigenvalores negativos; si $l > \frac{1}{2}$ existe un eigenvalor negativo $\lambda = -\mu^2$, en donde μ es una raíz de $\mu = \frac{2}{3}\tanh 3\mu l$ la eigenfunción correspondiente es $\phi_{-1}(x) = e^{-2x}\text{senh}\,3\mu x$.
11. No hay eigenvalores reales
12. El único eigenvalor es $\lambda = 0$; la eigenfunción es $\phi(x) = x - 1$.
13. a) $2\,\text{sen}\,\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$ b) $2\,\text{senh}\,\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}\cosh\sqrt{\mu} = 0$, $\mu = -\lambda$
16. a) $\lambda_n = \mu_n^4$, en donde μ_n es una raíz de $\text{sen}\,\mu l\,\text{senh}\,\mu l = 0$, por tanto, $\lambda_n = (n\pi/l)^4$; $\lambda_1 \cong 97.409/l^4$, $\phi_n(x) = \text{sen}(n\pi x/l)$

    b) $\lambda_n = \mu_n^4$, en donde μ_n es una raíz de $\text{sen}\,\mu l\cosh\mu l - \cos\mu l\,\text{senh}\,\mu l = 0$; $\lambda_1 \cong 237.72/l^4$,

$$\phi_n(x) = \frac{\text{sen}\,\mu_n x\,\text{senh}\,\mu_n l - \text{sen}\,\mu_n l\,\text{senh}\,\mu_n x}{\text{senh}\,\mu_n l}$$

    c) $\lambda_n = \mu_n^4$, en donde μ_n es una raíz de $1 + \cosh\mu l\cos\mu l = 0$; $\lambda_1 \cong 12.362/l^4$,

$$\phi_n(x) = \frac{[(\text{sen}\,\mu_n x - \text{senh}\,\mu_n x)(\cos\mu_n l + \cosh\mu_n l) + (\text{sen}\,\mu_n l + \text{senh}\,\mu_n l)(\cosh\mu_n x - \cos\mu_n x)]}{\cos\mu_n l + \cosh\mu_n l}$$

17. c) $\phi_n(x) = \text{sen}\,\sqrt{\lambda_n}x$, en donde, λ_n satisface $\cos\sqrt{\lambda_n}l - \gamma\sqrt{\lambda_n}l\,\text{sen}\,\sqrt{\lambda_n}l = 0$;
    $\lambda_1 \cong 1.1597/l^2$, $\lambda_2 \cong 13.276/l^2$

Sección 11.3, página 652

1. $\phi_n(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$ 2. $\phi_n(x) = \sqrt{2}\cos(n - \frac{1}{2})\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$
3. $\phi_0(x) = 1$, $\phi_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$
4. $\phi_n(x) = \dfrac{\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{(1 + \text{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}$, en donde, λ_n satisface $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\,\text{sen}\,\sqrt{\lambda_n} = 0$
5. $\phi_n(x) = (2\sqrt{1 + n^2\pi^2/n\pi\sqrt{e^2 - 1}})e^x\,\text{sen}\,n\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$
6. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\pi}$; $n = 1, 2, \ldots$ 7. $a_n = \dfrac{4\sqrt{2}(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}$; $n = 1, 2, \ldots$
8. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\pi}(1 - \cos[(2n-1)\pi/4])$; $n = 1, 2, \ldots$

9. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}\,\text{sen}(n-\frac{1}{2})(\pi/2)}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}$; $n = 1, 2, \ldots$

En los problemas 10 a 13, $\alpha_n = (1 + \text{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}$ y $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\,\text{sen}\sqrt{\lambda_n} = 0$.

10. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}\,\alpha_n}$; $n = 1, 2, \ldots$

11. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}(2\cos\sqrt{\lambda_n} - 1)}{\lambda_n\alpha_n}$; $n = 1, 2, \ldots$

12. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}(1 - \cos\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n\alpha_n}$; $n = 1, 2, \ldots$

13. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}\,\text{sen}(\sqrt{\lambda_n}/2)}{\alpha_n\sqrt{\lambda_n}}$; $n = 1, 2, \ldots$

14. No autoadjunto
15. Autoadjunto
16. No autoadjunto
17. Autoadjunto
18. Autoadjunto
21. Si $a_2 = 0$ o $b_2 = 0$, entonces está faltando el término correspondiente en la frontera.
26. a) $\lambda_1 = \pi^2/l^2$; $\phi_1(x) = \text{sen}(\pi x/l)$
    b) $\lambda_1 \cong (4.4934)^2/l^2$; $\phi_1(x) = \text{sen}\sqrt{\lambda_1}\,x - \sqrt{\lambda_1}\,x\cos\sqrt{\lambda_1}\,l$
    c) $\lambda_1 = (2\pi)^2/l^2$; $\phi_1(x) = 1 - \cos(2\pi x/l)$
27. $\lambda_1 = \pi^2/4l^2$; $\phi_1(x) = 1 - \cos(\pi x/2l)$

Sección 11.4, página 665

1. $y = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,\text{sen}\,n\pi x}{(n^2\pi^2 - 2)n\pi}$

2. $y = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,\text{sen}(n-\frac{1}{2})\pi x}{[(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 - 2](n-\frac{1}{2})^2\pi^2}$

3. $y = -\dfrac{1}{4} - 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{[(2n-1)^2\pi^2 - 2](2n-1)^2\pi^2}$

4. $y = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\cos\sqrt{\lambda_n} - 1)\cos\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 2)(1 + \text{sen}^2\sqrt{\lambda_n})}$

5. $y = 8\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi/2)\,\text{sen}\,n\pi x}{(n^2\pi^2 - 2)n^2\pi^2}$

6–9. Para cada problema la solución es

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}\,\phi_n(x), \qquad c_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad \mu \neq \lambda_n$$

en donde $\phi_n(x)$ se da en los problemas 1, 2, 3 y 4, respectivamente, de la sección 11.3 y λ_n es el eigenvalor correspondiente. En el problema 8 la suma empieza en $n = 0$.

10. $a = -\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2\pi^2}\cos\pi x + \dfrac{1}{\pi^2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c\,\text{sen}\,\pi x$

11. No hay solución
12. a es arbitraria, $y = c\cos\pi x + a/\pi^2$
13. $a = 0$, $y = c\,\text{sen}\,\pi x - (x/2\pi)\,\text{sen}\,\pi x$
17. $v(x) = a + (b - a)x$
18. $v(x) = 1 - \frac{3}{2}x$
19. $u(x, t) = \sqrt{2}\left[-\dfrac{4c_1}{\pi^2} + \left(\dfrac{4c_1}{\pi^2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\pi^2 t/4}\right]\text{sen}\dfrac{\pi x}{2}$

$$-\sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4c_n}{(2n-1)^2\pi^2}(1-e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t})\operatorname{sen}(n-\tfrac{1}{2})\pi x,$$

$$c_n=\frac{4\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2},\quad n=1,2,\ldots$$

20. $u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c_n}{\lambda_n-1}(e^{-t}-e^{-\lambda_n t})+\alpha_n e^{-\lambda_n t}\right]\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x}{(1+\operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}$,

$c_n=\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}(1+\operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}$, $\alpha_n=\dfrac{\sqrt{2}(1-\cos\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n(1+\operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}$,

y λ_n satisface $\cos\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}=0$

21. $u(x,t)=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^4\pi^4}(1-e^{-n^2\pi^2 t})\operatorname{sen}n\pi x$

22. $u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(e^{-t}-e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t})\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})\pi x}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2-1}$

$$c_n=\frac{2\sqrt{2}(2n-1)\pi+4\sqrt{2}(-1)^n}{(2n-1)^2\pi^2}$$

23. a) $r(x)w_t=[p(x)w_x]_x-q(x)w \qquad w(0,t)=0,\quad w(1,t)=0,\quad w(x,0)=f(x)-v(x)$

24. $u(x,t)=x^2-2x+1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}$

25. $u(x,t)=-\cos\pi x+e^{-9\pi^2 t/4}\cos(3\pi x/2)$

31–34. En todos los casos la soluciones $y=\int_0^1 G(x,s)\,f(s)\,ds$, en donde $G(x,s)$ se da a continuación.

31. $G(x,s)=\begin{cases}1-x, & 0\le s\le x\\ 1-s, & x\le s\le 1\end{cases}$

32. $G(s,x)=\begin{cases}s(2-x)/2, & 0\le s\le x\\ x(2-s)/2, & x\le s\le 1\end{cases}$

33. $G(x,s)=\begin{cases}\cos s\operatorname{sen}(1-x)/\cos 1, & 0\le s\le x\\ \operatorname{sen}(1-s)\cos x/\cos 1, & x\le s\le 1\end{cases}$

34. $G(x,s)=\begin{cases}s, & 0\le s\le x\\ x, & x\le s\le 1\end{cases}$

Sección 11.5, página 681

1. $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n-\mu}J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$, $c_n=\int_0^1 f(x)J_0(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx\Big/\int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx$,

$\sqrt{\lambda_n}$ son las raíces de $J_0(\sqrt{\lambda})=0$

2. c) $y=-\frac{c_0}{\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n-\mu}J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$

$c_0=2\int_0^1 f(x)\,dx$; $c_n=\int_0^1 f(x)J_0(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx\Big/\int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx$, $n=1,2,\ldots$

$\sqrt{\lambda_n}$ son las raíces de $J_0'(\sqrt{\lambda})=0$

3. d) $a_n = \int_0^1 xJ_k(\sqrt{\lambda_n}x)f(x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_k^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx$

   e) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} J_k(\sqrt{\lambda_n}x)$, $c_n = \int_0^1 f(x)J_k(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_k^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx$

4. b) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} P_{2n-1}(x)$, $c_n = \int_0^1 f(x)P_{2n-1}(x)\,dx \Big/ \int_0^1 P_{2n-1}^2(x)\,dx$

Sección 11.6, página 689

1. b) $u(\xi, 2) = f(\xi + 1)$, $u(\xi, 0) = 0$, $0 \le \xi \le 2$
   $u(0, \eta) = u(2, \eta) = 0$, $0 \le \eta \le 2$

2. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen} \lambda_n at$, $k_n = \frac{1}{\lambda_n a} \int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)g(r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr$

3. Superponga la solución del problema 2 y la solución [ecuación (21)] del ejemplo del texto.

6. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r)$, $c_n = \int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)f(r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr$,
   y λ_n son las raíces de $J_0(\lambda) = 0$.

7. b) $v(r, \theta) = \frac{1}{2}c_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr)(b_m \operatorname{sen} m\theta + c_m \cos m\theta)$,

   $b_m = \frac{1}{\pi J_m(kc)} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} m\theta\,d\theta$; $m = 1, 2, \ldots$

   $c_m = \frac{1}{\pi J_m(kc)} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta\,d\theta$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

8. $c_n = \int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr$

10. $u(\rho, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(s)$, en donde $c_n = \int_{-1}^1 f(\arccos s)P_n(s)ds \Big/ \int_{-1}^1 P_n^2(s)\,ds$;
    P_n es el n-ésimo polinomio de Legendre y $s = \cos \phi$.

Sección 11.7, página 695

2. mcs = 1; no hay máximo
3. mcs = 1; no hay máximo
4. mcs = 1; no hay máximo
5. mcs = máximo = 1
6. no existe mcs ni máximo

9. a) $f_0(x) = 1$ b) $f_1(x) = \sqrt{3}(1 - 2x)$ c) $f_2(x) = \sqrt{5}(-1 + 6x - 6x^2)$
   d) $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = 2x - 1$, $g_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$

10. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$

Índice

Abel, fórmula de, 156, 175, 176, 223, 238
  para sistemas de ecuaciones, 386
Abel, Niels Henrik, 156, 229
Aceleración de la convergencia, 588
Adams-Bashforth, fórmula predictora de, 461
Adams, John Couch, 460
Adams-Moulton, fórmula correctora de, 462, 467
Adams-Moulton, método predictor-corrector de, 462, 465, 470
Airy, ecuación de, 153. 253-257, 262, 271, 306, 376
Airy, George Biddell, 253
Amortiguamiento crítico, 204
Amortiguamiento, fuerza de, 198, 491
Amplitud crítica, 79
Amplitud, del movimiento armónico simple, 201
Amplitud, modulación en, 211
Aniquiladores, método de los, 235
Aprovechamiento de un recurso renovable, 83
Aproximaciones sucesivas, método de, 113, 419
Atractor extraño, 557

Barra elástica, vibraciones de una, 590
Bendixson, Ivar Otto, 545
Bernoulli, Daniel, 28, 85, 564, 608, 612
Bernoulli, ecuación de, 47
Bernoulli, Jakob, 28, 47, 94, 351
Bernoulli, Johann, 28, 94
Bessel, desarrollo en serie de, 686, 691
Bessel, desigualdad de, 702
Bessel, ecuación de orden:
  cero, 285, 295-299, 305, 326, 629, 682, 686, 691
  K, 687-688
  nu, 136, 153, 248, 304, 583, 682, 688
  tres medios, 304
  un medio, 299-301, 304
  uno, 285, 302-304, 306
Bessel, Friedrich Wilhelm, 136
Bessel, funciones de, 28
  aproximación asintótica para la, 299
  ceros de la, 306, 683, 691
  $J_0(x)$, 285, 296, 325, 683, 686, 691
  $J_1/x)$, 285, 302
  $J_{1/2}(x)$, 301
  $J_{-1/2}(x)$, 301
  ortogonalidad de las, 306, 686, 688
  transformada de Laplace, 325
  $Y_0(x)$, 298
  $Y_1(x)$, 304
Bifurcación, 86, 130, 495 554
Braquistócrona, 28, 94

Cambio de estabilidad, 129
Cambio de variable independiente, 167, 306
  para la ecuación de Euler, 167, 279
Campo direccional, 22-23
Campo gravitacional, 88
Capacidad cinergética del ambiente, 75
Cardano, Girolamo, 429
Carga rampa, 337
Cayley, Arthur, 361
Centro, 481, 495, 504
Ciclo límite, 544
Coeficientes indeterminados, 179-187
  para sistemas de ecuaciones, 232-234
Colocación, método de la, 696
Condición de normalización, 656
Condiciones en la frontera:
  dependientes del tiempo, 674
  homogéneas, 641
  no homogéneas, 599-601, 641, 674
  para la cuerda elástica, 609, 616
  para la ecuación de Laplace, 621
  para la ecuación del calor, 632
  periódicas, 667, 699
  separadas, 653
Condiciones iniciales, 35, 121, 136, 220, 357
  propagación de discontinuidades para la ecuación de onda, 614
  suavizamiento de las discontinuidades para la ecuación del calor, 599
Condiciones periódicas en la frontera, 661, 699
Condiciones separadas en la frontera, 653
Conducción del calor, ecuación de, 18, 564, 565, 632
  barra con extremos aislados, 601-603
  condiciones en la frontera, 565, 599, 601, 605, 632
  condiciones no homogéneas en la frontera, 599-601
  deducción de la, 629-634
  en coordenadas polares, 571
  solución de estado estable, 633
  solución del problema fundamental, 565-571, 597-599
  solución transitoria, 600-601
  soluciones fundamentales de la, 568, 602
  suavizamiento de discontinuidades en las condiciones iniciales, 599
  término no homogéneo de la fuente, 668-669
Conjunto completo de funciones, 699

Conjunto fundamental de soluciones, 149, 221, 385
Conjunto ortonormal, 656, 696
Constante de separación, 566, 601, 611, 623, 641, 691
Construcción gráfica de curvas integrales, 58
Convergencia en la media, 699
Convolución, integral de, 196, 344-347
  transformada de Laplace de la 344-347
Crecimiento exponencial, 71
Crecimiento logístico, 72-76, 80-81
Cuasifrecuencia, 204
Cuasiperiodo, 204
Cuenca de atracción, 503, 517, 536-538
Cuerda elástica:
  de longitud infinita, 618-619
  deducción de la ecuación de onda, 634-638
  frecuencias naturales de la, 612
  justificación de la solución, 612-614, 619-620
  libre en un extremo, 617
  longitud de onda de la, 612
  modos naturales de la, 612
  problema general, 614-615
  problemas con valores en la frontera de la, 608, 620
  propagación de discontinuidades en las condiciones iniciales, 614
Curvas integrales, 35

Chebyshev, ecuación de, 264, 285, 643, 688
Chebyshev, Pafnuty L., 264
Chebyshev, polinomios de, 264, 689

D'Alembert, Jean, 168, 564, 608, 618
Decaimiento radiactivo, 61-62
Decremento logarítmico, 209
Dependencia numérica, 457
Desarrollo por fracciones parciales, 318, 322, 323, 326
Determinación de fechas por radiocarbono, 67
Diagonalización, de matrices, 380-381
  de sistemas homogéneos, 416-417
  de sistemas no homogéneos, 420-422
Diagrama escalonado, 126
Difusión, ecuación de, *véase* Conducción del calor, ecuación de
Difusividad térmica, 561, 632
Dirac, función delta de, 341
  transformada de Laplace de la, 343
Dirac, Paul A. M., 341
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 621
Dirichlet, problema de, 621
  para un círculo, 624-627, 627-628
  para un rectángulo, 622-627, 627-628
  para un sector, 628
  para un semicírculo, 628
  para una banda seminfinita, 628
Discontinuidad por salto, 311, 583, 614

Ecuación autoadjunta, 153
Ecuación característica, 139, 225, 319
  raíces complejas de la, 160, 226
  raíces reales e iguales de la, 168, 227
  raíces reales y diferentes de la, 139, 225
Ecuación diferencial adjunta, 153
Ecuación diferencial ordinaria, 18
Ecuación diferencial parcial, 18
  definición de 18. *Véase también* Conducción del calor, ecuación de; Laplace, ecuación de; Onda, 18, 609, 634
Ecuación en diferencias, 121-132, 463-464
  de primer orden, 121, 132
  de segundo orden, 463-464
  iteración de, 121
  lineal, 122-124, 463-464
  logística, 124-132
  no lineal, 124-132
  solución de, 121
  solución de equilibrio de, 122
Ecuación hipergeométrica, 291
Ecuación indicial, 282, 287, 288, 292
Ecuación integral, 112
  de Volterra, 350
Ecuación logística, 72, 124, 481
Ecuaciones algebraicas homogéneas, 371
Ecuaciones algebraicas no homogéneas, 371
Ecuaciones del depredador-presa, 18, 354-355, 521-530
Ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes, 29, 135-142, 160-165, 168-175, 225-229
  definición de las, 137, 351
  sistemas de, 388-418
  teoría general de la, 144-159, 220-221, 383-387
Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden, 27, 103-105
Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, 137, 177-197, 222, 232-240
Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
  aplicaciones de las, 60-95
  campo direccional de las, 22-23
  construcción gráfica de las curvas integrales, 58
  de Bernoulli, 47
  de Riccati, 108
  demostración de los, 111-118
  exactas, 95-99
  factor de integración para las, 33, 41, 99-100, 106
  homogéneas, 28, 103-105
  intervalo de definición de las, 41, 56-57
  lineales, 27, 31-47
  no lineales, 56-59
  separables, 47-52
  sistemas de, *véase* Sistemas,
  solución en serie de, 263-264
  solución general de las, 35, 47, 57
  solución numérica de las, *véase* Métodos numéricos,
  soluciones implícitas de las, 58
  teoremas de existencia y unicidad, 54
Ecuación diferencial ordinaria:
  definición de, 18
Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales,
  asintóticamente estable, 231
  autoadjunta, 153
  cambio de variable independiente, 167, 279, 306
  con coeficientes indeterminados, 179-187, 232-234
  conjunto fundamental de soluciones, 149, 221, 385
  de primer orden,
  definición de, 21, 135
  ecuación adjunta, 153
  ecuación característica, 139, 225, 319

ecuación de Euler, 167, 177, 271-279
ecuación homogénea con coeficientes constantes, 28, 135-142, 161-165, 168-175, 225-229
ecuación no homogénea 137, 177-196, 222
exactas, 153
factor de integración, 33, 41, 153
punto ordinario, 248, 260, 264, 271
punto singular, 249, 260, 266-270
raíces complejas de la, 159, 226
raíces reales e iguales de la, 168, 227
raíces reales y diferentes de la, 139, 225
reducción de orden, 173-175, 222
sistemas de, *véase* Sistemas,
solución complementaria, 179
solución en serie de, *véase* Solución en serie,
solución general de, 29, 35, 45, 57, 140, 149, 163, 171, 178, 221, 385
solución particular, 140, 222
teoremas de existencia y unicidad, 40, 145, 220, 261, 288, 292
variación de parámetros, 39, 189-194, 236-239
Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales:
de primer orden, 27, 31-45
métodos de resolución, 17-22, 65-81
definición de, 21, 136
sistemas autónomos, 486-561
soluciones periódicas, 495, 521-529, 541-551
$y'' = f(x, y')$, 143
$y' = f(y, y')$, 143
teoremas de existencia y unicidad, 54, 112, 357
Ecuaciones exactas, 95-99, 153
condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución, 28, 97
para las ecuaciones de segundo orden, 153
Ecuaciones rígidas, 458
Ecuaciones separables, 27, 47-52
Eigenfunciones, 568, 645
normalizadas, 656
ortogonalidad de las, 655, 686
series de, 658, 666, 686, 691, 699
Eigenvalores de problemas lineales homogéneos con valores en la frontera, 568, 645
cuándo son positivos, 662
existencia de, 646
problema de Sturm-Liouville, existencia, 654
reales, 654
simples, 377
Eigenvalores de una matriz, 376-381
multiplicidad de los, 377
realidad de los, 380
simples, 656
Eigenvalores simples, 377
Eigenvectores de una matriz, 376-381
generalizados, 408
independencia lineal de los, 377, 380
normalizados, 377
ortogonalidad de los, 380
Epidemias, 84-86
Error:
cuadrático medio,
efecto del tamaño del paso, 432, 439, 455
estimación por el método de extrapolación de Richardson, 442, 450, 454
local por redondeo, 437
local por truncamiento, 437
para el método de Euler, 438-441
para el método de los tres términos de la serie de Taylor, 448
para el método de Milne, 461, 466
para el método de Runge-Kutta, 451
para el método modificado de Euler, 449
para el método mejorado de Euler, 446, 448
para la fórmula correcta de Adams-Moulton, 461
para la fórmula predictora de Adams-Bashfort, 461
por truncamiento, 437-438, 455
por redondeo, 437, 441
Error cuadrático medio, 698
Especies competidoras, 508-519
Espectro continuo, 686
Estabilidad:
asintótica, 76, 125, 231, 482, 485, 490, 492, 534
asintóticamente estable globlalmente, 503
cambio de, 129
criterio de Hurwitz, 231
de sistemas casi lineales, 499-500
de sistemas lineales, 483, 495-497
de un método numérico, 463-465
de un punto crítico, 482, 485, 489-490, 534-535
estable, 483, 485-486, 489, 492, 534
inestable,
lineal, 231
neutra, 545
orbital, 544
región de estabilidad asintótica, 503, 536-538
semiestable, 82, 545
teoremas de Liapunov, 534
Estabilidad asintótica, *véase* Estabilidad,
Estabilidad asintótica global, 503
Estabilidad numérica, 463-465
estabilidad lineal, 465
estabilidad fuerte, 465
estabilidad débil, 467
Estabilidad orbital, 544
Euler, ecuación de, 167-168, 177, 271-278, 396, 406, 411
cambio de variable independiente, 167, 279
Euler-Fourier, fórmulas de, 576, 581
Euler, fórmula de, para $\exp(ix)$, 161
Euler, fórmula modificada de, 449
Euler, Leonhard, 28, 108, 430, 564, 608, 612
Euler-Mascheroni, constante de, 298
Euler, método de,429-434, 468
convergencia del, 436
error local por truncamiento, 438-441
error por truncamiento, 438
Euler, método mejorado de, 444-448
Existencia y unicidad, teoremas de: 40, 54
demostración del, para $y' = f(x, y)$, 111-118
para ecuaciones de primer orden, 54, 111
para ecuaciones lineales de n-ésimo orden, 219
para ecuaciones lineales de primer orden, 40

para ecuaciones lineales de segundo orden, 145
para la solución en serie de ecuaciones lineales de segundo orden, 260, 288, 292
para sistemas de ecuaciones de primer orden, 357
Exponenciales complejas, 161-162, 227
Exponentes de la singularidad, 282, 287
Extensión periódica impar, 593
Extensión periódica par, 593

Factor de integración, 28, 33, 41, 99-100, 106, 153
Fase del movimiento armónico simple, 201
Feigenbaum, número de, 134
Ferrari, Ludovico, 229
Fourier Joseph, 563, 573
Fourier, series de, 564, 573-597
aceleración de la convergencia, 588
convergencia de las, 582-583, 588
convergencia de las sumas parciales, 585
ecuación de Parseval, 588, 595, 620
elección de la serie, 593-594
fenómeno de Gibbs, 585, 594
fórmulas de Euler-Fourier, 576
integración de las, 575
ortogonalidad de los senos y cosenos, 574-575
para la onda cuadrada, 584-586, 595
para la onda diente de sierra, 592-593, 595
para la onda triangular, 577-578, 595
periodicidad de los senos y cosenos, 573-574
serie de cosenos, 590, 658
serie de senos, 590-591, 658
tipos especializados, 595-596
Frecuencia natural, 201, 645
de la cuerda vibrante, 612
del movimiento armónico simple, 201
Fredholm, Erik Ivar, 668
Fredholm, teorema alternativo de, 668
Frobenius, Ferdinand Georg, 281, 361
Frobenius, método de, 281
Fuchs, Immanuel Lazarus, 261
Función analítica, 244, 260
Función cuadráticamente integrable, 699
Función de error, 44
Función definida negativa, 533
Función definida positiva, 533
Función discontinua de fuerza, 46, 335-339
Función escalón unitario, 327
transformada de Laplace de la, 329
Función gamma, 315
Función generalizada, 341
Función impar, 589
Función semidefinida negativa, 533
Función semidefinida positiva, 533
Funciones escalón, 327
Funciones impulso, 339-344
Funciones matriciales, 367
Funciones pares, 589
Funciones periódicas, 573
combinación lineal de, 574
coseno y seno, 574
derivada de, 580
integral de, 579
periodo fundamental, 574
producto de, 574
transformada de Laplace, 334
Funciones propias, *véase* Eigenfunciones
Funciones seccionalmente continuas, 311, 582

Galois, Evariste, 229
Gibbs, fenómeno de, 586, 592
Gibbs, Josiah Willard, 586
Gompertz, ecuación de, 83
Green, función de, 678-681
Green, George, 678

Heaviside, Oliver, 310
Helmholtz, ecuación de, 694
Hermite, Charles, 258, 361
Hermite, ecuación de, 258, 271, 643
Hermite, polinomios de, 258
Heun, fórmula de, 445
Historia de las ecuaciones diferenciales, 27-30
Hooke, ley de, 197
Hooke, Robert, 197
Hurwitz, criterio de estabilidad de, 231
Huygens, Christian, 351

Independencia lineal, 154-159, 221
de funciones vectoriales, 377
de vectores, 374
Integral impropia, 310
teorema de comparación para la, 312
Iteración, método de, 113, 436
de ecuaciones en diferencias, 121
Interés compuesto, 62-65
Interpolación, polinomio de, 461
Intervalo de convergencia, 242
Isóclina, 26

Jordan, Camille, 361

Kernel de la convolución, 196
de la integral de la transformada, 309
Kirchhoff, Gustav R., 207
Kirchhoff, ley de, 207, 359
Kutta, M. Wilhelm, 450

L Hospital, Marqués de, 94
Lagrange, identidad de, 653
Lagrange, Joseph Louis, 28, 190, 564, 573, 608
Laguerre, ecuación de, 285, 694
Laguerre, Edmond Nicholas, 285
Landau, ecuación de, 86
Landau, Lev D., 86
Laplace, ecuación de, 29, 620-629
condiciones de la frontera para la, 621
en coordenadas cilíndricas, 629, 693
en coordenadas esféricas, 624
en coordenadas polares, 694
problema de Dirichlet, 621
para una banda seminfinita, 628
para un círculo, 624-628
para un rectángulo, 622-624, 627-628
para un sector, 628
para un semicírculo, 628
problema de Neumann, 621
para un círculo, 629
para un rectángulo, 628-629
problema mixto, 629
Laplace, Pierre Simon de, 29, 310, 620
Laplace, transformada de, 309-352
de derivadas, 316-318
de ecuaciones integrales, 350
de funciones periódicas, 332-333
de la convolución, 344-348
de la función delta de Dirac, 341
de la función escalón, 327
de la onda cuadrada, 333-334
de la onda diente de sierra, 334

de la onda senoidal, rectificada, 334
definición de la, 310
existencia de la, 311
fórmula de traslación de la, 329, 331
inversa de la, 319
tabla de la, 320
Laplace, transformada inversa de, 319
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 27, 47, 94, 351, 595
Legendre, Adrien Marie, 137, 156
Legendre, ecuación de, orden:
alfa, 137, 153, 248, 262, 265-266, 271, 284, 326, 683, 688, 696
uno, 174
Legendre, polinomios de, 266, 688, 702
Liapunov, Aleksandr M., 531
Liapunov, función de, 534, 537
Liapunov, segundo método de, 531-541
Libby, Willard F., 67
Liénard, ecuación de, 507, 540
Liouville, Joseph, 652
Longitud de onda, de la cuerda vibrante, 612
Longitud de un vector, 365
Lorenz, ecuaciones de, 552-561
Lorenz, Edward N., 553
Lotka, Alfred James, 522
Lotka-Volterra, ecuaciones de, 18, 354, 521-530

Magnitud de un vector, 365
Malthus, Thomas, 71
Matriz adjunta, 362
Matriz aumentada, 372
Matriz autoadjunta, 379
Matriz conjugada, 362
Matriz exponencial, 417
Matriz fundamental, 413-418
Matriz hermitiana, 258, 379
Matriz identidad, 365
Matriz inversa, 365
Matriz no singular, 366
Matriz singular, 366
Matrices, 361-383
adición de, 362
adjunta, 362
aumentada, 372
autoadjunta, 379
cero, 362
conjugada, 362
diagonalizable, 381
eigenvalores de, 376-381
eigenvectores de, 376-381
exponencial, 481
fundamental, 413-418
hermitiana, 379
identidad, 365
igualdad de, 362
inversa, 365-367
multiplicación de, 363
multiplicación por números, 362-363
no singular, 366
reducción respecto a los renglones de, 366
semejante, 381
singular, 366
sustracción, 362
transpuesta, 362
Matrices semejantes, 381
Mecánica, algunos problemas de, 87-92
Media, convergencia en la, 699
Membrana elástica, vibraciones de una, 620, 690-692
Método de pasos múltiples, 460-465
Método predictor-corrector, 460-462, 465, 470
Métodos numéricos, 429-471
de Euler, 429-434, 468
convergencia del, 437
error local por truncamiento, 437
error por truncamiento, 437
de Heun, 445, 467
de los tres términos de la serie de Taylor, 447
de Milne, 461
de pasos múltiples, 460-467
de Runge-Kutta, 460-463, 468
efecto del tamaño del paso, 432, 439, 455
error, *véase* Error,
fórmula predictora de Adams-Bashforth, 461
fórmula correctora de Adams-Moulton, 461-462
iteración, 436
método predictor-corrector de Adams-Moulton, 461-462, 465, 470
mejorado de Euler, 444-448
modificado de Euler, 449
para sistemas de ecuaciones de primer orden, 467-469
polinomio de interpolación, 461
predictor-corrector, 462-463, 465, 470
solución extraña, 464
Mezclas, problemas de, 65-66
Millikan, Robert A., 94
Milne, método de, 461, 467
Modelos de umbral, 78-81
Modo natural (de la cuerda vibrante), 612
Momento de la muerte, 66-67
Moulton, Forest Ray, 460
Movimiento armónico simple, 201
Movimiento sobreamortiguado, 204

Neumann, Karl Gottfried, 622
Neumann, problema de, 621
para un círculo, 629
para un rectángulo, 628-629
Newton, Isaac, 27, 28, 94
Newton, ley de:
del enfriamiento, 66, 630
del movimiento, 17, 87, 199, 354, 635
Nivel de saturación, 75
Nodo, 393, 406-407, 475. *Ver también* Nodo impropio; Nodo propio,
Nodo impropio, 393, 408, 474-475, 476-479
Nodo propio, 477
Nuliclina, 508-517

Onda cuadrada, 333, 334, 585-586, 595
Onda diente de sierra, 334, 591-592, 595
Onda, ecuación de, 18, 608, 635
en coordenadas polares, 689, 693
solución de la, 618-619
véase también Cuerda elástica, deducción de la ecuación de onda
Onda senoidal rectificada, 334
Onda triangular, 577-578, 595
Operador diferencial, 144, 660-661
Operador lineal, 144, 235, 314, 319
Orden de una ecuación diferencial, 19
Orden exponencial, funciones de, 312
Ortogonalidad, de las funciones de Bessel, 306, 686-689
de funciones, 574
de las eigenfunciones de los problemas de Sturm-Liouville, 655, 686

de las funciones seno y coseno, 574-575
de los polinomios de Chebyshev, 689
de los polinomios de Legendre, 266, 688, 702
de vectores, 364

Pandeo de una columna elástica, 664-665
Parseval, ecuación de, 588, 595, 620, 703
Péndulo, ecuación del:
generalizada no lineal sin amortiguamiento, 539
lineal sin amortiguamiento, 22
no lineal con amortiguamiento, 491-492, 500-503, 539
no lineal sin amortiguamiento, 21, 505-507, 539
periodo, 506-507
Periodo del movimiento armónico simple, 201
Picard, Charles Emile, 113
Picard, método de, 113
Plano fase, 474
Población, crecimiento de una, 41-81
Poincaré, Henri, 473
Polinomio característico, 225
Potencial, ecuación del, 18, 620-629
ver también Laplace ecuación de
Problema autoadjunto con valores en la frontera, 660-662, 685
Problema con valor inicial, 35, 136, 220, 357
Problemas con valores en la frontera, 641
autoadjuntos, 659-662
ecuación de la conducción del calor, 629-635
ecuación de Laplace, 621
ecuación de onda, 608, 677
homogéneos, 643-665
no homogéneos, 643-665, 682
singulares, 682-689
véase también Problemas homogéneos con valores en la frontera; Problemas no homogéneos con valores en la frontera
Problemas homogéneos con valores en la frontera, 643-665
condición para la existencia de una solución no trivial, 646
de Sturm-Liouville, 652-665
eigenfunciones, 645
eigenvalores, 645
singulares de Sturm-Liouville, 681-689
Problemas no homogéneos con valores en la frontera, 641, 665-681
alternativa de Fredholm, 668
por la función de Green, 668-681
solución de, por desarrollo de eigenfunciones, 665-675
Producto interno:
para funciones, 574
para vectores, 364
Pulsaciones, 211
Punto crítico:
aislado, 496
al que se aproxima una trayectoria, 482
centro de un sistema lineal, 481, 495, 504
definición de, 474, 489
estabilidad de un, *véase* Estabilidad de un punto crítico,
no aislado, 485
nodo impropio de un sistema lineal, 393, 452, 474-475, 476-479
nodo propio de un sistema lineal, 476
para la ecuación de primer orden, 73
punto espiral de un sistema lineal, 401, 479-481
punto silla de un sistema lineal, 391, 475-476
Punto espiral, 400-401, 479-480, 495, 505
Punto ordinario, 248, 260, 264
en el infinito, 271
Punto silla, 391, 474-475, 500
Punto singular, 249, 260, 266-270
en el infinito, 271
irregular, 269, 291
regular, 266-270
Punto singular irregular, 269, 291
Punto singular regular, 266-270
en el infinito, 271

Radio de convergencia, 242
Rayleigh, ecuación de, 552
Reacciones químicas, 86
Recta tangente, método de la, *véase* Euler, método de
Región simplemente conexa, 97
Recurrencia, relación de, 250, 281, 282, 287
Redes eléctricas, 206-208, 323, 359
Reducción a sistemas de ecuaciones, 355-356
Reducción de orden, 173-175, 222
para sistemas, 397
Región de estabilidad asintótica, 492, 517, 536-538
Runge-Kutta, método de, 460-463, 468
Rendimiento máximo sostenible, 84
Resistencia eléctrica, 206-207
debida al medio, 89
ley de Stokes para la, 64
veáse también Amortiguamiento, fuerza de
Resonancia, 211-213
Respuesta al impulso, 349
Retrato fase, 474
Riccati, ecuación de, 108
Riccati, Jacopo Francesco, 108
Richardson, método de extrapolación de, 442, 450, 454
Rodrigues, fórmula de, 266
Runge, Carl D., 450
Runge-Kutta, método de, 460-463, 468

Schaefer, modelo de, para una población de peces, 83
Schrödinger, Erwin, 341
Separación de variables, 563
observaciones adicionales, 689-692
para la ecuación de conducción del calor, 566, 601
para la ecuación de Laplace, 622
en coordenadas polares, 693
para la ecuación de onda, 611
en coordenadas polares, 693
Separatriz, 502, 515-516
Serie de cosenos, 590
Serie de senos, 591
Series de eigenfunciones, 658, 665-666, 688, 691, 699
Series de potencias propiedades de las, 242-243
Simpson, regla de, 451, 454
Sistema autónomo, 487-489

Sistema resorte-masa, 197-205, 210-218
con dos grados de libertad, 230, 354
Sistemas:
de ecuaciones algebraicas, 371-376
de ecuaciones diferenciales, 18
condiciones iniciales, 356
lineales, 357
no lineales, 357
reducción a, 355-356
solución de, 355-356
solución numérica de, 467-468
teorema de existencia y unicidad, 357
de ecuaciones lineales de primer orden, 383-428
coeficientes indeterminados, 422-423
conjunto fundamental de soluciones, 385
de Euler, 396, 403, 411
definición de, 357
diagonalización, 415-416, 420-423
forma vectorial de la solución, 385
homogéneos, 357, 383-387
homogéneos con coeficientes constantes, 388-419
con eigenvalores complejos, 398-403, 479-481
con eigenvalores reales y diferentes, 388-395, 474-476
con eigenvalores repetidos, 405-411
matriz fundamental, 413-418
no homogéneos, 357, 420-426
lución general de, 385
superposición de soluciones, 384
teoremas de existencia y unicidad, 357
variación de parámetros, 3-425
Sistemas casilineales, 495-503
Sistemas equivalentes, 371
Solución caótica, de la ecuación logística en diferencias, 132
de las ecuaciones de Lorenz, 557
Solución complementaria, 179
Solución de estado estable, 213, 600
Solución de una ecuación diferencial ordinaria, 19
de sistemas, 385
de sistemas de ecuaciones, 356
implícita, 58
solución general, de las ecuaciones lineales, 35, 45, 140, 149, 163, 170, 178, 221
Solución en serie:
cerca de un punto ordinario, 259-266
cerca de un punto singular regular, 280-307
ecuación indicial, 282, 287, 288, 292
cuando las raíces de la ecuación indicial:
difieren en un entero, 283-284, 287, 292, 294-304
son iguales, 283-284, 287, 292-294, 295-299
para ecuaciones de primer orden, 265
relación de recurrencia, 250, 280, 282-283, 287
teorema de existencia para la, 260, 288, 292
Solución general de las ecuaciones lineales:
de *n*-ésimo orden, 221
de primer orden, 35, 45, 57
de segundo orden, 140, 149, 163, 168-169, 178
sistemas de ecuaciones de primer orden, 385
Solución implícita, 58
Solución particular, 179, 222
Solución transitoria, 213, 600-601
Soluciones de equilibrio, 73, 122, 474
Soluciones periódicas de sistemas autónomos, 495, 521-529, 541-551
Stokes, George Gabriel, 94
Stokes, ley de, 94
Sturm, Charles, 652
Sturm-Liouville, problemas de, con valores en la frontera, 652-665
autoadjunción de los, 659-662
con eigenfunciones ortogonales, 655
con eigenvalores reales, 654
simples, 656
singulares, 681-689
de espectro continuo, 685
Superposición, principio de, 146, 384, 568-571
Sylvester, James, 361

Tautócrona, 351
Taylor, Brook, 244
Taylor, serie de, 161, 244
para funciones de dos variables, 449
Telégrafo, ecuación de, 636, 643
Términos de fuerza periódicos, 587
Transferencia, función de, 349
Transformación de semejanza, 381
Transpuesta de una matriz, 361
Traslación de una función, 329
Trayectorias, 474, 482
de sistemas casi lineales, 497
de sistemas lineales, 474-483
Trayectorias ortogonales, 109-110
Tres términos de la serie de Taylor, método de los, 446-449

Unicidad, teoremas de, *véase* Existencia y unicidad, teoremas de

Valores propios, *véase* Eigenvalores,
Van der Pol, ecuación de, 547-551
Variables adimensionales, 572, 616-617
Variación de parámetros, 28, 39-40, 189-194, 236-238
para sistemas de ecuaciones, 423-425
Vectores, 158, 362
independencia lineal de, 374
magnitud, 364
multiplicación de, 364
ortogonalidad, 365
producto interno, 364
soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, 385
Vectores propios, *véase* Eigenvectores
Velocidad de escape, 90
Velocidad de onda, 616, 636

Verhulst, ecuación de, 72
Verhulst, Pierre F., 72
Vibraciones:
  con dos grados de libertad, 230, 354
  de un sistema resorte-masa, 197-205, 210-215, 323
  de una barra elástica, 590-591
  de una cuerda elástica, 608-620, 634-636
  de una membrana elástica, 620, 690-692
Vida media, 62
Volterra, ecuación integral de, 350
Volterra, Vito, 522
Wronski, Józef, 147
Wronskiano, 147, 221
  identidad de Abel para el, 156, 223
  para sistemas de ecuaciones, 386
  identidad de Abel, 386